



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di  
Scienze Matematiche  
Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in  
Matematica

# **Origami: un approccio matematico al piegamento della carta**

## **Origami: a mathematical approach to paper folding**

**Relatore**  
Marco Barlotti

**Candidato**  
Ruggero Livi

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Cenni storici . . . . .	3
1.2	Terminologia e notazioni . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Talete</b>	<b>7</b>
2.1	Prime regole di piegatura . . . . .	7
2.2	Costruzioni secondo 2-Talete . . . . .	8
2.3	Costruzioni secondo Talete . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Pitagora</b>	<b>22</b>
3.1	La regola di Pitagora . . . . .	22
3.2	Costruzioni secondo Pitagora . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Euclide</b>	<b>31</b>
4.1	La regola di Euclide . . . . .	31
4.2	Richiami sulle tangenti alle parabole . . . . .	32
4.3	Costruzioni secondo Euclide . . . . .	37
4.4	Un commento alle regole di costruzione . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Huzita</b>	<b>44</b>
5.1	La regola di Huzita . . . . .	44
5.2	Costruzioni secondo Huzita . . . . .	45
5.3	Osservazioni sul cambio di sistema di riferimento . . . . .	47
5.4	Conclusioni sulle costruzioni secondo Huzita . . . . .	51

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Cenni storici

La parola *origami* deriva dai termini giapponesi *Ori*, piegare, e *Kami*, carta, e indica l'arte di creare figure bi- o tri-dimensionali mediante la piegatura di fogli di carta. Da un punto di vista matematico tale tecnica risulta estremamente interessante, in quanto, fra le altre cose, permette di approcciare problemi classici quali la *duplicazione del cubo* e la *trisezione dell'angolo*.

Fondatore dell'Accademia di Atene, Platone riteneva che le uniche figure geometriche "perfette" fossero la retta e la circonferenza. Questa convinzione fece sì che, in gran parte dell'antica Grecia, gli studiosi di geometria riducessero gli strumenti (concettuali) da utilizzare per effettuare costruzioni geometriche ai soli riga e compasso, dove con riga intendiamo un'asta rigida non graduata e con compasso uno strumento che consenta di disegnare circonferenze noti il centro ed un punto, ma non di riportare distanze (il cosiddetto compasso molle).

Euclide, nel primo libro dei suoi *Elementi* [3], formalizza le regole con cui utilizzare tali strumenti per costruire figure geometriche:

- È possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
- È possibile prolungare illimitatamente in linea retta un segmento finito;
- È possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e qualsiasi raggio.

Attenendosi ai suoi postulati, Euclide mostra come bisecare un angolo, dividere un segmento in parti uguali, disegnare un pentagono regolare; ma ci sono problemi per i quali riga e compasso risultano inadeguati, in particolare tre costruzioni, piuttosto famose, che i Greci non erano in grado di realizzare con questi strumenti: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la

quadratura del cerchio. Tali costruzioni non erano alla portata dei matematici greci non certo per mancanza di abilità, ma perché effettivamente impossibili sotto le restrizioni delle regole di Euclide.

I Greci erano consapevoli che, uscendo dalle limitazioni di Platone, tutti e tre i problemi erano risolvibili: ad esempio Ippocrate e Menecmo mostrarono come raddoppiare il cubo intersecando parabole ed iperboli, mentre Ippia e Nicomede utilizzarono alcune curve particolari per trisecare l'angolo e quadrare il cerchio. Cercando di rimanere più fedeli agli strumenti euclidei, Archimede e Nicomede adoperarono con successo compasso e riga graduata per risolvere i problemi di duplicazione del cubo e trisezione dell'angolo.

In tempi più recenti, uno strumento che si è rivelato molto efficace nell'approccio a questi problemi è proprio quello dell'origami, l'arte giapponese del piegamento della carta. Il primo libro completamente dedicato alla geometria del piegamento della carta sembra essere *Geometric Exercises in Paper Folding* [9], scritto nel 1893 da Sundara Row, un insegnante di matematica indiano, prevalentemente con scopi didattici. Il lavoro di Row spinse diversi matematici europei ad occuparsi del piegamento della carta, fra i quali spicca senza dubbio Margherita Piazzolla Beloch, una professoressa di geometria di Ferrara. Negli anni '30, un periodo in cui la matematica del piegamento della carta sta ancora muovendo i primi passi, Piazzolla Beloch [2] definisce quella che diverrà nota come la *piega di Beloch* [4]

- Dati due punti  $P$ ,  $Q$  e due pieghe  $r$ ,  $s$ , si può effettuare ogni piega che porti  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$

e dimostra come, grazie ad essa, sia possibile risolvere equazioni di terzo grado piegando la carta.

Nel libro *Geometric Methods* del 1941, R.C. Yates pubblica una lista di regole con cui tenta di formalizzare il piegamento della carta, che si riveleranno tuttavia insufficienti a descrivere tutte le costruzioni possibili. Per avere una formalizzazione soddisfacente del piegamento della carta si dovrà aspettare il 1985, anno in cui Humiaki Huzita, un matematico italo-giapponese, pubblica *La recente concezione matematica dell'origami - trisezione dell'angolo* [5]; in tale scritto Huzita elenca una lista di piegature realizzabili sul foglio di carta, che diverranno poi impropriamente note come gli *assiomi di Huzita*. È probabilmente negli scritti di Huzita che il termine inglese *paper folding* inizia ad accostarsi a quello nipponico *origami*.

In questo lavoro daremo un'interpretazione matematica delle regole di Huzita e, seguendo un'idea di Roger Alperin [1], le introdurremo gradualmente soffermandoci sulle costruzioni geometriche, e le corrispondenti costruzioni algebriche, che ciascun sottoinsieme di regole ci consente di effettuare.

- (RP1) Dati due punti, si può effettuare la piega che passa per entrambi.
- (RP2) Date due rette, si può individuare il loro eventuale punto di intersezione.
- (RP3) Dati due punti  $P$  e  $Q$ , si può effettuare la piega che porta  $P$  su  $Q$ .
- (RP4) Date due pieghe  $r_1, r_2$  si può effettuare ogni piega che porta  $r_1$  su  $r_2$ .
- (RP5) Dati due punti  $P, Q$  e una piega  $r$ , si può effettuare ogni piega passante per  $Q$  che porti  $P$  su  $r$ .
- (RP6) Dati due punti  $P, Q$  e due pieghe  $r, s$ , si può effettuare ogni piega che porti  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$ .

dove le (RP1), (RP3), (RP5) sono le regole già enunciate da Yates e la (RP6) è la *piega di Beloch*.

Se scegliamo di lavorare con un foglio su cui siano segnati due (o più) punti, possiamo considerare la loro distanza come unità di misura; così facendo ad ogni segmento che costruiamo piegando il foglio, sarà possibile associare un numero: la sua lunghezza! Ci riferiremo a tali lunghezze come ai *numeri costruibili*, corrispondenti algebrici degli oggetti geometrici costruibili.

Alle prime tre regole daremo il nome di regole di Talete e vedremo come, per quanto a prima vista possano sembrare semplici e piuttosto sterili, lavorando con tre specifici punti iniziali queste permettano una discreta gamma di costruzioni, al punto di garantire la struttura di campo alle coordinate dei punti costruibili in un opportuno sistema di riferimento cartesiano.

La quarta regola, che intitoliamo a Pitagora, fa qualcosa di più permettendoci di definire un sottoinsieme dei numeri reali corrispondenti alle distanze fra punti costruibili; avremo, per tali “numeri di Pitagora”, ancora la struttura di campo e la chiusura per l'estrazione di particolari radici quadrate.

Con la quinta regola, non a caso denominata di Euclide, otterremo esattamente le costruzioni geometriche (e quindi i numeri) realizzabili classicamente con riga e compasso.

Infine con la sesta e ultima regola, che intitoliamo ad Huzita stesso, potremo andare oltre le costruzioni con riga e compasso, ottenendo la chiusura sotto radice cubica che, come è noto, permette la risoluzione dei problemi classici di trisezione di un angolo e duplicazione di un cubo, impossibili con riga e compasso.

## 1.2 Terminologia e notazioni

Introduciamo alcune convenzioni e notazioni, a cui ci atterremo in tutto il lavoro: consideriamo fissati due punti del piano  $P_0$  e  $P_x$ , e assumiamo

il segmento  $P_0P_x$  come unità di misura. Utilizzeremo costantemente, senza richiamarlo in modo esplicito, il sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico  $P_0xy$ , nel quale l'origine è  $P_0$  e il punto  $P_x$  ha coordinate  $(1, 0)$ . Indicheremo con  $P_y$  il punto di coordinate  $(0, 1)$ .

