Marco Barlotti

Appunti sulle

Costruzioni piegando la carta

per l'insegnamento di "Complementi di Algebra"
per la laurea magistrale in Matematica

Vers. 0.5
Anno Accademico 2019-2020

PERCHE' QUESTI APPUNTI, E COME USARLI

(Prefazione alla vers. 0.5)

Questi appunti raccolgono senza organicità due costruzioni col piegamento della carta: la prima produce un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$ e la seconda permette di trisecare qualunque angolo acuto.

È una versione assai provvisoria, che certamente contiene molti refusi per i quali mi scuso fin da ora con chi la utilizzerà.

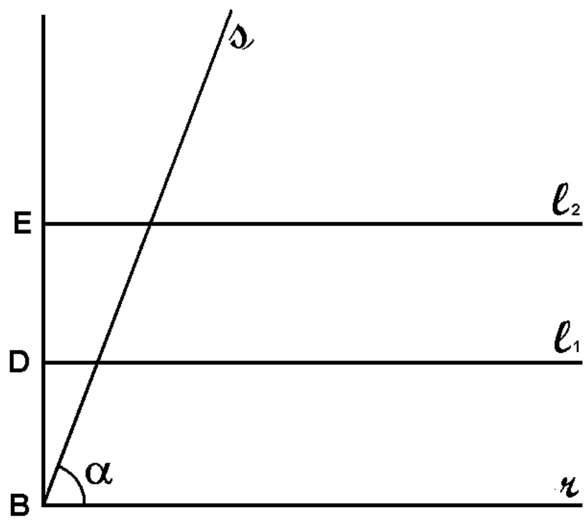
Firenze, 11.12.2019

Marco Barlotti

1.1 - La trisezione dell'angolo.

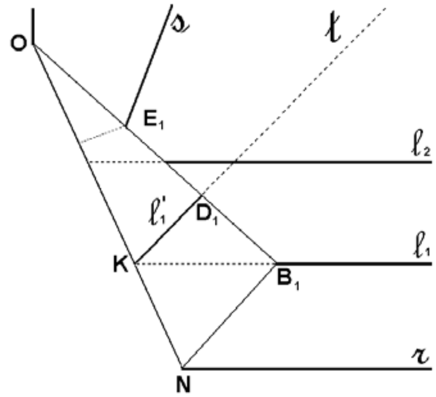
Mostriamo (e giustifichiamo) un semplice procedimento (attribuito a H. Abe) per trisecare un angolo acuto. Osserviamo subito che il requisito che l'angolo sia acuto non è una effettiva limitazione, perché ogni angolo ottuso è il doppio di un angolo acuto (e ogni angolo concavo è il doppio di un angolo ottuso), e sono ben noti i procedimenti per bisecare e raddoppiare un angolo.

Sia α l'angolo da trisecare, individuato da due semirette r e s che hanno in comune l'origine B. Supporremo che il segmento iniziale del primo lato dell'angolo coincida con un lato di un foglio di carta rettangolare (del quale dunque B è un vertice). "Prepariamo" il nostro foglio di carta effettuando due pieghe parallele alla semiretta r equidistanti fra loro e dalla retta di r: ciò significa che i punti B, D, E in cui il primo lato del foglio e le due pieghe effettuate incontrano l'altro lato del foglio passante per B sono tali che BD = BE, come nella figura:



Pieghiamo il foglio lungo una retta ON scelta in modo che la piegatura porti il punto B sulla retta ℓ_1 (indichiamo con B_1 l'immagine di B per effetto della piegatura) e porti anche il punto E sul secondo lato dell'angolo da trisecare (cioè sulla semiretta s; indichiamo con E_1 l'immagine di E per effetto della piegatura). Nel seguito indicheremo con σ la simmetria assiale (di asse ON) indotta da questa piegatura.

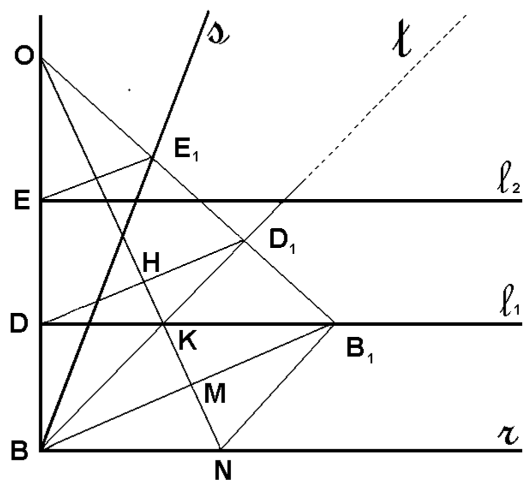
Sia $K = ON \cap \ell_1$ il punto in cui la piega incontra la retta ℓ_1.



