7. – Soluzione degli esercizi su: ***equazioni diofantine di primo grado in due incognite***.

Esercizio 7.1

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$2\,355\,637\,x - 213\,624\,y = 391\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra $2\,355\,637$ e $213\,624$:

$$2\,355\,637 = 213\,624 \cdot 11 + 5\,773\,;$$

$$213\,624 = 5\,773 \cdot 37 + 23\,;$$

$$5\,773 = 23 \cdot 251 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $2\,355\,637$ e $213\,624$ è dunque 23; poiché si tratta di un divisore di 391 ($= 23 \cdot 17$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$2\,355\,637\,x + 213\,624\,y = 23\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$23 = 213\,624 - 37 \cdot 5\,773 = 213\,624 - 37 \cdot (2\,355\,637 - 11 \cdot 213\,624) =$$

$$= 408 \cdot 213\,624 - 37 \cdot 2\,355\,637\,.$$

Dunque: una soluzione dell'equazione $2\,355\,637\,x + 213\,624\,y = 23$ è $(-37, 408)$; una soluzione dell'equazione $2\,355\,637\,x + 213\,624\,y = 391$ è pertanto $(-629, 6\,936)$. La generica soluzione di quest'ultima equazione è allora

$$x := -629 + \tfrac{213\,624}{23}h, \qquad y := 6\,936 - \tfrac{2\,355\,637}{23}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -629 + 9\,288h, \qquad y := 6\,936 - 102\,419h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Poiché l'equazione proposta è

$$2\,355\,637\,x - 213\,624\,y = 391$$

la sua generica soluzione è

$$x := -629 + 9\,288h, \qquad y := -6\,936 + 102\,419h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.2

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$24\,973\,x - 1\,079\,y + 65 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $24\,973$ e $1\,079$.

$24\,973 = 1\,079 \cdot 23 + 156\,;$

$1\,079 = 156 \cdot 6 + 143\,;$

$156 = 143 \cdot 1 + 13\,;$

$143 = 13 \cdot 11\,.$

Il massimo comun divisore fra $24\,973$ e $1\,079$ è dunque 13; poiché si tratta di un divisore di 65, l’equazione proposta ha soluzione.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$-\,24\,973\,x + 1\,079\,y = 65\,.$$

Cerchiamo in primo luogo una soluzione per l’equazione

$$24\,973\,x + 1\,079\,y = 65\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$13 = 156 - 143 = 156 - (1\,079 - 156 \cdot 6) = 156 \cdot 7 - 1\,079 =$$

$$= (24\,973 - 1\,079 \cdot 23) \cdot 7 - 1\,079 = 24\,973 \cdot 7 - 1\,079 \cdot 162\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $24\,973\,x + 1\,079\,y = 13$ è $(7,\,-\,162)$, cosicché una soluzione dell’equazione $24\,973\,x + 1\,079\,y = 65$ è $(35,\,-\,810)$. La generica soluzione è

$$x := 35 + \tfrac{1\,079}{13}h, \qquad y := -\,810 - \tfrac{24\,973}{13}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{)}$$

ossia

$$x := 35 + 83h, \qquad y := -\,810 - 1\,921h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

La generica soluzione dell’equazione proposta è dunque

$$x := -\,35 - 83h, \qquad y := -\,810 - 1921h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Esercizio 7.3

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$2\,993\,x + 1\,387\,y + 1\,241 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $2\,993$ e $1\,387$.

$2\,993 = 1\,387 \cdot 2 + 219\,;$

$1\,387 = 219 \cdot 6 + 73\,;$

$219 = 73 \cdot 3\,.$

Il massimo comun divisore fra $2\,993$ e $1\,387$ è dunque 73; poiché si tratta di un divisore di $1\,241$, l’equazione proposta ha soluzione.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$-\,2\,993\,x - 1\,387\,y = 1\,241\,.$$

Cerchiamo in primo luogo una soluzione per l’equazione

$$2\,993\,x + 1\,387\,y = 1\,241\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$73 = 1\,387 - 219 \cdot 6 = 1\,387 - (2\,993 - 1\,387 \cdot 2) \cdot 6 = 2\,993 \cdot (\,-\,6) + 1\,387 \cdot 13$$

Dunque una soluzione dell’equazione $2\,993\,x + 1\,387\,y = 73$ è $(\,-\,6, 13)$, cosicché una soluzione dell’equazione $2\,993\,x + 1\,387\,y = 1\,241$ è $(\,-\,6\,\frac{1\,241}{73}, 13\,\frac{1\,241}{73})$, cioè $(\,-\,102, 221)$. La generica soluzione è

$$x := \,-\,102 + \tfrac{1\,387}{73}h, \qquad y := 221 - \tfrac{2\,993}{73}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{)}$$

ossia

$$x := \,-\,102 + 19h, \qquad y := 221 - 41h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

La generica soluzione dell’equazione proposta è dunque

$$x := 102 - 19h, \qquad y := \,-\,221 + 41h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Esercizio 7.4

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$3\,689\,x - 4\,182\,y = 102\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $4\,182$ e $3\,689$.