Chiameremo  $r_x$  la retta  $P_0P_x$  ed indicheremo ogni segmento o retta parallelo all'asse delle ascisse come "orizzontale" e ogni segmento o retta parallelo all'asse delle ordinate come "verticale". Ci riferiremo talvolta al punto medio di un segmento  $AB$  come al punto ottenuto bisecando il segmento  $AB$ .

Consideriamo le curve algebriche (rette comprese) come insiemi di punti, per cui detto  $P$  un punto e  $\Gamma$  una curva, diremo che  $P \in \Gamma$  intendendo che  $P$  è incidente a  $\Gamma$  e, note due curve, indicheremo come loro intersezione l'insieme dei punti in cui sono incidenti.

Detti  $r$  una retta e  $P$  un punto, indicheremo con  $\sigma_r$  la simmetria assiale rispetto alla retta  $r$  e con  $\sigma_r(P)$  il punto simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$ . Detta  $s$  una retta, diremo che  $r$  *riflette*  $P$  su  $s$  se è asse di una simmetria  $\sigma_r$  tale che  $\sigma_r(P)$  appartiene a  $s$ .

Detti  $P$  e  $Q$  due punti, indicheremo con  $d(P, Q)$  la distanza tra  $P$  e  $Q$ . Noto  $\mathbb{F}$ , sottocampo di  $\mathbb{R}$ , indicheremo come  $\sqrt{\mathbb{F}}$  l'insieme

$$\sqrt{\mathbb{F}} = \{z \in \mathbb{R} \mid z = \sqrt{|x|} \text{ con } x \in \mathbb{F}\}$$

## Capitolo 2

# Talete

### 2.1 Prime regole di piegatura

In questo capitolo introdurremo tre prime regole di piegatura della carta, a cui abbiamo scelto di dare il nome di *piegature di Talete*:

- (RP1) Dati due punti, si può effettuare la piega che passa per entrambi.
- (RP2) Date due rette, si può individuare il loro eventuale punto di intersezione.
- (RP3) Dati due punti  $P$  e  $Q$ , si può effettuare la piega che porta  $P$  su  $Q$ .

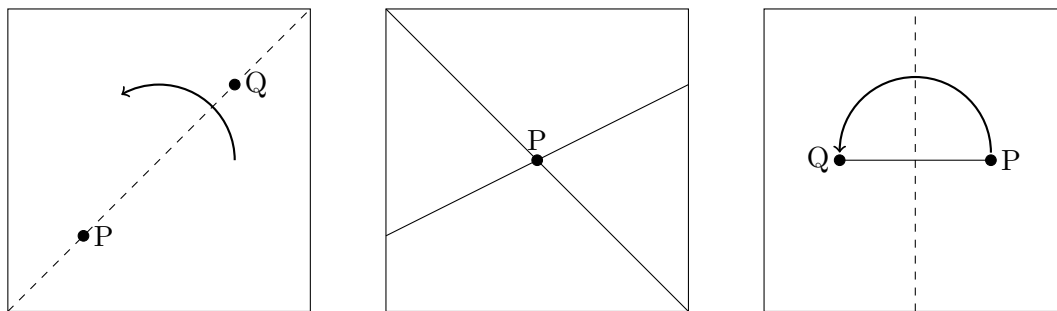


Figura 2.1: prime piegature

Nelle sezioni che seguono vedremo che, con le piegature di Talete, partendo da due soli punti non si possa fare molto, mentre avendo a disposizione tre punti iniziali (specifici) sia possibile costruire rette parallele, perpendicolari e simmetrie assiali; dimostreremo che le coordinate dei punti così costruibili costituiscono l'insieme dei numeri razionali e che le rette così costruibili sono quelle aventi equazioni a coefficienti razionali.

## 2.2 Costruzioni secondo 2-Talete

**Definizione 2.2.1.** Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano si dice chiuso per Talete (o **T**-chiuso) se:

- (C1) comunque presi due punti appartenenti a  $\mathcal{I}$ , la retta passante per essi appartiene a  $\mathcal{I}$ ;
- (C2) comunque prese due rette distinte appartenenti a  $\mathcal{I}$ , il loro (eventuale) unico punto di intersezione appartiene a  $\mathcal{I}$  ;
- (C3) comunque presi due punti  $P, Q$  appartenenti a  $\mathcal{I}$ , l'asse del segmento  $PQ$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .

L'insieme vuoto e l'insieme di tutti i punti e le rette del piano sono esempi di insiemi chiusi per Talete. Si nota immediatamente che l'intersezione di una famiglia di insiemi chiusi per Talete è ancora un insieme **T**-chiuso.

**Definizione 2.2.2.** Un punto, o una retta, del piano si dice costruibile secondo 2-Talete se appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi **T**-chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ .

Vediamo una caratterizzazione della costruibilità secondo 2-Talete:

**Teorema 2.2.3** (Costruzioni secondo 2-Talete). *Un punto, o una retta, del piano è costruibile secondo 2-Talete se e soltanto se è l'ultimo elemento di una sequenza finita, ogni elemento della quale*

- (RC0) è  $P_0$  o  $P_x$ , oppure
- (RC1) è la retta passante per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, oppure
- (RC2) è il punto di intersezione tra due rette che lo precedono nella sequenza, oppure
- (RC3) è l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza.

*Diremo che una sequenza finita con le proprietà (RC0)–(RC3) il cui ultimo elemento  $\eta$  è un punto o una retta, è una “sequenza di costruzione” di  $\eta$ ; indicheremo inoltre come “lunghezza di costruzione” di  $\eta$  la lunghezza della sequenza di costruzione di lunghezza minima per  $\eta$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\mathcal{T}$  l'intersezione di tutti gli insiemi **T**-chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$  e con  $A$  l'insieme di tutti i punti e le rette del piano per i quali esiste una sequenza di costruzione.  $A$  è evidentemente **T**-chiuso e  $P_0, P_x \in A$ ; se un punto  $P$  è costruibile secondo 2-Talete allora per definizione  $P$  appartiene a  $\mathcal{T}$ , quindi in particolare appartiene ad  $A$ . Pertanto



esiste una sequenza di costruzione per  $P$ .

Viceversa, se  $\eta$  è un punto o una retta per cui esiste una sequenza di costruzione, vediamo che  $\eta$  appartiene a  $\mathcal{T}$ . Procediamo per induzione sulla lunghezza di costruzione  $l$  di  $\eta$ :

Se  $l = 0$  allora  $\eta = P_0$  oppure  $\eta = P_x$ , quindi  $\eta \in \mathcal{T}$ .

Supponiamo vero che i punti o rette la cui lunghezza di costruzione sia minore di  $l$  appartengano a  $\mathcal{T}$ , sia  $\eta$  un punto o una retta la cui lunghezza di costruzione sia  $l$ ; allora  $\eta$  è:

- la retta per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, perciò  $P$  e  $Q$  hanno lunghezza di costruzione minore di  $l$ , quindi  $P, Q \in \mathcal{T}$  che è **T**-chiuso, da cui  $\eta \in \mathcal{T}$ . Oppure
- il punto di intersezione tra due rette  $r$  ed  $s$  che lo precedono nella sequenza, perciò  $r$  ed  $s$  hanno lunghezza di costruzione minore di  $l$ , quindi  $r, s \in \mathcal{T}$  che è **T**-chiuso, da cui  $\eta \in \mathcal{T}$ . Oppure
- l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza, perciò  $P$  e  $Q$  hanno lunghezza di costruzione minore di  $l$ , quindi  $P, Q \in \mathcal{T}$  che è **T**-chiuso, da cui  $\eta \in \mathcal{T}$ .

