Appunti di gravitazione

Franco Bagnoli

11 dicembre 2019

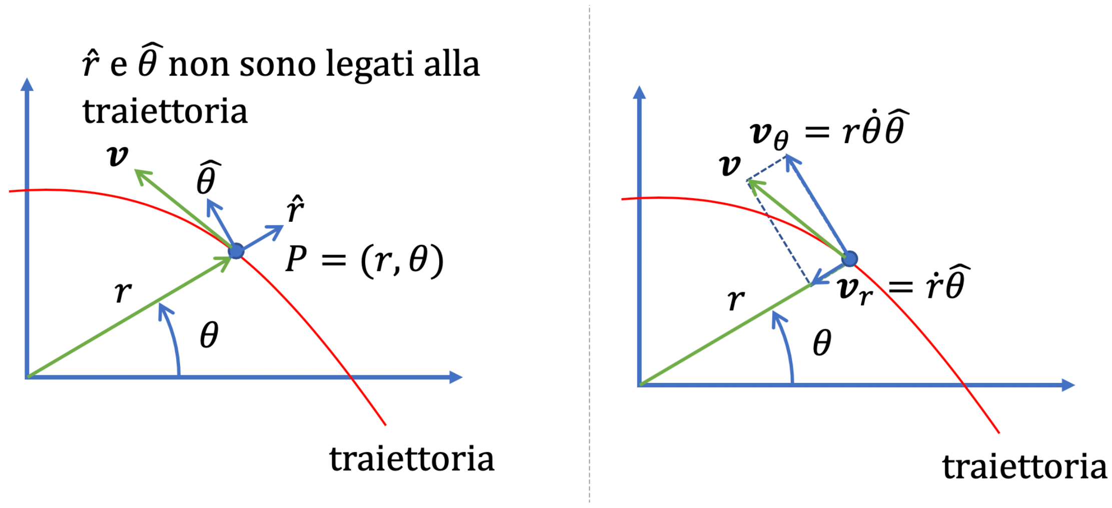

Figura 1: Versori

Leggi di Keplero:

1. Le orbite dei pianeti sono ellissi con il Sole in uno dei fuochi/
2. La velocità areaolare dei pianeti è costante.
3. Chimando T il periodo di rivoluzione e a il semiasse maggiore dell'orbita, $T^2/a^3 = \text{cost}$, con la costante che dipende dalla massa del Sole.

L'idea è di ottenere tali leggi dalle leggi di Newton e dall'espressione dell'interazione gravitazionale secondo la forza

$$F = -\frac{GMm}{r^2},$$

o, equivalentemente, dall'espressione del potenziale gravitazionale

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

0.1 Seconda legge

La seconda legge di Keplero in realtà non dipende dalla forma della forza, ma solo dal fatto che è centrale. Possiamo introdurre le coordinate polari, in cui $\hat{\boldsymbol{r}}$ è il versore diretto come $\boldsymbol{r}$, e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ quello perpendicolare (tangente alla circonferenza di raggio r).

La velocità $\boldsymbol{v}$ ha una componente radiale $\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}$ e una trasversale Fig. !1).

Il momento angolare della Terra con polo nel Sole è $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$. Inserendo le componenti della velocità si ha

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + \dot{\theta}r\hat{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\theta}r^2(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Dato che la variazione temporale del momento angolare è data dal momento delle forze, e questo è zero, abbiamo che la velocità angolare $\dot{\theta}r^2 = \omega r^2$ è costante.

Inoltre, sempre per il fatto che la forza è centrale, abbiamo che le orbite stanno su un piano.

0.2 Ellissi in coordinate polari

Prima di andare avanti conviene ottenere l'espressione di una ellissi in coordinate polari. Definiamo con a il semiasse maggiore, con b quello minore, e con c la distanza tra fuochi e centri dell'ellisse (Fig. 2).