$4\,182 = 3\,689 \cdot 1 + 493\,;$

$3\,689 = 493 \cdot 7 + 238\,;$

$493 = 238 \cdot 2 + 17\,;$

$238 = 17 \cdot 14\,.$

Il massimo comun divisore fra $4\,182$ e $3\,689$ è dunque 17; poiché si tratta di un divisore di 102 $(\,=6 \cdot 17)$, l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$3\,689\,x + 4\,182\,y = 17\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$17 = 493 - 2 \cdot 238 = 493 - 2 \cdot (3\,689 - 7 \cdot 493) = 15 \cdot 493 - 2 \cdot 3\,689 =$$

$$= 15 \cdot (4\,182 - 3\,689) - 2 \cdot 3\,689 = 15 \cdot 4\,182 - 17 \cdot 3\,689\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $3\,689\,x + 4\,182\,y = 17$ è $(-17, 15)$. Di conseguenza una soluzione dell'equazione $3\,689\,x + 4\,182\,y = 102$ è $(-102, 90)$; la generica soluzione di quest'ultima equazione è

$$x := -102 + \tfrac{4\,182}{17}h, \qquad y := 90 - \tfrac{3\,689}{17}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -102 + 246h, y := 90 - 217h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := -102 + 246h, \qquad y := 217h - 90 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.5

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$19\,899\,x - 6\,365\,y = 1\,139\,.$$

Soluzione – Studiamo in primo luogo l'equazione diofantina

$$19\,899\,x + 6\,365\,y = 1\,139\,.$$

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $19\,899$ e $6\,365$.

$$19\,899 = 6\,365 \cdot 3 + 804\,; \quad 6\,365 = 804 \cdot 7 + 737\,; \quad 804 = 737 \cdot 1 + 67\,; \quad 737 = 67 \cdot 11\,.$$

Il massimo comun divisore fra $19\,899$ e $6\,365$ è dunque 67; poiché si tratta di un divisore di $1\,139$ ($= 67 \cdot 17$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$19\,899\,x + 6\,365\,y = 67\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$67 = 804 - 737 = 804 - (6\,365 - 7 \cdot 804) = 8 \cdot 804 - 6\,365 =$$

$$= 8 \cdot (19\,899 - 3 \cdot 6\,365) - 6\,365 = 8 \cdot 19\,899 - 25 \cdot 6\,365\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $19\,899\,x + 6\,365\,y = 67$ è $(8, -25)$. Di conseguenza una soluzione dell'equazione $19\,899\,x + 6\,365\,y = 1\,139$ è $(136, -425)$; la generica soluzione di quest'ultima equazione è

$$x := 136 + \tfrac{6\,365}{67}h, \qquad y := -425 - \tfrac{19\,899}{67}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := 136 + 95h, \qquad y := -425 - 297h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 136 + 95h, \qquad y := 425 + 297h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.6

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$3\,425\,x - 1\,096\,y = 1\,380\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,425$ e $1\,096$.

$$3\,425 = 1\,096 \cdot 3 + 137\,;$$

$$1\,096 = 137 \cdot 8\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,425$ e $1\,096$ è dunque 137; poiché 137 non divide $1\,380$, l'equazione proposta non ha soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.7

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$3\,239\,x + 1\,501\,y + 1\,027 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,239$ e $1\,501$.

$$3\,239 = 1\,501 \cdot 2 + 237\,;$$
$$1\,501 = 237 \cdot 6 + 79\,;$$
$$237 = 79 \cdot 3 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,239$ e $1\,501$ è dunque 79; poiché si tratta di un divisore di $1\,027$ ($= 79 \cdot 13$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$3\,239\,x + 1\,501\,y = 1\,027\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$79 = 1\,501 - 6 \cdot 237 = 1\,501 - 6 \cdot (3\,239 - 2 \cdot 1\,501) = 13 \cdot 1\,501 - 6 \cdot 3\,239\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $3\,239\,x + 1\,501\,y = 1\,027$ è $(\,-78, 169)$. La generica soluzione è

$$x := \,-78 + \tfrac{1\,501}{79}h,\ \ y := 169 - \tfrac{3\,239}{79}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{)}$$

ossia

$$x := \,-78 + 19h, \quad y := 169 - 41h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Poiché l'equazione proposta si può scrivere come

$$3\,239\,x + 1\,501\,y = \,-1\,027\,.$$

la sua generica soluzione è

$$x := 78 - 19h, \qquad y := 41h - 169 \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Esercizio 7.8

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ della seguente equazione diofantina:

$$5\,901\,x + 29\,997\,y + 6 = 0\,.$$

Soluzione – L’equazione proposta si può scrivere come

$$-\,5\,901\,x - 29\,997\,y = 6\,.$$

Studiamo in primo luogo l’equazione diofantina

$$5\,901\,x + 29\,997\,y = 6\,.$$

Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $29\,997$ e $5\,901$.