In ogni caso  $\eta$  appartiene a  $\mathcal{T}$ , quindi è costruibile secondo 2-Talete. □

**Lemma 2.2.4.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme di punti e rette chiuso per Talete. Se i punti  $A$  e  $B$  appartengono a  $\mathcal{I}$ , allora anche il punto medio del segmento  $AB$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $\mathcal{I}$  **T**-chiuso, la retta  $AB$  appartiene a  $\mathcal{I}$ , per (C1). Per (C3) anche l'asse  $s$  del segmento  $AB$  appartiene ad  $\mathcal{I}$ ; allora, per (C2), appartiene a  $\mathcal{I}$  anche il punto di intersezione tra  $s$  e  $AB$ , ossia il punto medio del segmento  $AB$ . □

**Lemma 2.2.5.** *Tutti i punti costruibili secondo 2-Talete appartengono al segmento  $P_0P_x$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un punto costruibile secondo 2-Talete, procediamo per induzione sulla lunghezza di costruzione  $l$  di  $P$ :

Se  $l = 0$  allora  $P = P_0$  oppure  $P = P_x$  e l'asserto è vero.

Supponiamo che tutti i punti la cui lunghezza di costruzione sia minore di  $l$  appartengano al segmento  $P_0P_x$  e sia  $P$  un punto la cui sequenza di costruzione è  $\omega_1 \dots \omega_l$ . Siano  $i, j \in \{1, \dots, l-1\}$  tali che  $\omega_i$  e  $\omega_j$  sono rette e  $P = \omega_i \cap \omega_j$ .  $\omega_i$  può essere:

- la retta passante per due punti  $P$  e  $Q$  che la precedono nella sequenza, ma allora, per ipotesi di induzione,  $P$  e  $Q$  giacciono sul segmento  $P_0P_x$ ; di conseguenza  $\omega_i$  è la retta  $P_0P_x$ . Oppure

- l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza, ma allora, per ipotesi di induzione,  $P$  e  $Q$  giacciono sul segmento  $P_0P_x$  e  $\omega_i$  è una retta verticale che interseca il segmento  $P_0P_x$ , a meno dell'ordine tra  $i$  e  $j$ .

Lo stesso vale per  $\omega_j$ . Ora, dato che se fossero entrambe rette verticali o entrambe la retta  $P_0P_x$  non avremmo  $P = \omega_i \cap \omega_j$ , deve essere  $\omega_i = P_0P_x$  e  $\omega_j$  una retta verticale che interseca il segmento  $P_0P_x$ .

Allora  $P$  appartiene al segmento  $P_0P_x$ .  $\square$

I punti costruibili secondo 2-Talete si trovano quindi tutti sul segmento  $P_0P_x$ , vediamo più in dettaglio le loro coordinate:

**Teorema 2.2.6.** *I punti costruibili secondo 2-Talete sono tutti e soli i punti di ascissa  $\frac{n}{2^k}$  con  $n, k \in \mathbb{N}, n \leq 2^k$*

*Dimostrazione.* Vediamo innanzitutto che il punto di ascissa  $\frac{n}{2^k}$  è costruibile secondo 2-Talete per ogni  $n \leq 2^k$ . Procediamo per induzione su  $k$ :

per  $k = 1$  abbiamo che  $(0, 0) = P_0$  e  $(1, 0) = P_x$  sono costruibili secondo 2-Talete;  $(\frac{1}{2}, 0)$  è il punto medio del segmento  $P_0P_x$  e quindi è costruibile secondo 2-Talete tramite la regola (RC3).

Siano ora, per ipotesi induttiva, costruibili secondo 2-Talete i punti  $(\frac{n}{2^{k-1}}, 0)$ , vediamo come costruire secondo 2-Talete  $(\frac{n}{2^k}, 0)$  per ogni  $n \leq 2^k$ :

se  $(\frac{n}{2^k}, 0)$  non è già costruito secondo 2-Talete significa che  $n$  è dispari, allora sono già costruiti secondo 2-Talete i punti  $A = (\frac{n-1}{2^k}, 0)$  e  $B = (\frac{n+1}{2^k}, 0)$  e  $(\frac{n}{2^k}, 0)$  è il loro punto medio, pertanto costruibile secondo 2-Talete applicando la regola (RC3) al segmento  $AB$ .

Viceversa, dimostriamo che se  $x$  è ascissa di un punto  $P$  costruibile secondo 2-Talete, allora  $x = \frac{n}{2^k}$ , per qualche  $k$  e  $n$  tali che  $n \leq 2^k$ .

Sia  $l$  la lunghezza della sequenza finita di costruzione di  $P$ , dimostriamo per induzione su  $l$  che

$$d(P_0, P) = \frac{n}{2^k}$$

per qualche  $n, k$ .

Se  $l = 1$  allora  $P = P_0 = (0, 0)$  e quindi  $d(P_0, P) = 0 = \frac{0}{2^0}$ ; oppure  $P = P_x = (1, 0)$  e quindi  $d(P_0, P) = 1 = \frac{1}{2^0}$ .

Sia adesso vero per sequenze di lunghezza inferiore a  $l$  che  $P = (\frac{n}{2^k}, 0)$ , dimostriamo che vale anche per sequenze di lunghezza  $l$ :

Il passo  $l$  della sequenza di costruzione di  $P$  consisterà nell'applicazione della regola (RC2) preceduta dall'applicazione della regola (RC3) a un segmento  $AB$  precedentemente costruito, allora i punti  $A$  e  $B$  hanno ascisse del tipo  $\frac{n}{2^k}$  e  $\frac{m}{2^j}$ , pertanto l'ascissa di  $P$  sarà  $\frac{1}{2}(\frac{n}{2^k} + \frac{m}{2^j})$ , dove, supponendo  $k \geq j$ :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^k} + \frac{m}{2^j}\right) = \frac{1}{2} \frac{n + 2^{k-j}m}{2^k} = \frac{n + 2^{k-j}m}{2^{k+1}}$$

con  $n + 2^{k-j}m \leq n + 2^{k-j}2^j \leq 2^{k+1}$ , quindi l'ascissa di  $P$  è della forma voluta.  $\square$

## 2.3 Costruzioni secondo Talete

Visto che non possiamo spingerci oltre con le regole (RC1)-(RC3) partendo da due soli punti, consideriamo il terzo punto,  $P_y$ , che abbiamo a disposizione sul nostro sistema di riferimento e che finora avevamo lasciato da parte. Riformuliamo quindi i concetti della sezione precedente a partire dai tre punti:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_x = (1, 0), \quad P_y = (0, 1).$$

**Definizione 2.3.1.** Un punto, o una retta, del piano si dice costruibile secondo Talete se appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi  $\mathbf{T}$ -chiusi contenenti  $P_0$ ,  $P_x$  e  $P_y$ .

Vediamo una caratterizzazione della costruibilità secondo Talete:

**Teorema 2.3.2** (Costruzioni secondo Talete). *Un punto, o una retta, del piano è costruibile secondo Talete se è l'ultimo elemento di una sequenza finita, ogni elemento della quale*

(RC0\*) è  $P_0$ ,  $P_x$  o  $P_y$  oppure

(RC1) è la retta passante per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, oppure

(RC2) è il punto di intersezione tra due rette che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC3) è l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 2.2.3**.  $\square$

Vediamo ora alcuni risultati generali sugli insiemi  $\mathbf{T}$ -chiusi cui appartengono tre punti non allineati, che valgono in particolare per l'insieme dei punti e delle rette costruibili secondo Talete.

**Lemma 2.3.3.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Se i punti  $P, A, B$  appartengono a  $\mathcal{I}$ , esistono in  $\mathcal{I}$  due punti  $C, D$  tali che i segmenti  $CP$  e  $PD$  hanno la stessa lunghezza di  $AB$  e sono ad esso paralleli.*

*Dimostrazione.* Analizziamo per primo il caso in cui  $P$  non appartiene alla retta passante per  $AB$ . Consideriamo il triangolo  $ABP$  e bisechiamo i suoi lati ottenendo i punti  $A_1, B_1, P_1$  come in Figura 2.2, che per il **Lemma 2.2.4** appartengono a  $\mathcal{I}$ .

Per proprietà note dei punti medi, il segmento  $A_1B_1$  è parallelo ad  $AB$ . Consideriamo  $E_1$ , punto medio del segmento  $PA_1$ , e la retta  $B_1E_1$ . Le rette  $P_1A_1$  e  $B_1E_1$  appartengono ancora a  $\mathcal{I}$  per (C1).

Le rette  $B_1E_1$  e  $P_1A_1$  sono incidenti, infatti se così non fosse avremmo  $B_1E_1 \parallel P_1A_1$ , ma per proprietà note dei punti medi sappiamo che  $AP \parallel P_1A_1$ , allora per unicità della parallela a  $P_1A_1$  passante per  $B_1$  dovrebbe essere  $E_1 \in B_1P$ ; ma dato che  $E_1 \in A_1P$  (essendone il punto medio), deve essere  $E_1 = P$ , il che è assurdo essendo  $E_1$  il punto medio del segmento  $A_1P$ .