L'ellisse è il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze dai fuochi è costante. Si vede subito che questa costante vale $2a$, e che quindi

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

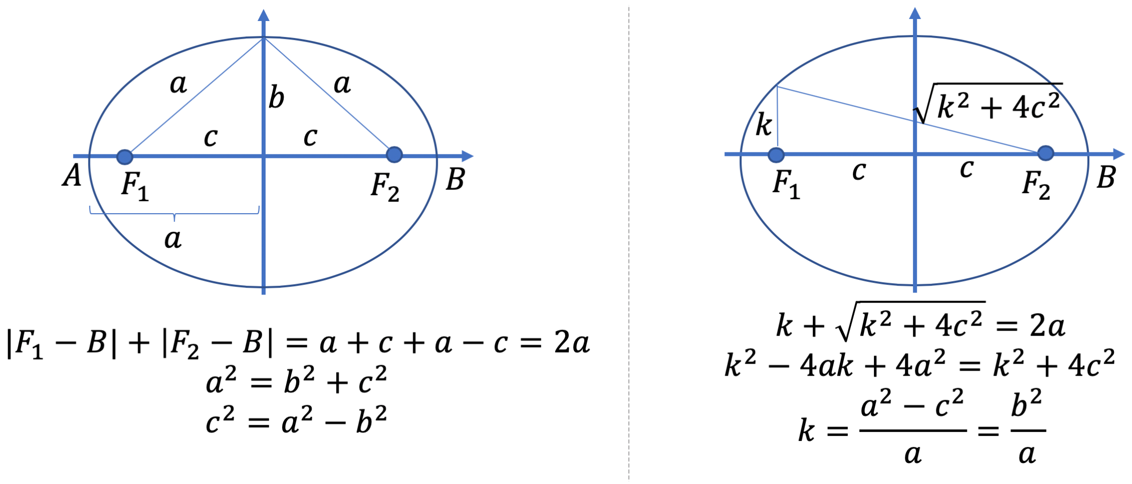

Figura 2: Ellisse

Scrivendo la formula delle distanze, con un po' di conti, si ottiene l'equazione standard

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(X-c)^2 + Y^2} + \sqrt{(X+c)^2 + Y^2} = 2a \\
&\sqrt{X^2 + Y^2 + c^2 - 2Xc} + \sqrt{X^2 + Y^2 + c^2 + 2Xc} = 2a \\
&X^2 + Y^2 + c^2 - \cancel{2Xc} + X^2 + Y^2 + c^2 + \cancel{2Xc} + 2\sqrt{(X^2 + Y^2 + c^2)^2 - 4X^2c^2} = 4a^2 \\
&\sqrt{(X^2 + Y^2 + c^2)^2 - 4X^2c^2} = 2a^2 - X^2 - Y^2 - c^2 \\
&\sqrt{(X^2 + Y^2 + c^2)^2 - 4X^2c^2} = a^2 + b^2 - X^2 - Y^2 \\
&(X^2 + Y^2 + c^2)^2 - 4X^2c^2 + (X^2 + Y^2 - a^2 - b^2)^2 = 0 \\
&(X^2 + Y^2 - b^2 + a^2)^2 + (X^2 + Y^2 - b^2 + a^2)^2 = 4X^2(a^2 - b^2) \\
&\cancel{4}(X^2 + Y^2 - b^2)a^2 = \cancel{4}X^2(a^2 - b^2) \\
&\cancel{X^2a^2} + Y^2a^2 - a^2b^2 = \cancel{X^2a^2} - X^2b^2v \\
&X^2b^2 + Y^2a^2 = a^2b^2 \\
&\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}
$$

Adesso trasliamo l'asse delle ascisse: $x = X + c$, $y = Y$, e poi sostituiamo $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. L'equazione dell'ellissi diventa

$$
\begin{aligned}
&X^2b^2 + Y^2a^2 = a^2b^2 \\
&(x-c)^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \\
&b^2r^2\cos^2(\theta) + b^2c^2 - 2b^2cr\cos(\theta) + a^2r^2\sin^2(\theta) = a^2b^2 \\
&b^2r^2\cos^2(\theta) + b^2(a^2 - b^2) - 2b^2cr\cos(\theta) + a^2r^2(1 - \cos^2(\theta)) = a^2b^2 \\
&(b^2 - a^2)r^2\cos^2(\theta) - 2b^2cr\cos(\theta) + a^2r^2 = b^4 \\
&c^2r^2\cos^2(\theta) + 2b^2cr\cos(\theta) + b^4 = a^2r^2 \\
&(cr\cos(\theta) + b^2)^2 = a^2r^2 \\
&cr\cos(\theta) + b^2 = ar \\
&r(a - c\cos(\theta) = b^2 \\
&r = \frac{k^2}{1 - e\cos(\theta)}
\end{aligned}
$$