Pieghiamo ancora il foglio lungo l'immagine (che nel disegno è indicata con ℓ_1') della retta ℓ_1 per effetto della piegatura: si ottiene la semiretta (di origine K) che nel disegno è indicata con t. Riapriamo l'ultima piega e pieghiamo adesso lungo la retta KB_1 (in modo da evidenziare, una volta riaperto completamente il foglio, il segmento KB). Riapriamo infine tutte le pieghe. Vogliamo dimostrare che:

(i) i punti B, K, D_1 sono allineati sulla retta di t;

(ii) la semiretta BK divide l'angolo α in due angoli E_1BK e KBN tali che $E_1BK = \frac{1}{2}KBN$ e quindi E_1BK è un terzo dell'angolo α.



Per provare la (i), osserviamo che σ porta B in B_1, D in D_1 e lascia fermi H e K: dunque σ porta l'angolo BKD nell'angolo B_1KD_1 e porta l'angolo DKH nell'angolo D_1KH, cosicché

$$BKD_1 = BKD + DKD_1 = B_1KD_1 + DKD_1 = DKB_1 = \mathit{angolo\,piatto}$$

e dunque i punti B, K, D_1 sono allineati, come si voleva dimostrare.

Per provare la (ii), osserviamo che σ porta D in D_1 e lascia fermo K: poiché (per costruzione) la retta KD è ortogonale alla retta OB, ne segue che la retta KD_1 è ortogonale alla retta OB_1, cosicché BD_1 è l'altezza del triangolo BB_1E. Inoltre σ porta ED in E_1D_1 e BD in B_1D_1; poiché ED = BD, è anche $E_1D_1 = B_1D_1$, dunque BD_1 è anche mediana del triangolo BB_1E_1. Ne segue che il triangolo BB_1E_1 è isoscele sulla base B_1E_1 e quindi BD_1 è bisettrice dell'angolo al vertice, ossia

$$E_1BD_1 = D_1BB_1 .$$

D'altro lato, $D_1BB_1 = BB_1N$ (perché sono angoli alterni interni rispetto alle parallele KD_1 e NB_1 ([1]) tagliate dalla trasversale BB_1) e $BB_1N = B_1BN$ perché σ porta B in B_1 e lascia fermi M e N.

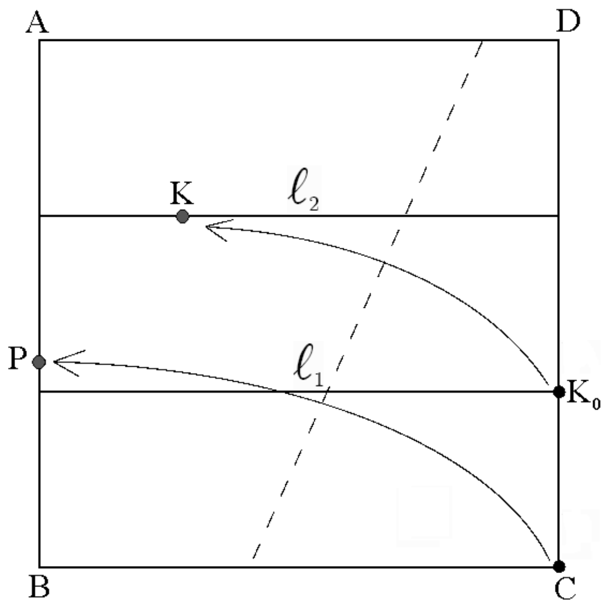
Quindi $E_1BD_1 = D_1BB_1 = B_1BN$ come si voleva dimostrare.

[1] Le rette KD_1 e NB_1 sono parallele perché immagine mediante σ delle rette parallele ℓ_1 e r.

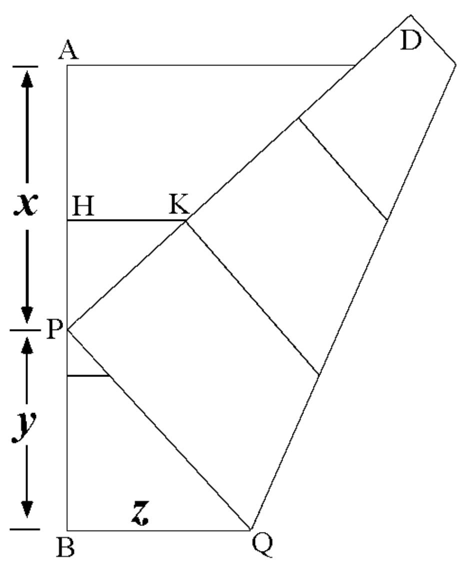
1.2 - La duplicazione del cubo.