$$29\,997 = 5\,901 \cdot 5 + 492\,;$$

$$5\,901 = 492 \cdot 11 + 489\,;$$

$$492 = 489 \cdot 1 + 3\,;$$

$$489 = 3 \cdot 163\,.$$

Il massimo comun divisore fra $29\,997$ e $5\,901$ è dunque 3; poiché si tratta di un divisore di 6 ($= 3 \cdot 2$), l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$5\,901\,x + 29\,997 = 3\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$3 = 492 - 489 = 492 - (5\,901 - 11 \cdot 492) = 12 \cdot 492 - 5\,901 =$$

$$= 12 \cdot (29\,997 - 5 \cdot 5\,901) - 5\,901 = 12 \cdot 29\,997 - 61 \cdot 5\,901\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $5\,901\,x + 29\,997\,y = 3$ è $(-61, 12)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $5\,901\,x + 29\,997\,y = 6$ è $(-122, 24)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := -122 + \tfrac{29\,997}{3}h, \qquad y := 24 - \tfrac{5\,901}{3}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -122 + 9\,999h, \qquad y := 24 - 1\,967h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := 122 - 9\,999h, \qquad y := 1\,967h - 24 \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.9

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$21\,087\,x - 6\,745\,y = 1\,207\,.$$

Soluzione – Studiamo in primo luogo l'equazione diofantina

$$21\,087\,x + 6\,745\,y = 1\,207\,.$$

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $21\,087$ e $6\,745$.

$$21\,087 = 6\,745 \cdot 3 + 852\,; \quad 6\,745 = 852 \cdot 7 + 781\,; \quad 852 = 781 \cdot 1 + 71\,; \quad 781 = 71 \cdot 11\,.$$

Il massimo comun divisore fra $21\,087$ e $6\,745$ è dunque 71; poiché si tratta di un divisore di $1\,207$ ($= 71 \cdot 17$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$21\,087\,x + 6\,745\,y = 71\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$71 = 852 - 781 = 852 - (6\,745 - 7 \cdot 852) = 8 \cdot 852 - 6\,745 =$$

$$= 8 \cdot (21\,087 - 3 \cdot 6\,745) - 6\,745 = 8 \cdot 21\,087 - 25 \cdot 6\,745\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $21\,087\,x + 6\,745\,y = 71$ è $(8,\, -25)$. Di conseguenza una soluzione dell'equazione $21\,087\,x + 6\,745\,y = 1\,207$ è $(136,\, -425)$; la generica soluzione di quest'ultima equazione è

$$x := 136 + \tfrac{6\,745}{71}h, \qquad y := \, -425 - \tfrac{21\,087}{71}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := 136 + 95h, \qquad y := \, -425 - 297h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 136 + 95h, \qquad y := 425 + 297h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.10

Nella *sylicon valley* del piccolo stato del Calisota, la principale industria locale ha prodotto in esclusiva nel 2016 diversi esemplari degli elaboratori HAL01A e HAL02A. Per la produzione di ogni elaboratore del primo tipo sono necessari 187 microcircuiti circuiti integrati del tipo MB314, mentre per la produzione di ogni elaboratore del secondo tipo ne servono 93.

Sapendo che complessivamente nel 2016 per la produzione di tali elaboratori la citata industria ha utilizzato $26\,594$ microcircuiti integrati del tipo MB314, è possibile dire quanti elaboratori dei due tipi essa ha prodotto (nel 2016)?

Soluzione – Sia x il numero di elaboratori HAL01A prodotti nel 2016, e sia y il numero di elaboratori HAL02A prodotto nel 2016. In base ai dati del problema, deve essere

$$187x + 93y = 26\,594\,.$$

Cerchiamo le eventuali soluzioni intere di questa equazione diofantina; ci preoccuperemo poi di vedere quali di esse sono accettabili per il nostro problema (ossia per quali di esse né x né y assumono valori negativi).

Calcoliamo il massimo comun divisore tra 187 e 93.

Essendo

$$187 = 2 \cdot 93 + 1$$

tale massimo comun divisore è 1 e una soluzione dell'equazione diofantina $187x + 93y = 1$ è $x := 1$, $y := -2$. Pertanto una soluzione dell'equazione diofantina considerata sopra è $x := 26\,594$, $y := -53\,188$; la generica soluzione è

$$x := 26\,594 - 93h, \quad y := 187h - 53\,188\,.$$

Affinché la x assuma valore positivo, deve essere $h \leq \frac{26\,594}{93}$, ossia $h \leq 285$ (ricordando che h può assumere soltanto valori interi). Affinché la y assuma valore positivo, deve essere $h \geq \frac{53\,188}{187}$, ossia $h \geq 285$. Dunque l'unica soluzione dell'equazione considerata per la quale sia x che y sono entrambi positivi si ha per $h := 285$: in essa, $x = 89$ e $y = 107$.