con k semilato retto,

$$k = \frac{b^2}{a}$$

ed e eccentricità

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{k}{a}}.$$

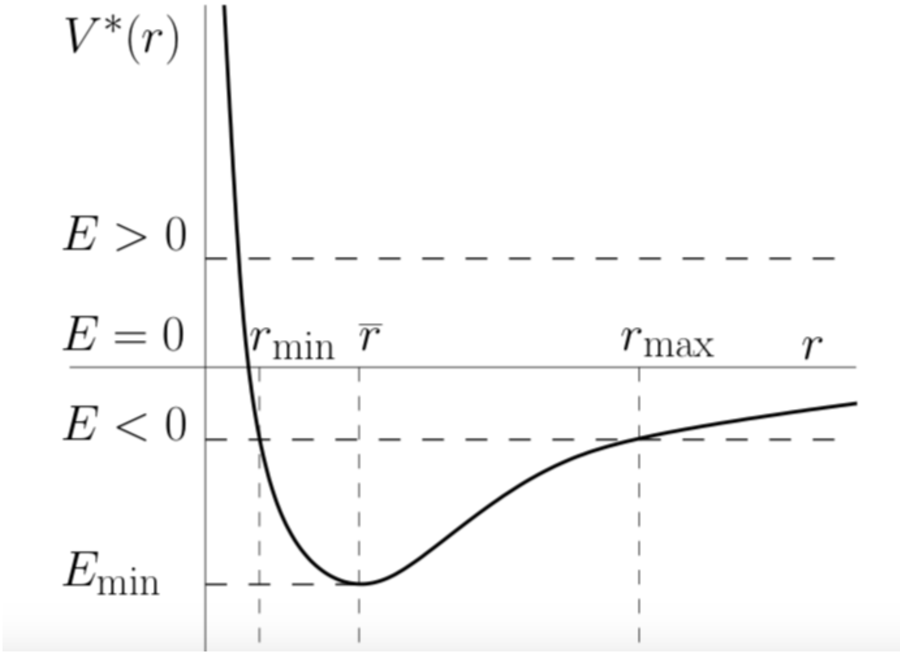

Figura 3: Potenziale efficace

0.3 Gravitazione

Vogliamo derivare la forma dell'ellissi dalla legge di Newton, o meglio dall'energia E e dal momento angolare L

$$
\begin{aligned}
&E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} \\
&L = mvr = mr^2\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

Possiamo intanto sostituire $\dot{\theta}$ nella formula di E

$$
E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r)
$$

dove abbiamo introdotto il potenziale efficace (gravitazionale + centrifugo) $V(r)$ (Fig. 3). Per come abbiamo definito lo zero dell'energia, gli stati legati (orbite ellittiche) corrispondono a $E < 0$.

Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{L}{mr^2} \\
\dot{r}^2 &= -\frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r} + \frac{2E}{m}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Prima di andare avanti conviene derivare una equazione differenziale per l'ellisse, così poi da identificare i termini. Da

$$
r(\theta) = \frac{k}{1 - e\cos(\theta)}
$$

si vede che conviene lavorare con $u = 1/r$

$$
u(\theta) = \frac{1}{k}(1 - e\cos(\theta))
$$

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \frac{e}{k}\sin(\theta)
$$

e quindi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= \frac{e^2}{k^2}\sin^2(\theta)\\ &= \frac{e^2}{k^2}(1-\cos^2(\theta))\\ &= \frac{e^2}{k^2}-\left(\frac{1}{k}-u\right)^2\\ &= -u^2+\frac{2u}{k}+\frac{1}{k^2}(e^2-1)\end{aligned} \tag{2}$$