Questo procedimento (attribuito a Peter Messer, 1986) determina un punto P_0 su un lato AB del foglio quadrato di carta ABCD in modo che il rapporto tra AP_0 e P_0B sia la radice terza di 2.

"Prepariamo" il nostro foglio quadrato effettuando due pieghe ℓ_1 e ℓ_2 che dividano il lato AB in tre parti uguali. Detto K_0 il punto in cui la piega ℓ_1 più vicina al lato BC incontra il lato CD del foglio, effettuiamo la piega $\overline{\ell}$ che porta C sul lato AB e K_0 sulla piega ℓ_2: siano rispettivamente P e K le immagini di C e K_0 per effetto della piega $\overline{\ell}$. Vogliamo dimostrare che il rapporto tra AP e PB è la radice terza di 2.



Indichiamo con x la lunghezza di AP e con y la lunghezza di PB: dobbiamo provare che $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 2$.



Indichiamo con H il punto in cui la piega ℓ_2 incontra il lato AB e con Q il punto in cui la piega $\overline{\ell}$ incontra il lato BC. Il segmento AH, essendo una delle tre parti in cui è diviso il lato del quadrato, misura $\frac{x+y}{3}$; lo stesso vale per il segmento KP.

Indichiamo con z la lunghezza del segmento BQ. Allora $\mathrm{PQ} = x + y - z$. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo PBQ,

$$y^2 + z^2 = (x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$$

da cui

$$2xz + 2yz = x^2 + 2xy$$

e quindi

$$z = \frac{x^2+2xy}{2(x+y)} .$$

Allora

$$\mathrm{PQ} = x + y - z = x + y - \frac{x^2+2xy}{2(x+y)} = \frac{2(x+y)^2-x^2-2xy}{2(x+y)} = \frac{x^2+2y^2+2xy}{2(x+y)} .$$

Adesso osserviamo che gli angoli HKP e BPQ sono congruenti (perché entrambi complementari dell'angolo HPK), dunque i triangoli rettangoli HPK e QPB sono simili.

Si ha

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{HP}} \quad \text{ossia} \quad \frac{\frac{x^2+2y^2+2xy}{2(x+y)}}{\frac{x^2+2xy}{2(x+y)}} = \frac{\frac{x+y}{3}}{x-\frac{x+y}{3}} \quad \text{cioè} \quad \frac{x^2+2y^2+2xy}{x^2+2xy} = \frac{x+y}{2x-y} .$$

Ciò equivale a

$$(x^2 + 2y^2 + 2xy)(2x - y) = (x^2 + 2xy)(x + y)$$

ovvero

$$2x^3 - x^2y + 4xy^2 - 2y^3 + 4x^2y - 2xy^2 = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2$$

cioè

$$x^3 = 2y^3$$

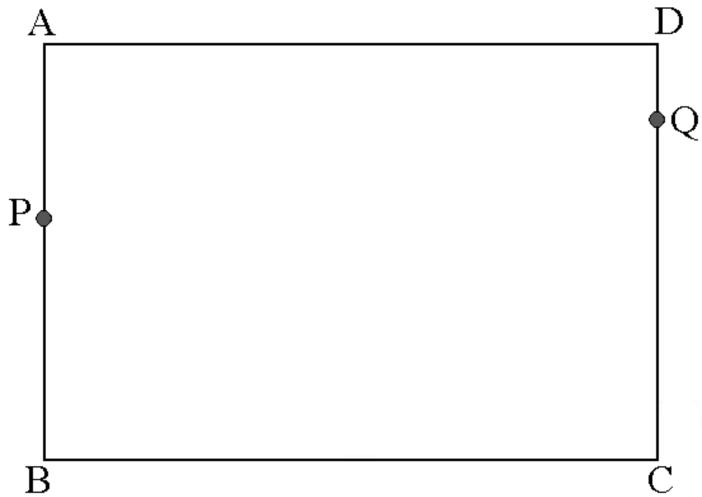
e infine

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 2$$

come si voleva dimostrare.