Dunque nel 2016 sono stati prodotti 89 elaboratori del tipo HAL01A e 107 elaboratori del tipo HAL02A.

Esercizio 7.11

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$1\,142\,757\,x - 87\,550\,y = 391\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra $1\,142\,757$ e $87\,550$:

$$1\,142\,757 = 87\,550 \cdot 13 + 4\,607\,; \qquad 87\,550 = 4\,607 \cdot 19 + 17\,;$$

$$4\,607 = 17 \cdot 271 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $1\,142\,757$ e $87\,550$ è dunque 17; poiché si tratta di un divisore di 391 ($= 23 \cdot 17$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$1\,142\,757\,x + 87\,550\,y = 17\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$17 = 87\,550 - 19 \cdot 4\,607 = 87\,550 - 19 \cdot (1\,142\,757 - 13 \cdot 87\,550) =$$

$$= 248 \cdot 87\,550 - 19 \cdot 1\,142\,757\,.$$

Dunque: una soluzione dell'equazione $1\,142\,757\,x + 87\,550\,y = 17$ è $(-19, 248)$; una soluzione dell'equazione $1\,142\,757\,x + 87\,550\,y = 391$ è pertanto $(-437, 5\,704)$. La generica soluzione di quest'ultima equazione è allora

$$x := -437 + \frac{87\,550}{17}h, \qquad y := 5\,704 - \frac{1\,142\,757}{17}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -437 + 5\,150h, \qquad y := 5\,704 - 67\,221h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Poiché l'equazione proposta è

$$1\,142\,757\,x - 87\,550\,y = 391$$

la sua generica soluzione è

$$x := -437 + 5\,150h, \qquad y := -5\,704 + 67\,221h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.12

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$32\,572\,x - 1\,411\,y + 85 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $32\,572$ e $1\,411$.

$32\,572 = 1\,411 \cdot 23 + 119\,;$ $\qquad 1\,411 = 119 \cdot 11 + 102\,;$

$119 = 102 \cdot 1 + 17\,;$ $\qquad 102 = 17 \cdot 6$.

Il massimo comun divisore fra $32\,572$ e $1\,411$ è dunque 17; poiché si tratta di un divisore di 85, l'equazione proposta ha soluzione.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$-\,32\,572\,x + 1\,411\,y = 85\,.$$

Cerchiamo in primo luogo una soluzione per l'equazione

$$32\,572\,x + 1\,411\,y = 85\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$17 = 119 - 102 = 119 - (1\,411 - 119 \cdot 11) = 119 \cdot 12 - 1\,411 =$$

$$= (32\,572 - 1\,411 \cdot 23) \cdot 12 - 1\,411 = 32\,572 \cdot 12 - 1\,411 \cdot 277\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $32\,572\,x + 1\,411\,y = 17$ è $(12,\ -277)$, cosicché una soluzione dell'equazione $32\,572\,x + 1\,411\,y = 85$ è $(60,\ -1\,385)$. La generica soluzione è

$x := 60 + \frac{1\,411}{17}h,$ $\qquad y := \ -1\,385 - \frac{32\,572}{17}h$ $\qquad$ (al variare di h in $\mathbb{Z}$)

ossia

$x := 60 + 83h,$ $\qquad y := \ -1\,385 - 1\,916h$ $\qquad$ (al variare di h in $\mathbb{Z}$).

La generica soluzione dell'equazione proposta è dunque

$x := \ -60 - 83h,$ $\qquad y := \ -1\,385 - 1916h$ $\qquad$ (al variare di h in $\mathbb{Z}$).

Esercizio 7.13

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$3\,403\,x + 1\,577\,y + 913 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,403$ e $1\,577$.

$3\,403 = 1\,577 \cdot 2 + 249\,;$ $\qquad 1\,577 = 249 \cdot 6 + 83\,;$ $\qquad 249 = 83 \cdot 3\,.$

Il massimo comun divisore fra $3\,403$ e $1\,577$ è dunque 83; poiché si tratta di un divisore di 913, l'equazione proposta ha soluzione.

L'equazione proposta si può scrivere come

$$-\,3\,403\,x - 1\,577\,y = 913\,.$$

Cerchiamo in primo luogo una soluzione per l’equazione

$$3\,403\,x + 1\,577\,y = 913\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$83 = 1\,577 - 249 \cdot 6 = 1\,577 - (3\,403 - 1\,577 \cdot 2) \cdot 6 = 3\,403 \cdot (\,-\,6) + 1\,577 \cdot 13$$

Dunque una soluzione dell’equazione $3\,403\,x + 1\,577\,y = 83$ è $(\,-\,6, 13)$, cosicché una soluzione dell’equazione $3\,403\,x + 1\,577\,y = 913$ è $(\,-\,6\,\frac{913}{73}, 13\,\frac{913}{73})$, cioè $(\,-\,66, 143)$. La generica soluzione è

$$x := \,-\,66 + \tfrac{1\,577}{83}h, \qquad y := 143 - \tfrac{3\,403}{83}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := \,-\,66 + 19h, \qquad y := 143 - 41h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