Pertanto le rette  $B_1E_1$  e  $P_1A_1$  si intersecano in un qualche punto  $E$ , che quindi appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C2); affermiamo che il segmento  $PE$  è parallelo ad  $AB$  ed ha lunghezza  $\frac{AB}{2}$ .

Per convincerci di questo, analizziamo la figura così costruita:

$PA \parallel P_1A_1$  per proprietà note dei punti medi e  $P_1A_1 \equiv AB_1$  perché lati opposti del parallelogramma  $AP_1A_1B_1$ . Consideriamo ora i triangoli  $PB_1E_1$  e  $A_1E_1E$ :

$A_1E_1 \equiv PE_1$ , perché  $E_1$  è il punto medio di  $A_1P$ ;

l'angolo  $\widehat{EA_1P}$  è congruente all'angolo  $\widehat{A_1P_1B_1}$  perché alterni interni delle due rette parallele  $PA$  e  $P_1A_1$  tagliate dalla trasversale  $PA_1$ ;

l'angolo  $\widehat{EE_1A_1}$  è congruente all'angolo  $\widehat{PE_1B_1}$  perché opposti al vertice.

Allora i triangoli  $PB_1E_1$  e  $A_1E_1E$  sono congruenti, in particolare  $B_1E_1 \equiv E_1E$ ; essendo inoltre  $PE_1 \equiv E_1A_1$  le diagonali del quadrilatero  $B_1A_1EP$  si bisecano,  $B_1A_1EP$  è quindi un parallelogramma. Da questo segue che  $PE \parallel A_1B_1$  e quindi  $PE \parallel AB$ , inoltre  $PE \equiv B_1A_1 \equiv AP_1$  che ha lunghezza  $\frac{d(A,B)}{2}$ , come volevamo.

Possiamo eseguire una costruzione analoga scegliendo  $E$  al posto di  $P$  così da ottenere il punto  $D$  sulla retta  $PE$  la cui distanza da  $P$  è uguale a  $d(A, B)$ .

La costruzione per il punto  $C$  è analoga.

Se invece  $P$  appartiene alla retta passante per  $AB$ , consideriamo un altro punto  $Q$  in  $\mathcal{I}$ , non appartenente alla retta  $AB$  (uno tra  $P_0, P_x, \tilde{P}$  fa al caso nostro) allora possiamo usare il procedimento descritto sopra per costruire il segmento parallelo ad  $AB$  e di medesima lunghezza che inizia o termina  $Q$ , e poi nuovamente riportarlo in  $P$  sempre con lo stesso metodo.  $\square$

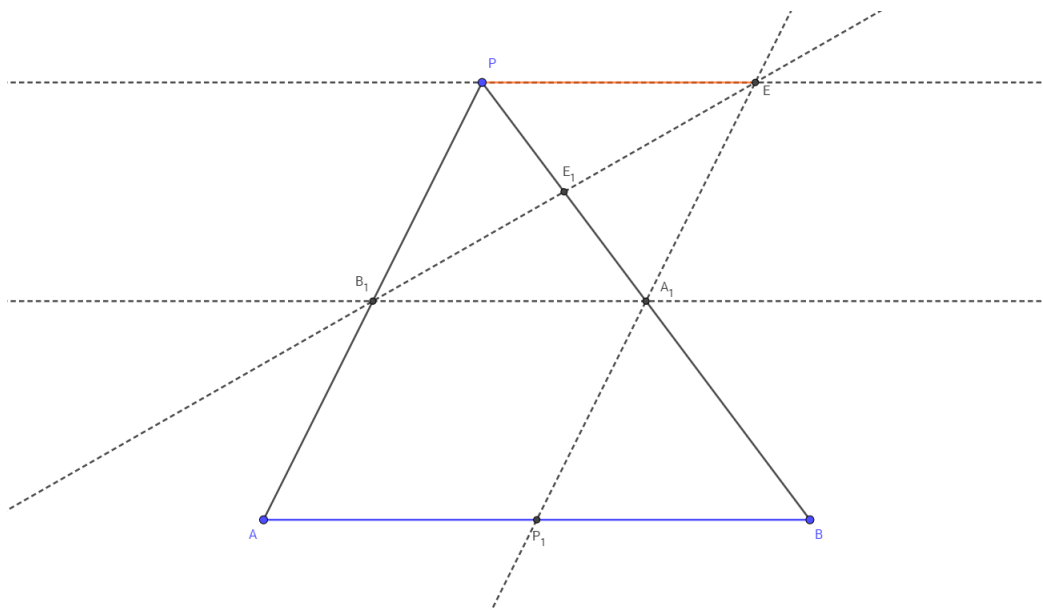


Figura 2.2: Traslazione

**Lemma 2.3.4.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Se  $r$  è una retta di  $\mathcal{I}$ , allora esistono due punti in  $\mathcal{I}$  che appartengono ad  $r$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo la retta  $r_x$  passante per  $P_0$  e  $P_x$  che appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C1).

Se  $r$  è una retta verticale,  $r$  interseca  $r_x$  in un punto  $A$ , che appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C2). Consideriamo adesso la retta  $s$  passante per  $P_0\tilde{P}$ ,  $s$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C1) ed interseca  $r$  in un punto  $B$  che appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C2); se  $A \neq B$  l'asserto è provato. Nel caso in cui  $A$  e  $B$  coincidano  $r$  è la retta verticale passante per  $A = B = P_0$  (vedi Figura 2.3); consideriamo allora l'asse  $t$  del segmento  $P_0\tilde{P}$ , che appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C3). Dal momento che  $\tilde{P}$  non è allineato con  $P_0$  e  $P_x$ ,  $t$  interseca la retta  $r$  in un punto  $C$  diverso da  $P_0$ , che appartiene a  $\mathcal{I}$  sempre per (C2).

Supponiamo ora che  $r$  sia una retta non verticale, consideriamo l'asse  $s_1$  del segmento  $P_0P_x$ ,  $s_1$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C3). Il punto medio  $M$  del segmento  $P_0P_x$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C2), in quanto  $M = s_1 \cap r_x$ ; allora appartiene a  $\mathcal{I}$  anche l'asse  $s_2$  del segmento  $MP_x$ . La retta  $r$  interseca le rette  $s_1$  e  $s_2$  in due punti distinti  $A$  e  $B$ , che appartengono a  $\mathcal{I}$  per (C1).

In entrambi i casi abbiamo trovato due punti di  $\mathcal{I}$  che appartengono a  $r$ , l'asserto è dunque provato.  $\square$

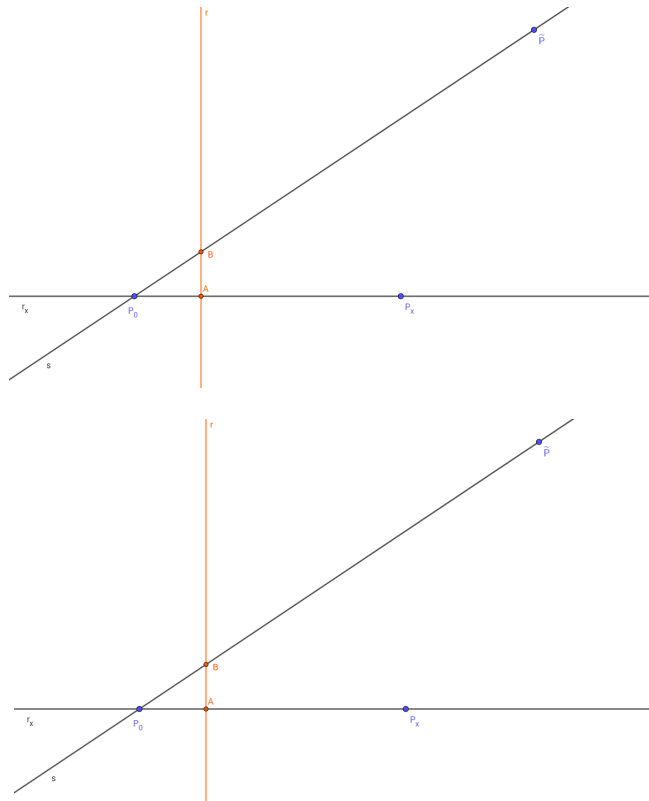


Figura 2.3: due punti costruibili su ogni retta verticale costruibile

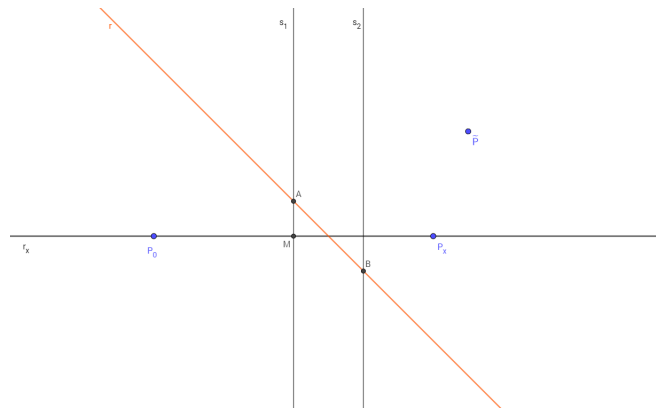


Figura 2.4: due punti costruibili su ogni retta non verticale costruibile

Vediamo adesso alcune proprietà degli insiemi di punti e rette **T**-chiusi:

**Corollario 2.3.5.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **T**-chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Siano  $P$  ed  $r$  un punto e una retta appartenenti a  $\mathcal{I}$ , allora la retta parallela ad  $r$  passante per  $P$*

appartiene a  $\mathcal{I}$ .

*Dimostrazione.* Segue subito dal **Lemma 2.3.3** e dalla (RC1) tenendo conto del **Lemma 2.3.4**. □

**Lemma 2.3.6.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Gli assi coordinati del sistema di riferimento  $P_0xy$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* L'asse  $x$  non è altro che la retta per  $P_0P_x$ , che appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C1). Per (C3) l'asse  $s$  del segmento  $P_0P_x$  appartiene ad  $\mathcal{I}$ , l'asse  $y$  è la parallela ad  $s$  passante per  $P_0$ , che per il **Corollario 2.3.5** appartiene ad  $\mathcal{I}$ . □

**Corollario 2.3.7.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Siano  $P$  ed  $r$  un punto e una retta appartenenti a  $\mathcal{I}$ , allora la retta perpendicolare a  $r$  passante per  $P$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Se la retta  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$  significa che esistono in  $\mathcal{I}$  (almeno) due punti su di essa,  $A$  e  $B$ ; per (C3) l'asse del segmento  $AB$  appartiene a  $\mathcal{I}$  e, per il **Corollario 2.3.5**, la retta ad esso parallela passante per  $P$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . □

**Corollario 2.3.8.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Siano  $P$  ed  $r$  un punto e una retta appartenenti a  $\mathcal{I}$ , allora il punto  $Q$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* La perpendicolare a  $r$  per  $P$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per il **Corollario 2.3.7** ed interseca  $r$  in un punto  $M$ , appartenente a  $\mathcal{I}$  per (C2). Per il **Lemma 2.3.3** esiste in  $\mathcal{I}$  un punto  $Q$  diverso da  $P$  tale che i segmenti  $MQ$  e  $PM$  sono paralleli e congruenti. Il punto  $Q$  è evidentemente il simmetrico di  $P$  rispetto alla retta  $r$ . □

**Proposizione 2.3.9.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . Se  $r_1$  e  $r_2$  sono due rette parallele appartenenti a  $\mathcal{I}$ , appartiene a  $\mathcal{I}$  anche la retta  $s$  parallela a  $r_1$  e  $r_2$  equidistante da  $r_1$  e  $r_2$ .*

*Dimostrazione.* Per il **Lemma 2.3.4** esiste un punto  $P_1$  di  $\mathcal{I}$  giacente su  $r_1$ , la retta  $t$  perpendicolare a  $r_1$  passante per  $P_1$  appartiene a  $\mathcal{I}$  (**Corollario 2.3.7**) e interseca  $r_2$  in un punto  $P_2$  anch'esso appartenente a  $\mathcal{I}$ . Per la proprietà (C3) degli insiemi  $\mathbf{T}$ -chiusi, l'asse del segmento  $P_1P_2$ , ossia la retta  $s$ , appartiene a  $\mathcal{I}$  (Figura 2.5). □

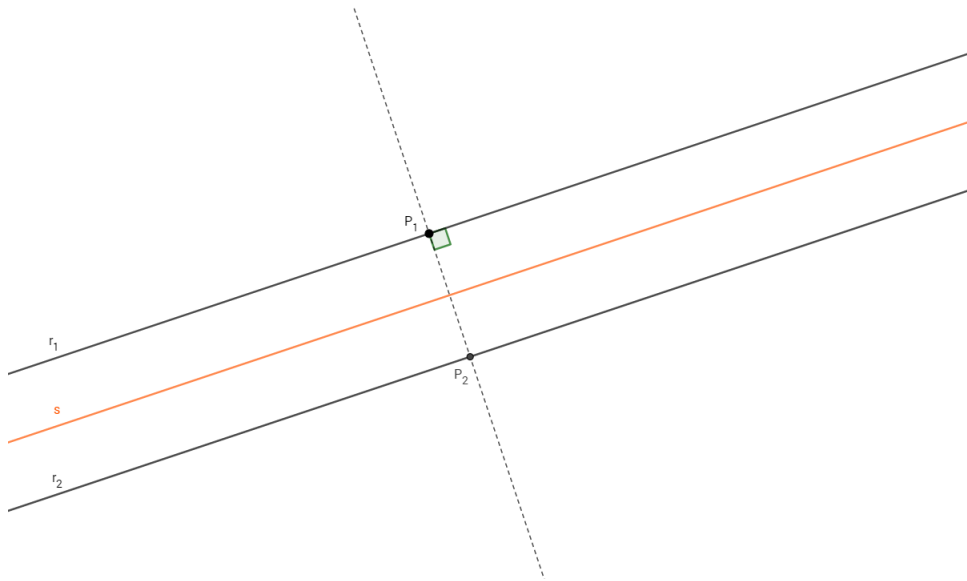


Figura 2.5: retta parallela ed equidistante da  $r_1$  e  $r_2$

Se abbiamo costruito un segmento  $AB$ , con il **Lemma 2.3.3** siamo in grado di costruirne altri di uguale lunghezza paralleli ad  $AB$ ; ci interessa ora capire se, e come, sia possibile costruire segmenti di lunghezza uguale ad  $AB$  su rette non parallele ad esso. In particolar modo ci interesserà costruire un segmento  $CD$  congruente ad  $AB$  che giaccia su una retta perpendicolare alla retta  $AB$ , così da poter “spostare” segmenti da un asse cartesiano all’altro. Vedremo che un ruolo fondamentale in questo procedimento viene svolto dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

**Teorema 2.3.10.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$ . La bisettrice del primo e terzo quadrante appartiene a  $\mathcal{I}$  se e soltanto se  $P_y \in \mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $r$  la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Se  $r \in \mathcal{I}$ ,  $P_y = \sigma_r(P_x)$  è il simmetrico di  $P_x$  rispetto a  $r$ , appartiene quindi a  $\mathcal{I}$  per il **Corollario 2.3.8**.

Se viceversa  $P_y \in \mathcal{I}$ ,  $r$  non è altro che l’asse del segmento  $P_x P_y$ , appartiene quindi a  $\mathcal{I}$  per (C3).  $\square$

**Lemma 2.3.11.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette del piano a cui appartengono  $P_0, P_x$  e  $P_y$  e sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Il punto  $(\alpha, 0)$  appartiene a  $\mathcal{I}$  se e soltanto se il punto  $(0, \alpha)$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . In particolare, per ogni coppia di punti  $A, B$  di uno dei due assi cartesiani appartenenti a  $\mathcal{I}$  esistono sull’altro asse cartesiano due punti  $C, D$  appartenenti a  $\mathcal{I}$  tali che  $\mathbf{d}(C, D) = \mathbf{d}(A, B)$ .*

*Dimostrazione.* Per il **Teorema 2.3.10** la bisettrice del primo e terzo quadrante appartiene a  $\mathcal{I}$ , la indichiamo con  $r$ .