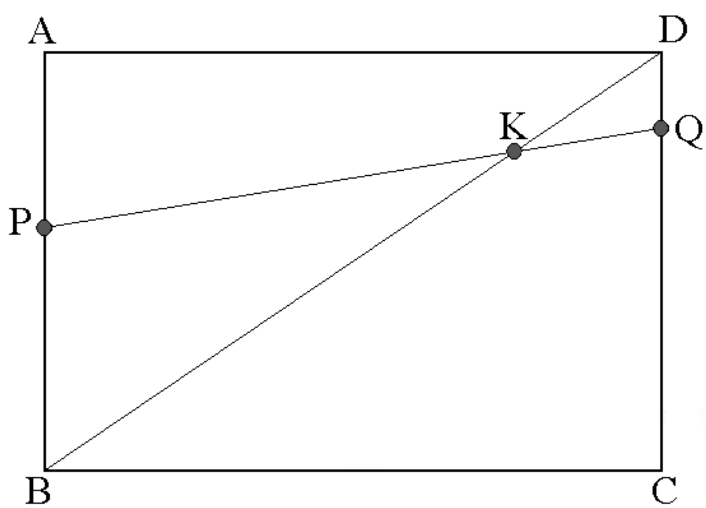
1.3 - Costruzione di segmenti proporzionali.

In questa sezione risolviamo il seguente problema: dato un rettangolo di carta ABCD nel quale il lato AB è diviso da un punto P in due segmenti di rapporto $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} = \alpha$, e dato un punto Q sul lato opposto CD (con la distanza di Q da D minore della distanza di P da B), trovare un punto R sul lato CD in modo che il rapporto $\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{QD}}$ sia ancora α.

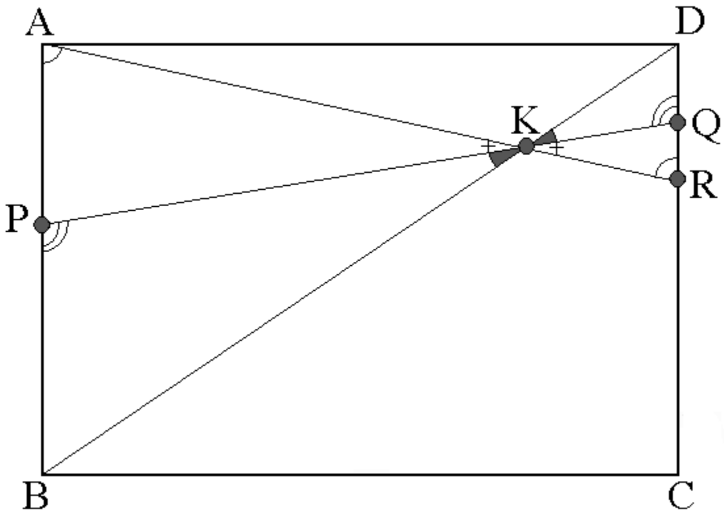


In particolare, se la distanza di Q da D è 1, il segmento QR ha misura α. Ma non solo: se è invece 1 la distanza di P da B, il segmento QR ha per misura il prodotto delle misure dei segmenti PB e QD; se sono uguali a 1 sia la distanza di P da A che la distanza di Q da D, il segmento QR ha per misura il reciproco della misura del segmento PB. Notiamo che queste condizioni sulla distanza tra A e P, sulla distanza tra P e B e sulla distanza tra Q e D sono facili da realizzare perché chiediamo che il nostro foglio di carta sia un rettangolo e non necessariamente un quadrato.

Effettuiamo due pieghe: quella passante per B e D (diagonale del rettangolo) e quella passante per P e Q; sia K il punto in cui le pieghe si incontrano.



Adesso effettuiamo la piega passante per A e K, e sia R il punto in cui questa piega incontra il lato DC del rettangolo.



Vogliamo dimostrare che

$$\frac{QR}{QD} = \frac{AP}{PB}\,.$$

I triangoli BKP e QKD sono simili perché gli angoli in K sono opposti al vertice mentre gli angoli BPK e DQK sono alterni interni rispetto alle rette paralele AB e CD tagliate dalla trasversale PQ. Dunque

$$\frac{QD}{PB} = \frac{KQ}{PK}\,.$$

I triangoli AKP e QKR sono simili perché gli angoli in K sono opposti al vertice mentre gli angoli PAK e QRK sono alterni interni rispetto alle rette paralele AB e CD tagliate dalla trasversale AR. Dunque

$$\frac{KQ}{PK} = \frac{QR}{AP}\,.$$

Si può allora concludere che

$$\frac{QD}{PB} = \frac{QR}{AP}$$

ovvero (moltiplicando ambo i membri per $\frac{AP}{QD}$) che

$$\frac{AP}{PB} = \frac{QR}{QD}$$

proprio come si voleva.