La generica soluzione dell’equazione proposta è dunque

$$x := 66 - 19h, \qquad y := \,-\,143 + 41h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.14

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$4\,123\,x - 4\,674\,y = 114\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $4\,674$ e $4\,123$.

$$4\,674 = 4\,123 \cdot 1 + 551\,; \quad 4\,123 = 551 \cdot 7 + 266\,; \quad 551 = 266 \cdot 2 + 19\,; \quad 266 = 19 \cdot 14\,.$$

Il massimo comun divisore fra $4\,674$ e $4\,123$ è dunque 19; poiché si tratta di un divisore di 114 $(\,=6 \cdot 19)$, l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$4\,123\,x + 4\,674\,y = 19\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$19 = 551 - 2 \cdot 266 = 551 - 2 \cdot (4\,123 - 7 \cdot 551) = 15 \cdot 551 - 2 \cdot 4\,123 =$$

$$= 15 \cdot (4\,674 - 4\,123) - 2 \cdot 4\,123 = 15 \cdot 4\,674 - 17 \cdot 4\,123\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $4\,123\,x + 4\,674\,y = 19$ è $(\,-\,17, 15)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $4\,123\,x + 4\,674\,y = 102$ è $(\,-\,102, 90)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := \,-\,102 + \tfrac{4\,674}{19}h, \qquad y := 90 - \tfrac{4\,123}{19}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := \,-\,102 + 246h, y := 90 - 217h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := -102 + 246h, \qquad y := 217h - 90 \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Esercizio 7.15

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$21\,681\,x - 6\,935\,y = 1\,241\,.$$

Soluzione – Studiamo in primo luogo l’equazione diofantina

$$21\,681\,x + 6\,935\,y = 1\,241\,.$$

Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $21\,681$ e $6\,935$.

$$21\,681 = 6\,935 \cdot 3 + 876\,; \quad 6\,935 = 876 \cdot 7 + 803\,; \quad 876 = 803 \cdot 1 + 73\,; \quad 803 = 73 \cdot 11\,.$$

Il massimo comun divisore fra $21\,681$ e $6\,935$ è dunque 73; poiché si tratta di un divisore di $1\,241$ ($= 73 \cdot 17$), l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$21\,681\,x + 6\,935\,y = 73\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$73 = 876 - 803 = 876 - (6\,935 - 7 \cdot 876) = 8 \cdot 876 - 6\,935 =$$

$$= 8 \cdot (21\,681 - 3 \cdot 6\,935) - 6\,935 = 8 \cdot 21\,681 - 25 \cdot 6\,935\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $21\,681\,x + 6\,935\,y = 73$ è $(8, -25)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $21\,681\,x + 6\,935\,y = 1\,241$ è $(136, -425)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := 136 + \tfrac{6\,935}{73}h, \qquad y := -425 - \tfrac{21\,681}{73}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{)}$$

ossia

$$x := 136 + 95h, \qquad y := -425 - 297h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := 136 + 95h, \qquad y := 425 + 297h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}\text{).}$$

Esercizio 7.16

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$3\,014\,x - 1\,233\,y = 1\,366\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,014$ e $1\,233$.

$$3\,014 = 1\,233 \cdot 2 + 548\,; \qquad 1\,233 = 548 \cdot 2 + 137\,; \qquad 548 = 137 \cdot 4\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,014$ e $1\,233$ è dunque 137; poiché 137 non divide $1\,366$, l'equazione proposta non ha soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.17

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$3\,403\,x + 1\,577\,y + 1\,079 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,403$ e $1\,577$.

$$3\,403 = 1\,577 \cdot 2 + 249\,; \qquad 1\,577 = 249 \cdot 6 + 83\,; \qquad 249 = 83 \cdot 3 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,403$ e $1\,577$ è dunque 83; poiché si tratta di un divisore di $1\,079$ ($= 79 \cdot 13$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$3\,403\,x + 1\,577\,y = 1\,079\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$79 = 1\,577 - 6 \cdot 249 = 1\,577 - 6 \cdot (3\,403 - 2 \cdot 1\,577) = 13 \cdot 1\,577 - 6 \cdot 3\,403\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $3\,403\,x + 1\,577\,y = 1\,079$ è $(-78, 169)$. La generica soluzione è

$$x := -78 + \tfrac{1\,577}{83} h,\ y := 169 - \tfrac{3\,403}{83} h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -78 + 19h, \quad y := 169 - 41h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Poiché l'equazione proposta si può scrivere come

$$3\,403\,x + 1\,577\,y = -1\,079\,.$$

la sua generica soluzione è

$$x := 78 - 19h, \qquad y := 41h - 169 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.18

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$11\,165\,x + 123\,613\,y + 14 = 0\,.$$

Soluzione – L'equazione proposta si può scrivere come

$$-11\,165\,x - 123\,613\,y = 14\,.$$

Studiamo in primo luogo l'equazione diofantina

$$11\,165\,x + 123\,613\,y = 14\,.$$

Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $123\,613$ e $11\,165$.