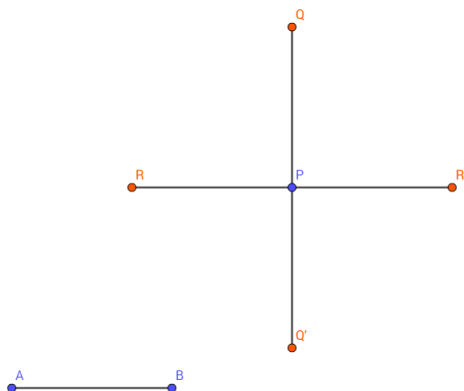


Siano  $P = (\alpha, 0)$  e  $Q = (0, \alpha)$ , allora  $\sigma_r(P) = Q$  essendo i due assi simmetrici rispetto a  $r$ , e naturalmente  $\sigma_r(Q) = P$ .

Per il **Corollario 2.3.8**  $P \in \mathcal{I}$  se e soltanto se  $Q$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .  $\square$

**Corollario 2.3.12.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **T**-chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x, P_y$ . Sia  $AB \in \mathcal{I}$  un segmento orizzontale o verticale e sia  $P \in \mathcal{I}$ ; in  $\mathcal{I}$  esistono due punti  $Q, Q'$  tali che  $PQ$  e  $PQ'$  sono segmenti orizzontali di lunghezza uguale ad  $AB$  e due punti  $R, R'$  tali che  $PR$  e  $PR'$  sono segmenti verticali di lunghezza uguale ad  $AB$ .*

*Dimostrazione.* Segue dal **Lemma 2.3.3** e dal **Lemma 2.3.11**  $\square$



**Lemma 2.3.13.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **T**-chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x, P_y$ .  $Q = (x_0, y_0) \in \mathcal{I}$  se e soltanto se  $Q_x = (x_0, 0)$  e  $Q_y = (0, y_0)$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Tramite il **Corollario 2.3.7** possiamo proiettare  $Q$  sugli assi cartesiani (che appartengono a  $\mathcal{I}$  per il **Lemma 2.3.6**) ottenendo  $Q_x$  e  $(0, y_0)$ ; per il **Lemma 2.3.11** anche  $Q_y \in \mathcal{I}$ .

Viceversa se  $Q_x, Q_y \in \mathcal{I}$  ripercorrendo al contrario i passi visti sopra abbiamo  $(0, y_0) \in \mathcal{I}$  e possiamo costruire  $Q = (x_0, y_0)$  come punto di intersezione delle perpendicolari agli assi per  $Q_x$  e  $(0, y_0)$ .  $\square$

Possiamo a questo punto enunciare il teorema fondamentale di questa sezione, che consentirà, assieme al **Corollario 2.3.16**, di caratterizzare le coordinate dei punti costruibili secondo Talete.

**Teorema 2.3.14.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **T**-chiuso di punti e rette del piano, contenente  $P_0, P_x, P_y$ . L'insieme delle coordinate dei punti che appartengono a  $\mathcal{I}$  è un sottocampo di  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Visto il **Lemma 2.3.13** possiamo supporre due punti  $P = (x_0, 0)$  e  $Q = (y_0, 0)$  in  $\mathcal{I}$  e per dimostrare il teorema sarà sufficiente mostrare come in  $\mathcal{I}$  esistano dei punti che abbiano  $x_0 + y_0, -x_0, x_0y_0, \frac{1}{x_0}$  come ascissa o ordinata indifferentemente. Senza perdere in generalità possiamo supporre che sia  $x_0 > y_0$ , per il **Corollario 2.3.12** esiste in  $\mathcal{I}$  un punto  $Q'$  tale che  $PQ'$  è un segmento orizzontale di lunghezza uguale a  $P_0Q$ , allora

$$\overline{P_0Q'} = \overline{P_0P} + \overline{PQ'} = \overline{P_0P} + \overline{P_0Q} = x_0 + y_0$$

per cui  $Q' = (x_0 + y_0, 0)$ .

Abbiamo visto nel **Lemma 2.3.6** che gli assi cartesiani appartengono a  $\mathcal{I}$ ; per il **Corollario 2.3.8** il punto  $(-x_0, 0)$ , simmetrico di  $P$  rispetto all'asse delle ordinate, appartiene a  $\mathcal{I}$ .

Visto il **Lemma 2.3.13**, se  $a, b, c$  sono coordinate di punti in  $\mathcal{I}$ , i vertici del triangolo rettangolo  $(0, 0), (a, 0), (a, b)$  appartengono a  $\mathcal{I}$ . Consideriamo la retta per  $(0, 0)$  e  $(a, b)$  e tracciamo per  $(c, 0)$  la parallela all'asse  $y$ ; il loro punto di intersezione, di coordinate  $(c, d)$ , appartiene quindi a  $\mathcal{I}$ . Abbiamo così costruito due triangoli simili per cui vale

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Allora se effettuiamo questa costruzione con  $a = 1, b = x_0, c = y_0$  otteniamo  $d = x_0y_0$ ; se invece costruiamo il triangolo con  $a = x_0, b = 1, c = 1$  otteniamo  $d = \frac{1}{x_0}$ .  $\square$

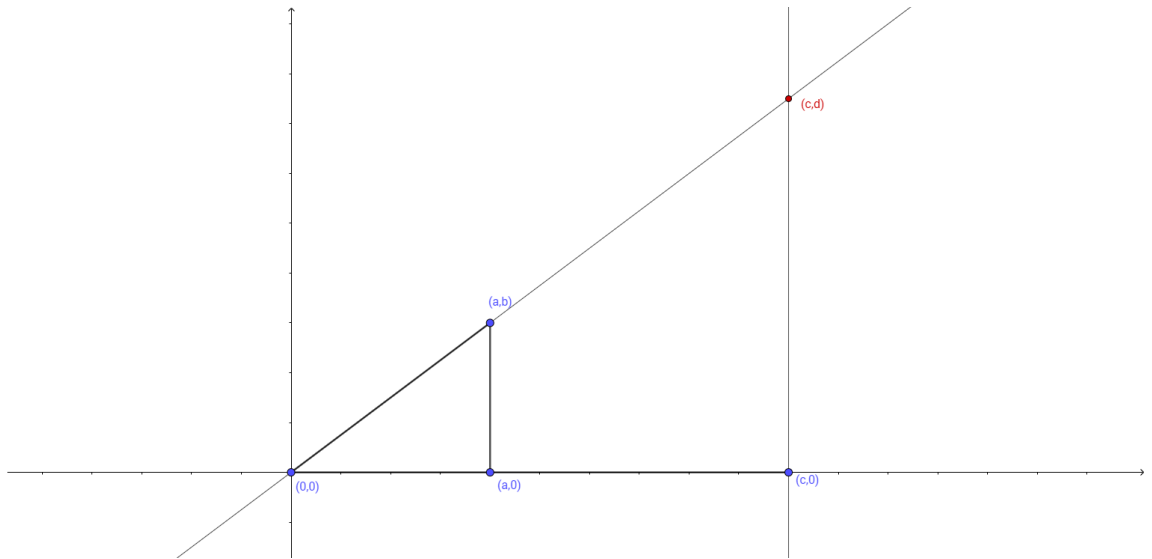


Figura 2.6: Prodotto e inverso

**Lemma 2.3.15.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{T}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0, P_x, P_y$ . Una retta  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$  se e soltanto se ha un'equazione i cui coefficienti sono coordinate di punti in  $\mathcal{I}$ . In particolare:*

- (i) *Se  $r$  ha equazione  $y = mx + q$ ,  $r \in \mathcal{I} \iff m$  e  $q$  sono coordinate di punti in  $\mathcal{I}$ .*
- (ii) *Se  $r$  ha equazione  $x = k$ ,  $r \in \mathcal{I} \iff k$  è ascissa di un punto in  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* (i) Se  $r \in \mathcal{I}$ ,  $q$  è l'ordinata del punto di intersezione tra  $r$  e l'asse  $y$ . La retta parallela ad  $r$  passante per l'origine interseca la retta verticale passante per  $(1,0)$  in  $(1,m)$ , quindi anche  $m$  è l'ordinata di un punto in  $\mathcal{I}$ .

Viceversa se  $m, q$  sono coordinate di punti di  $\mathcal{I}$ , allora anche  $m + q$  lo è (**Teorema 2.3.14**) e  $r$  è la retta passante per  $(0, q)$  e  $(1, m + q)$ , quindi appartiene a  $\mathcal{I}$ .