Otteniamo quindi dalla legge di moto l'equazione per u in funzione di θ. Intanto rimpiazziamo la derivata rispetto al tempo con quella rispetto all'angolo:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{L}{mr^2}$$

e quindi inseriamo u, dato che

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

si ha

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{L}{m}.$$

Sostituendo nella Eq. (1) si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\frac{L^2}{m^2} &= -\frac{L^2}{m^2}u^2+2GMu+\frac{2E}{m}\\ \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= -u^2+\frac{2GMm^2}{L^2}u+\frac{2Em}{L^2}\end{aligned}$$

e confrontandola con l'Eq. (2) otteniamo

$$\begin{aligned}k &= \frac{L^2}{GMm^2}\\ e^2 &= 1+\frac{2E}{m}\left(\frac{L}{G}Mm\right)^2\end{aligned}$$

e dato che $e^2 = 1 - k/a$ si ottiene

$$a = -\frac{GMm}{2E}$$

$(E < 0)$: Il semiasse maggiore dell'ellisse dipende solo dall'energia, il minore anche dal momento angolare:

$$b^2 = -\frac{L^2}{2Em}.$$

0.4 Terza legge di Keplero

Deriviamo la terza legge nel caso di un'orbita circolare per semplicità. Uguagliando forza di gravità e forza centrifuga si ha

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

con $\omega = 2\pi/T$, e quindi

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

0.5 Pesare la Terra

Nel 1797-98 Henry Cavendish, usando una bilancia di torsione, ricavò il valore della costante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2$$

e quindi, dato che

$$mg = \frac{GMm}{R^2}$$

con $R = 6,37 \cdot 10^6]$m raggio della Terra, si ottiene

$$M = \frac{gR^2}{G} = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}.$$

0.6 Velocità cosmiche

La prima velocità cosmica v_1 è la velocità orbitale in orbita bassa (raggio terreste), che possiamo ottenere uguagliando forza centrifuga e forza gravitazionale

$$\frac{GM}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R}$$

da cui sostituendo anche $g = GM/R^2$ si ha

$$v_1 = \sqrt{gR} \simeq 8 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

Il periodo di rotazione si può ottenere dalla terza legge di Keplero usando la massa della Terra

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} = \frac{4\pi^2 R}{g}$$

e

$$T \simeq 5 \cdot 10^3\ \mathrm{s} = 1\mathrm{h}\,24\mathrm{m}.$$

In realtà bisognerebbe considerare anche il moto di rotazione della Terra (per questo si lanciano i satelliti preferibilmente dall'equatore). La velocità tangenziale della Terra è

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} \simeq 460\ \mathrm{m/s}$$

ovvero un 6% della velocità richiesta.

La seconda velocità cosmica v_2 è quella richiesta per lasciare l'attrazione terrestre. Supponendo di uscire dalla sfera di attrazione con velocità nulla, abbiamo dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

e quindi

$$v_2^2 = \frac{2GM}{R} = 2v_i^2$$

$$v_2 \simeq 11.2 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}.$$

La terza velocità cosmica è quella richiesta per allontanarsi dal sistema solare. Il conto qui è delicato, prima di tutto perché dobbiamo considerare la velocità di rivoluzione della Terra (che è molti più grande di quella di rivoluzione) e poi perché non si può semplicemente uguagliare la somma delle energia cinetiche, perché il lancio modifica anche la velocità della Terra (di poco in termini relativi, ma di una quantità rilevante per il satellite. Quindi calcoliamo prima la velocità al momento di abbandonare la sfera di influenza della Terra, e a questa sommiamo poi la velocità della Terra (se lanciamo nella direzione giusta).

La velocità di rivoluzione della Terra v_O è legata al periodo e al raggio $R_O = 1AU = 1.5 \cdot 10^{11}$ m dell'orbita supposta circolare

$$\omega = \frac{v_O}{R_O} = \frac{2\pi}{T_R}$$

dove il periodo T_R è un anno ($365 \cdot 24 \cdot 3600$ s). Inserendo i dati si ottiene

$$v_O \simeq 30 \text{ km/s}.$$

Si può anche sfruttare la terza legge di Keplero, che ci farà comodo dopo

$$v_O^2 = \frac{4\pi^2 R_O^2}{T_R^2} = \frac{GM_S}{R_O}.$$

Scrivendo la conservazione dell'energia rispetto alla Terra fino ad uscire (con velocità v_H) dalla sfera di influenza della Terra si ha

$$\frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_H^2$$

ovvero

$$v_H^2 = v_3^2 - \frac{GM}{R} = v_3^2 - v_2^2$$

A questo punto, supponendo di essere ancora sull'orbita della Terra, si può fare il conto sommando la velocità di rotazione terrestre

$$\frac{1}{2}m(v_H + v_O)^2 - \frac{GM_S m}{R_O} = 0$$

e quindi

$$(v_H + v_O)^2 = 2\frac{GM_S}{R_O} = 2v_O^2$$

da cui

$$v_H = (\sqrt{2} - 1)v_O$$

$$v_H^2 = v_3^2 - v_2^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 v_O^2$$

e finalmente

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 v_O^2} \simeq 16.7 \text{ km/s}.$$