$123\,613 = 11\,165 \cdot 11 + 798\,;\ \ 11\,165 = 798 \cdot 13 + 791\,;\ \ 798 = 791 \cdot 1 + 7\,;\ \ 791 = 7 \cdot 113\,.$

Il massimo comun divisore fra $123\,613$ e $11\,165$ è dunque 7; poiché si tratta di un divisore di 14 ($= 7 \cdot 2$), l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$11\,165\,x + 123\,613\,y = 7\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$7 = 798 - 791 = 798 - (11\,165 - 13 \cdot 798) = 14 \cdot 798 - 11\,165 =$$

$$= 14 \cdot (123\,613 - 11 \cdot 11\,165) - 11\,165 = 14 \cdot 123\,613 - 155 \cdot 11\,165\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $11\,165\,x + 123\,613\,y = 7$ è $(-155, 14)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $11\,165\,x + 123\,613\,y = 14$ è $(-310, 28)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := -310 + \tfrac{123\,613}{7}h, \qquad y := 28 - \tfrac{11\,165}{7}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -310 + 17\,695h, \qquad y := 28 - 1\,595h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := 310 - 17\,695h, \qquad y := 1\,595h - 28 \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.19

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$4\,991\,x - 5\,658\,y = 138\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $5\,658$ e $4\,991$.

$5\,658 = 4\,991 \cdot 1 + 667\,;\ \ 4\,991 = 667 \cdot 7 + 322\,;\ \ 667 = 322 \cdot 2 + 23\,;\ \ 322 = 23 \cdot 14\,.$

Il massimo comun divisore fra $5\,658$ e $4\,991$ è dunque 23; poiché si tratta di un divisore di 138 ($= 6 \cdot 23$), l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$4\,991\,x + 5\,658\,y = 23\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$23 = 667 - 2 \cdot 322 = 667 - 2 \cdot (4\,991 - 7 \cdot 667) = 15 \cdot 667 - 2 \cdot 4\,991 =$$

$$= 15 \cdot (5\,658 - 4\,991) - 2 \cdot 4\,991 = 15 \cdot 5\,658 - 17 \cdot 4\,991\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $4\,991\,x + 5\,658\,y = 23$ è $(-17, 15)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $4\,991\,x + 5\,658\,y = 138$ è $(-102, 90)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := -102 + \tfrac{5\,658}{23} h, \qquad y := 90 - \tfrac{4\,991}{23} h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -102 + 246h, y := 90 - 217h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := -102 + 246h, \qquad y := 217h - 90 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.20

Nella *sylicon valley* del piccolo stato del Calisota, la principale industria locale ha prodotto in esclusiva nel 2015 diversi esemplari degli elaboratori HAL01B e HAL02B. Per la produzione di ogni elaboratore del primo tipo sono necessari 215 microcircuiti circuiti integrati del tipo MB314, mentre per la produzione di ogni elaboratore del secondo tipo ne servono 107.

Sapendo che complessivamente nel 2015 per la produzione di tali elaboratori la citata industria ha utilizzato 30 378 microcircuiti integrati del tipo MB314, è possibile dire quanti elaboratori dei due tipi essa ha prodotto (nel 2015)?

Soluzione – Sia x il numero di elaboratori HAL01B prodotti nel 2015, e sia y il numero di elaboratori HAL02B prodotto nel 2015. In base ai dati del problema, deve essere

$$215x + 107y = 30\,378\,.$$

Cerchiamo le eventuali soluzioni intere di questa equazione diofantina; ci preoccuperemo poi di vedere quali di esse sono accettabili per il nostro problema (ossia per quali di esse né x né y assumono valori negativi).

Calcoliamo il massimo comun divisore tra 215 e 107. Essendo

$$215 = 2 \cdot 107 + 1$$

tale massimo comun divisore è 1 e una soluzione dell'equazione diofantina $215x + 107y = 1$ è $x := 1$, $y := -2$. Pertanto una soluzione dell'equazione diofantina considerata sopra è $x := 30\,378$, $y := -60\,756$; la generica soluzione è

$$x := 30\,378 - 107h, \;\; y := 215h - 60\,756\,.$$

Affinché la x assuma valore positivo, deve essere $h \leq \frac{30\,378}{107}$, ossia $h \leq 283$ (ricordando che h può assumere soltanto valori interi). Affinché la y assuma valore positivo, deve essere $h \geq \frac{60\,756}{215}$, ossia $h \geq 283$. Dunque l'unica soluzione dell'equazione considerata per la quale sia x che y sono entrambi positivi si ha per $h := 283$: in essa, $x = 97$ e $y = 89$.

Dunque sono stati prodotti 97 elaboratori del tipo HAL01B e 89 elaboratori del tipo HAL02B.