(ii) Se una retta verticale  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$ , la sua intersezione con l'asse delle ascisse è il punto  $(k, 0)$ ; viceversa se il punto  $(k, \bar{y})$  è in  $\mathcal{I}$  allora tramite il **Corollario 2.3.5** possiamo costruire la retta parallela all'asse delle ordinate passante per  $(k, \bar{y})$ , che ha equazione  $x = k$ .  $\square$

Ora che abbiamo dato la struttura di campo alle coordinate dei punti degli insiemi  $\mathbf{T}$ -chiusi e abbiamo visto la relazione fra coordinate di punti e coefficienti di rette in insiemi  $\mathbf{T}$ -chiusi, osserviamo come le coordinate dei punti costruibili secondo Talete e i coefficienti delle rette costruibili secondo Talete siano numeri razionali.

**Corollario 2.3.16.** Siano  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ :

(i) il punto  $P$  di coordinate  $(a, b)$  è costruibile secondo Talete;

(ii) la retta  $r$  di equazione  $ax + by + c = 0$  è costruibile secondo Talete.

*Dimostrazione.* (i) segue immediatamente dal **Teorema 2.3.14**.

Per quanto riguarda (ii): Se  $b \neq 0$ , la retta  $r$  passa per i punti  $(0, -\frac{c}{b})$  e  $(-b, a - \frac{c}{b})$ ; se  $b = 0$  (e quindi  $a \neq 0$ ), la retta  $r$  passa per  $(-\frac{c}{a}, 0)$  e  $(-\frac{c}{a}, 1)$ . In ogni caso,  $r$  è costruibile secondo Talete per la (i) e la (RC1).  $\square$

**Teorema 2.3.17.** Un punto  $P$  di coordinate  $(x, y)$  è costruibile secondo Talete se e soltanto se  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

Una retta  $r$  è costruibile secondo Talete se e soltanto se ha un'equazione della forma

$ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .

*Dimostrazione.* Un verso, sia per un punto che per una retta, è già stato dimostrato (**Corollario 2.3.16**). Supponiamo allora  $P$  e  $r$  costruibili secondo Talete e dimostriamo entrambe le affermazioni del teorema contemporaneamente, procedendo per induzione sulla lunghezza  $l$  della sequenza di costruzione del punto  $P$  o della retta  $r$ :

Se  $l = 0$ ,  $P \in \{P_0, P_x, P_y\}$  e l'asserto è ovvio. Supponiamo allora vero il teorema per tutti i punti e le rette costruibili secondo Talete la cui sequenza di costruzione abbia lunghezza inferiore o uguale a  $l$ .

Sia

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di un punto  $P$ , allora esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = r_i$  e  $\omega_j = r_j$  sono due rette costruibili secondo Talete e  $P$  è il loro punto di intersezione. Allora per ipotesi di induzione  $r_i$  ha equazione  $ax + by + c = 0$  e  $r_j$  ha equazione  $a'x + b'y + c' = 0$ , con  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{Q}$ . Le coordinate di  $P$  sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

e dunque appartengono a  $\mathbb{Q}$ .

Analogamente, sia

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di una retta  $r$ , si hanno due casi:

(r1) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Talete ed  $r$  è la retta passante per  $P_i P_j$ ; Per ipotesi induttiva  $x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{Q}$  La retta  $r$  ha equazione

$$(y_j - y_i)(x - x_i) - (x_j - x_i)(y - y_i) = 0$$

da cui l'asserto.

(r2) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Talete ed  $r$  è l'asse del segmento  $P_i P_j$ ; per ipotesi induttiva  $x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{Q}$ .

La retta  $r$  ha equazione

$$2x(x_j - x_i) + 2y(y_j - y_i) + (y_i^2 - y_j^2 + x_i^2 - x_j^2) = 0$$

per cui ancora vale l'asserto. □

## Capitolo 3

# Pitagora

### 3.1 La regola di Pitagora

Introduciamo una nuova regola:

(RP4) Date due pieghe  $r_1, r_2$  si può effettuare ogni piega che porta  $r_1$  su  $r_2$ .

Nel caso in cui  $r_1$  e  $r_2$  siano incidenti, una nuova piega ottenuta tramite (RP4) non è altro che la bisettrice di uno degli angoli formati da  $r_1$  e  $r_2$ . Se invece  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, (RP4) produce una piega parallela a  $r_1$  e  $r_2$  equidistante da  $r_1$  e  $r_2$ ; si è visto nella **Proposizione 2.3.9** che tale piega era già ottenibile tramite le regole di Talete, per cui in questo caso (RP4) non aggiunge nulla di nuovo.

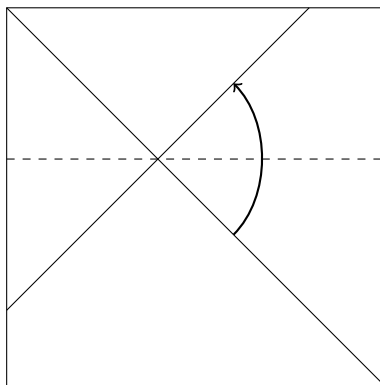


Figura 3.1: la piegatura di Pitagora

Con questa nuova regola a disposizione saremo in grado di riportare distanze su ogni retta costruibile, il che ci permetterà di definire un sottoinsieme dei numeri reali corrispondenti alle distanze fra punti costruibili. Vedremo come questi numeri formino un campo, chiuso sotto estrazione di particolari radici quadrate e ne daremo una caratterizzazione.

## 3.2 Costruzioni secondo Pitagora

**Definizione 3.2.1.** Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano si dice chiuso per Pitagora (o **P**-chiuso) se è chiuso per Talete e inoltre

(C4) comunque prese due rette  $r_1, r_2$  appartenenti a  $\mathcal{I}$ , le rette bisettrici degli angoli individuati da  $r_1$  e  $r_2$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .

Consideriamo un insieme **P**-chiuso  $\mathcal{I}$  contenente  $P_0$  e  $P_x$ . La retta  $r$ , passante per  $P_0$  e  $P_x$ , appartiene a  $\mathcal{I}$  per C1; la retta  $s$ , asse del segmento  $P_0P_x$ , appartiene a  $\mathcal{I}$  per C3; il punto  $M = r \cap s$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per C2.

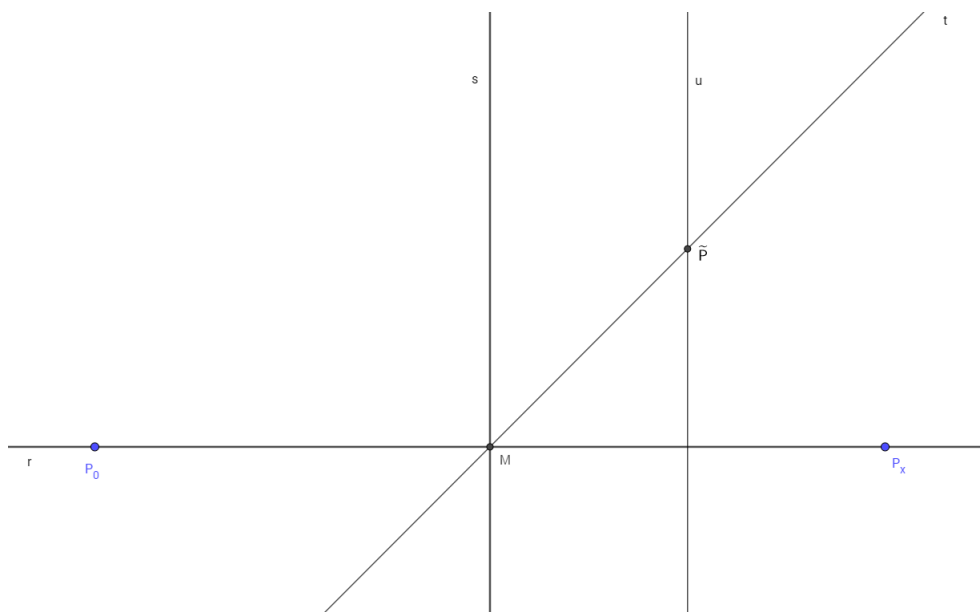


Figura 3.2:  $\tilde{P}$  appartiene a  $\mathcal{I}$

Inoltre appartengono a  $\mathcal{I}$ :

- la retta  $t$ , bisettrice dell'angolo  $\widehat{rMs}$  (per C4);
- la retta  $u$ , asse del segmento  $MP_x$  (per C3);
- il punto  $\tilde{P}$  di intersezione tra le rette  $t$  e  $u$  (per C2).