0.6.1 Metodo alternativo

La seconda velocità cosmica per il Sole, partendo da un'orbita come quella terrestre è

$$v_S = \sqrt{\frac{2GM_S}{R}} \simeq 4.2 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Se però lanciamo in maniera furba, possiamo in parte usare la velocità di rivoluzione della Terra $v_O \simeq 3 \cdot 10^4$ m/s, e quindi rimane una velocità

$$v_\infty = v_S - v_0 = (\sqrt{2} - 1)v_0 \simeq 1.2 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Quindi bisogna ripetere il calcolo della seconda velocità cosmica in modo che il razzo lanciato dalla Terra abbia, lontano dalla Terra, la velocità v_∞

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

ottenendo

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 v_0^2} \simeq 16.7 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Si noti che per andare sul Sole (o vicino, tipo Mercurio) bisogna annullare la velocità tangenziale della Terra, che è più alta della velocità di fuga dal Sistema Solare!!

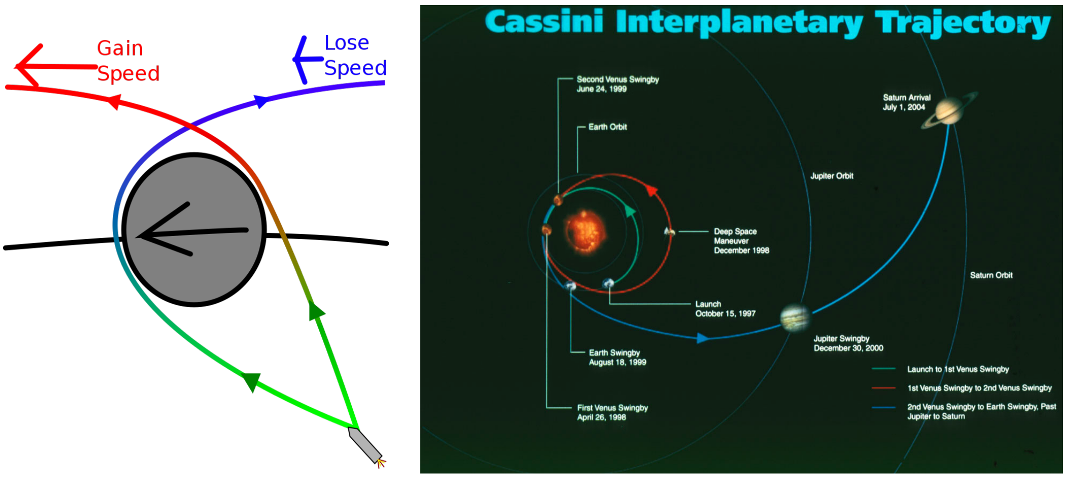

Figura 4: Gravity assist

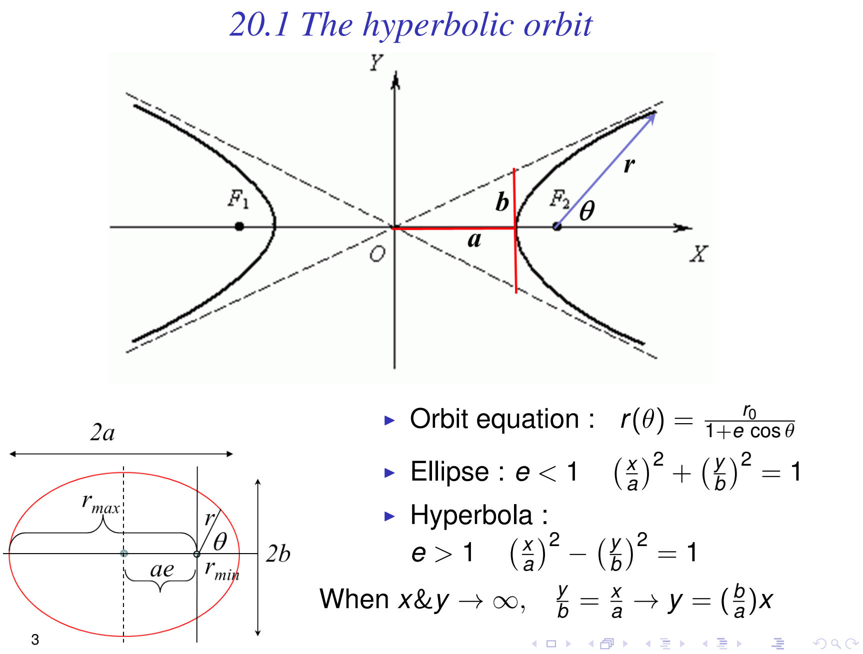

Figura 5: Hyperbolic trajectory

0.7 Raggio di un buco nero

La seconda velocità cosmica è

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

se adesso per v_2 sostituiamo $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s, otteniamo il raggio di un buco nero

$$R_B = \frac{2GM}{c^2}$$

che è detto raggio di Schwarzschild. Per la massa del Sole $M_s \simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg, otteniamo $R_B \simeq 3000$ m (da confrontare con il raggio attuale del Sole $R_S \simeq 7 \cdot 10^8$ m.

0.8 Gravity assist

Per risparmiare carburante si usa spesso il gravity assist, che consiste nel passare “dietro” ad un pianeta per essere “trascinato” e quindi accelerato (Fig. 4)).