Esercizio 7.21

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$23\,463\,x - 7505\,y = 1\,343\,.$$

Soluzione – Studiamo in primo luogo l’equazione diofantina

$$23\,463\,x + 7\,505\,y = 1\,343\,.$$

Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $23\,463$ e $7\,505$.

$$23\,463 = 7\,505 \cdot 3 + 948\,; \quad 7\,505 = 948 \cdot 7 + 869\,; \quad 948 = 869 \cdot 1 + 79\,; \quad 869 = 79 \cdot 11\,.$$

Il massimo comun divisore fra $23\,463$ e $7\,505$ è dunque 79; poiché si tratta di un divisore di $1\,343$ ($= 79 \cdot 17$), l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$23\,463\,x + 7\,505\,y = 79\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$79 = 948 - 869 = 948 - (7\,505 - 7 \cdot 948) = 8 \cdot 948 - 7\,505 =$$

$$= 8 \cdot (23\,463 - 3 \cdot 7\,505) - 7\,505 = 8 \cdot 23\,463 - 25 \cdot 7\,505\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $23\,463\,x + 7\,505\,y = 79$ è $(8, -25)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $23\,463\,x + 7\,505\,y = 1\,343$ è $(136, -425)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := 136 + \tfrac{7\,505}{79}h, \qquad y := -425 - \tfrac{23\,463}{79}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := 136 + 95h, \qquad y := -425 - 297h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := 136 + 95h, \qquad y := 425 + 297h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.22

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$3\,562\,x - 959\,y = 1\,378\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,562$ e 959.

$$3\,562 = 959 \cdot 3 + 685\,; \quad 959 = 685 \cdot 1 + 274\,; \quad 685 = 274 \cdot 2 + 137\,; \quad 274 = 137 \cdot 2\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,562$ e 959 è dunque 137; poiché 137 non divide $1\,378$, l’equazione proposta non ha soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.23

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$3\,649\,x + 1\,691\,y + 1\,157 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,649$ e $1\,691$.

$$3\,649 = 1\,691 \cdot 2 + 267\,; \qquad 1\,691 = 267 \cdot 6 + 89\,; \qquad 267 = 89 \cdot 3 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,649$ e $1\,691$ è dunque 89; poiché si tratta di un divisore di $1\,157$ ($= 89 \cdot 13$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$3\,649\,x + 1\,691\,y = 1\,157\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$89 = 1\,691 - 6 \cdot 267 = 1\,691 - 6 \cdot (3\,649 - 2 \cdot 1\,691) = 13 \cdot 1\,691 - 6 \cdot 3\,649\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $3\,649\,x + 1\,691\,y = 1\,157$ è $(-78, 169)$. La generica soluzione è

$$x := -78 + \tfrac{1\,691}{89}h,\ y := 169 - \tfrac{3\,649}{89}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -78 + 19h, \quad y := 169 - 41h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Poiché l'equazione proposta si può scrivere come

$$3\,649\,x + 1\,691\,y = -1\,157\,.$$

la sua generica soluzione è

$$x := 78 - 19h, \qquad y := 41h - 169 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.24

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$6\,293\,x - 7\,134\,y = 174\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $7\,134$ e $6\,293$.

$$7\,134 = 6\,293 \cdot 1 + 841\,; \quad 6\,293 = 841 \cdot 7 + 406\,; \quad 841 = 406 \cdot 2 + 29\,; \quad 406 = 29 \cdot 14\,.$$

Il massimo comun divisore fra $7\,134$ e $6\,293$ è dunque 29; poiché si tratta di un divisore di 174 ($= 6 \cdot 29$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$6\,293\,x + 7\,134\,y = 29\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$29 = 841 - 2 \cdot 406 = 841 - 2 \cdot (6\,293 - 7 \cdot 841) = 15 \cdot 841 - 2 \cdot 6\,293 =$$
$$= 15 \cdot (7\,134 - 6\,293) - 2 \cdot 6\,293 = 15 \cdot 7\,134 - 17 \cdot 6\,293\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $6\,293\,x + 7\,134\,y = 17$ è $(-17, 15)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $6\,293\,x + 7\,134\,y = 174$ è $(-102, 90)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := -102 + \tfrac{7\,134}{29} h, \qquad y := 90 - \tfrac{6\,293}{29} h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -102 + 246h, y := 90 - 217h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := -102 + 246h, \qquad y := 217h - 90 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.25

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$3\,425\,x - 959\,y = 1\,385\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,425$ e 959.

$$3\,425 = 959 \cdot 3 + 548\,; \quad 959 = 548 \cdot 1 + 411\,; \quad 548 = 411 \cdot 1 + 137\,; \quad 411 = 137 \cdot 3\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,425$ e 959 è dunque 137; poiché 137 non divide $1\,385$, l’equazione proposta non ha soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.26

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$3\,977\,x + 1\,843\,y + 1\,261 = 0\,.$$

Soluzione – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $3\,977$ e $1\,843$.

$$3\,977 = 1\,843 \cdot 2 + 291\,; \qquad 1\,843 = 291 \cdot 6 + 97\,; \qquad 291 = 97 \cdot 3 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra $3\,977$ e $1\,843$ è dunque 97; poiché si tratta di un divisore di $1\,261$ $(= 97 \cdot 13)$, l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$3\,977\,x + 1\,843\,y = 1\,261\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$97 = 1\,843 - 6 \cdot 291 = 1\,843 - 6 \cdot (3\,977 - 2 \cdot 1\,843) = 13 \cdot 1\,843 - 6 \cdot 3\,977\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $3\,977\,x + 1\,843\,y = 1\,261$ è $(\,-78, 169)$. La generica soluzione è

$$x := \,-78 + \tfrac{1\,843}{97}h, \quad y := 169 - \tfrac{3\,977}{97}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := \,-78 + 19h, \qquad y := 169 - 41h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Poiché l'equazione proposta si può scrivere come

$$3\,977\,x + 1\,843\,y = \,-1\,261\,.$$

la sua generica soluzione è

$$x := 78 - 19h, \qquad y := 41h - 169 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.27

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell’equazione

$$9\,475\,x + 67\,115\,y + 10 = 0\,.$$

Soluzione – L’equazione proposta si può scrivere come $-9\,475\,x - 67\,115\,y = 10\,.$

Studiamo in primo luogo l’equazione diofantina

$$9\,475\,x + 67\,115\,y = 10\,.$$

Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $67\,115$ e $9\,475$.

$$67\,115 = 9\,475 \cdot 7 + 790\,; \quad 9\,475 = 790 \cdot 11 + 785\,; \quad 790 = 785 \cdot 1 + 5\,; \quad 785 = 5 \cdot 157\,.$$

Il massimo comun divisore fra $67\,115$ e $9\,475$ è dunque 5; poiché si tratta di un divisore di 10 $(\,= 5 \cdot 2)$, l’equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l’equazione

$$9\,475\,x + 67\,115 = 5\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$5 = 790 - 785 = 790 - (9\,475 - 11 \cdot 790) = 12 \cdot 790 - 9\,475 =$$

$$= 12 \cdot (67\,115 - 7 \cdot 9\,475) - 9\,475 = 12 \cdot 67\,115 - 85 \cdot 9\,475\,.$$

Dunque una soluzione dell’equazione $9\,475\,x + 67\,115\,y = 5$ è $(\,-85, 12)$. Di conseguenza una soluzione dell’equazione $9\,475\,x + 67\,115\,y = 10$ è $(\,-170, 24)$; la generica soluzione di quest’ultima equazione è

$$x := \,-170 + \tfrac{67\,115}{5}h, \qquad y := 24 - \tfrac{9\,475}{5}h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := \,-170 + 13\,423h, \qquad y := 90 - 1\,895h \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell’equazione proposta è

$$x := 170 - 13\,423h, \qquad y := 1\,895h - 90 \quad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Esercizio 7.28

Si trovino tutte le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$4\,317\,x + 22\,125\,y + 6 = 0\,.$$

Soluzione – L'equazione proposta si può scrivere come

$$-\,4\,317\,x - 22\,125\,y = 6\,.$$

Studiamo in primo luogo l'equazione diofantina

$$4\,317\,x + 22\,125\,y = 6\,.$$

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra $22\,125$ e $4\,317$.

$$22\,125 = 4\,317 \cdot 5 + 540\,; \quad 4\,317 = 540 \cdot 7 + 537\,; \quad 540 = 537 \cdot 1 + 3\,; \quad 537 = 3 \cdot 179\,.$$

Il massimo comun divisore fra $22\,125$ e $4\,317$ è dunque 3; poiché si tratta di un divisore di 6 ($= 3 \cdot 2$), l'equazione proposta ha soluzione.

Cerchiamo adesso una soluzione per l'equazione

$$4\,317\,x + 22\,125\,y = 3\,.$$

Dai calcoli fatti per trovare il massimo comun divisore, abbiamo che

$$3 = 540 - 537 = 540 - (4\,317 - 7 \cdot 540) = 8 \cdot 540 - 4\,317 =$$

$$= 8 \cdot (22\,125 - 5 \cdot 4\,317) - 4\,317 = 8 \cdot 22\,125 - 41 \cdot 4\,317\,.$$

Dunque una soluzione dell'equazione $4\,317\,x + 22\,125\,y = 3$ è $(-\,41, 8)$. Di conseguenza una soluzione dell'equazione $4\,317\,x + 22\,125\,y = 6$ è $(-\,82, 16)$; la generica soluzione di quest'ultima equazione è

$$x := -\,82 + \tfrac{22\,125}{3} h, \qquad y := 16 - \tfrac{4\,317}{3} h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

ossia

$$x := -\,82 + 7\,375h, \qquad y := 16 - 1\,439h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$

Pertanto la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 82 - 7375h, \qquad y := 1\,439h - 16 \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z}).$$