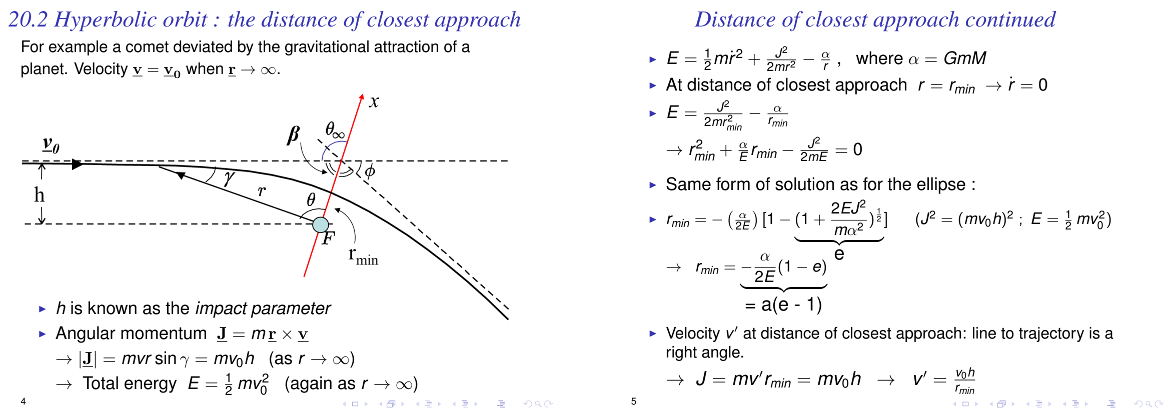

Figura 6: Clostest approach

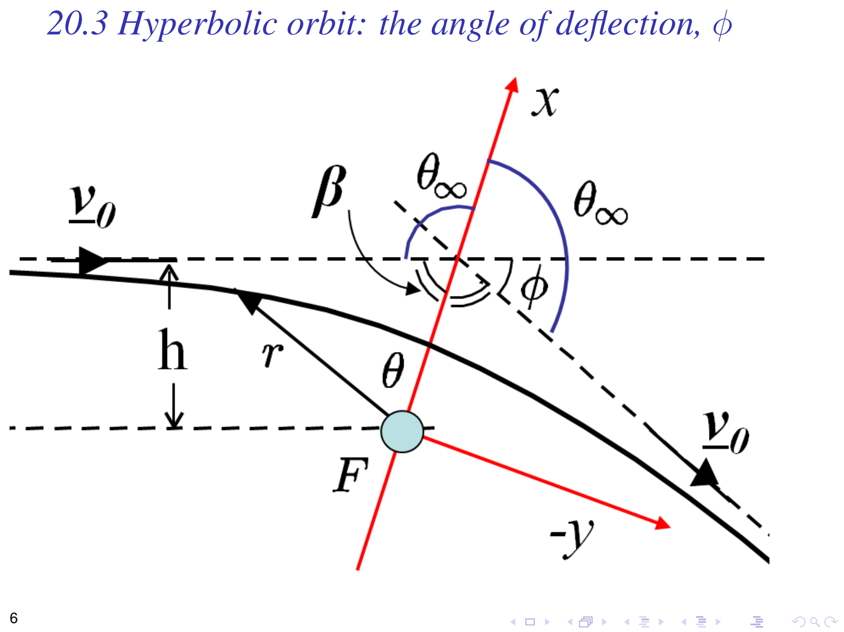

Figura 7: Angle of deflection

Si capisce cosa succede ponendosi nel sistema di riferimento del pianeta (Fig. 4). La traiettoria questa volta è una iperbole ($E > 0$) con il pianeta in uno dei fuochi. In coordinate polari l'iperbole ha la stessa equazione dell'ellisse, ma con eccentricità maggiore di uno (Fig. 5).

La distanza minima dipende dal parametro di collisione h e dalla massa e velocità (ovvero quantità di moto ed energia) del corpo (Fig. 6). Da qui si può calcolare anche l'angolo di deviazione ϕ (Fig. 7).

A questo punto si può tornare nel sistema di riferimento "fisso", sottraendo la velocità del pianeta. Quello che succede per esempio per un corpo che si avvicina al pianeta perpendicolarmente alla sua traiettoria, passandogli "dietro", è che dopo la collisione il corpo ha una velocità perpendicolare uguale a prima, ma in più ha una velocità diretta come quella del pianeta che ora è maggiore di zero, quindi è stato accelerato.

Inoltre, se si accendono i motori nel punto di minima distanza (ovvero di massima velocità v), si ha che l'energia cinetica diventa

$$K = \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2$$

quindi per un dato Δv (che dipende da quando carburante brucio e dalla massa della sonda) ho un incremento di energia cinetica

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(2v\Delta v + \Delta v^2)$$

quindi "guadagno" il doppio prodotto.

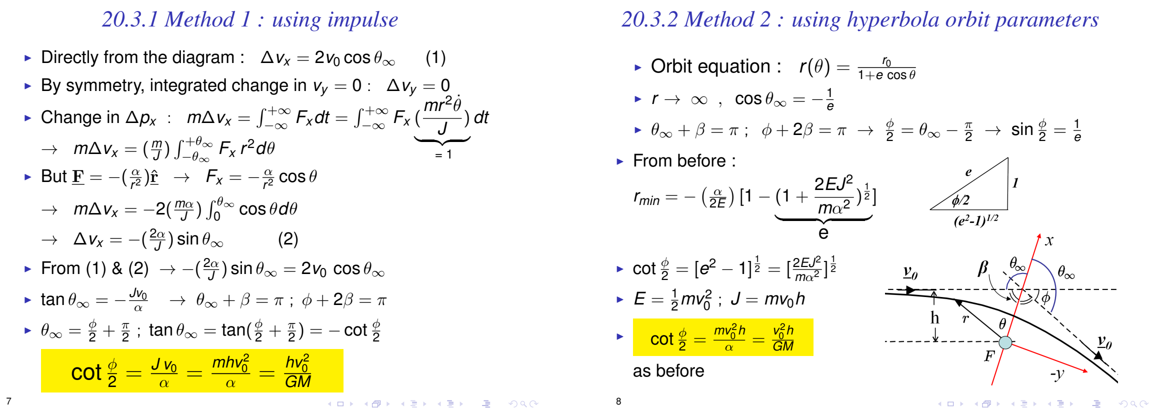

Figura 8: Angle of deflection

Da qui risulta che "conviene" (per quanto riguarda l'energia) passare più vicino possibile al pianeta, ma ovviamente non posso avvicinarmi più del suo raggio (compresa l'eventuale atmosfera). Ovviamente i migliori corpi per fare un gravity assist sono i buchi neri (leggere "La fisica di Interstellar" di Kip Thorpe).