Allora  $\mathcal{I}$  è un insieme **P**-chiuso (in particolare **T**-chiuso) contenente  $P_0, P_x$  e un terzo punto  $\tilde{P}$  non allineato con  $P_0$  e  $P_x$  (vedi Figura 3.2); pertanto (**Lemma 2.3.6**) appartengono a  $\mathcal{I}$  gli assi  $x$  e  $y$  del nostro sistema di riferimento  $P_0xy$ . Inoltre, per C4, la bisettrice del primo e terzo quadrante appartiene a  $\mathcal{I}$ , quindi per il **Teorema 2.3.10** anche  $P_y = (0, 1)$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .

Riassumendo:

**Osservazione 3.2.2.** Ogni insieme  $\mathbf{P}$ -chiuso contenente  $P_0$  e  $P_x$  contiene anche il terzo nostro punto di riferimento  $P_y$ .

**Definizione 3.2.3.** Un punto, o una retta, del piano si dice costruibile secondo Pitagora se appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi  $\mathbf{P}$ -chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ .

Vediamo una caratterizzazione della costruibilità secondo Pitagora:

**Teorema 3.2.4** (Costruzioni secondo Pitagora). *Un punto, o una retta, del piano è costruibile secondo Pitagora se e soltanto se è l'ultimo elemento di una sequenza finita, ogni elemento della quale*

(RC0) è  $P_0$  o  $P_x$ , oppure

(RC1) è la retta passante per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, oppure

(RC2) è il punto di intersezione tra due rette che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC3) è l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC4) è la bisettrice di un angolo formato da due rette che la precedono nella sequenza.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 2.2.3**. □

Tenendo conto della **Osservazione 3.2.2** si trova subito che

**Osservazione 3.2.5.** Ogni punto, o retta, costruibile secondo Talete è costruibile secondo Pitagora.

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{P}$ -chiuso di punti e rette, contenente  $P_0$  e  $P_x$ . Siano  $A, B, P$  punti di  $\mathcal{I}$ ; per ogni retta  $r$  di  $\mathcal{I}$  passante per  $P$ , esiste in  $\mathcal{I}$  un punto  $Q$  giacente su  $r$  tale che  $d(P, Q) = d(A, B)$ .*

*Dimostrazione.* Visto il **Lemma 2.3.3**, possiamo limitarci a considerare il caso in cui  $A = P$ . Per (C4) la bisettrice dell'angolo  $\widehat{A}$  che  $AB$  forma con  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . Il simmetrico di  $B$  rispetto alla bisettrice di  $\widehat{A}$ , che per il **Corollario 2.3.8** appartiene a  $\mathcal{I}$ , è il punto  $Q$  cercato. □



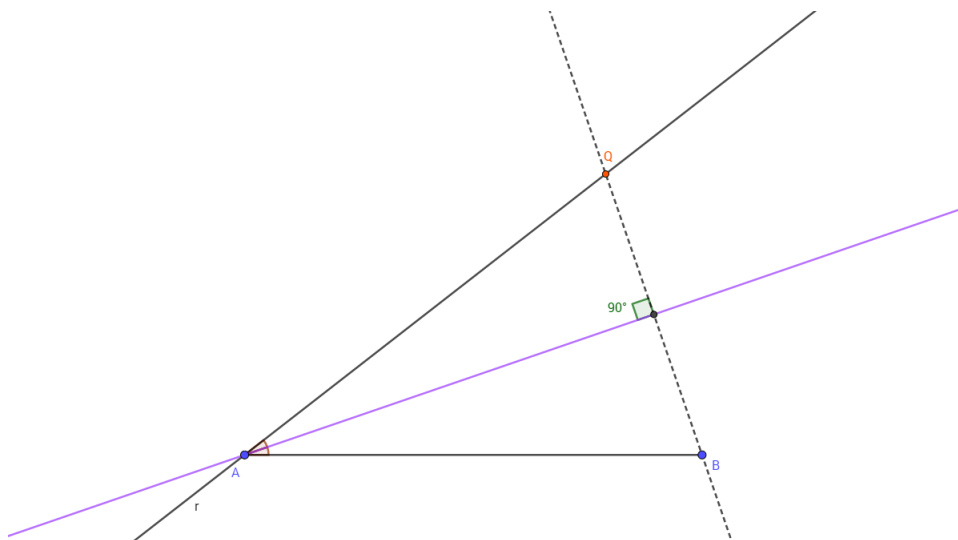


Figura 3.3: Riportare una misura

Detto  $AB$  un segmento costruito, con le regole di Talete eravamo in grado di costruire segmenti di lunghezza uguale ad  $AB$  solamente su una retta parallela o perpendicolare ad  $AB$ . Grazie al teorema precedente vediamo che, mediante le regole di Pitagora, possiamo costruire segmenti di lunghezza  $AB$  su qualsiasi retta costruita. Possiamo adesso introdurre la seguente

**Definizione 3.2.7.** Un numero reale  $a$  si dice costruibile secondo Pitagora (o, semplicemente, di Pitagora) se il suo valore assoluto  $|a|$  è la distanza tra due punti costruibili secondo Pitagora.

Indicheremo con  $\Pi$  l'insieme dei numeri di Pitagora. Possiamo individuare subito una fondamentale relazione tra punti costruibili secondo Pitagora e numeri di Pitagora:

**Proposizione 3.2.8.** *Un punto  $Q = (a, b)$  è costruibile secondo Pitagora se e soltanto se le sue coordinate  $a$  e  $b$  sono numeri di Pitagora.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $W$  l'intersezione di tutti gli insiemi  $\mathbf{P}$ -chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $Q$  è costruibile secondo Pitagora,  $Q$  appartiene a  $W$ , così come le sue proiezioni  $Q_x = (a, 0)$  e  $Q_y = (0, b)$  sugli assi cartesiani (**Corollario 2.3.5** e (C2)). Poiché  $|a| = d(Q_x, P_0)$  e  $|b| = d(Q_y, P_0)$ ,  $a$  e  $b$  sono numeri di Pitagora.

( $\Leftarrow$ ) Siano  $a$  e  $b$  numeri di Pitagora, allora esistono in  $W$  quattro punti  $A_1, A_2, B_1, B_2$  tali che  $d(A_1, A_2) = a$  e  $d(B_1, B_2) = b$ . Per il **Teorema 3.2.6** appartengono a  $W$  anche i punti  $Q_x = (a, 0)$  e  $Q_y = (0, b)$  e, per il **Corollario 2.3.7** e la regola (RC2), appartiene a  $W$  il punto  $Q = (a, b)$ , che è quindi costruibile secondo Pitagora.  $\square$

**Proposizione 3.2.9.** *Se  $a, b$  e  $c$  sono numeri di Pitagora, la retta  $r$  di equazione  $ax + by + c = 0$  è costruibile secondo Pitagora.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è del tutto analoga a quella della parte (ii) del **Corollario 2.3.16**, vista la **Proposizione 3.2.8**.  $\square$

Abbiamo scelto di non introdurre un analogo della **Definizione 3.2.7** per i numeri di Talete perché, non valendo il corrispondente della **Proposizione 3.2.8**, quello di numero di Talete sarebbe rimasto un concetto piuttosto povero di significato.

Per i numeri di Pitagora, invece, abbiamo risultati interessanti:

**Corollario 3.2.10.** *L'insieme dei numeri di Pitagora è un campo; inoltre  $\mathbb{Q} \subseteq \Pi$ .*

*Dimostrazione.* L'asserto segue immediatamente dal **Teorema 2.3.14** poiché  $\mathbb{Q}$  è contenuto in ogni sottocampo di  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Lemma 3.2.11.** *Siano  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\Pi$ , sia  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , allora  $x \in \Pi$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\alpha, \beta \in \Pi$ , per la **Proposizione 3.2.8** il punto  $P = (\alpha, \beta)$  è costruibile secondo Pitagora; la distanza  $d(P, P_0) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  è quindi un numero di Pitagora.  $\square$

**Corollario 3.2.12.** *L'insieme  $\sqrt{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{R} | z = \sqrt{|q|} \text{ con } q \in \mathbb{Q}\}$  è contenuto in  $\Pi$ .*

*Dimostrazione.* Vediamo innanzitutto che

$$\sqrt{\mathbb{N}} = \{w \in \mathbb{R} | w = \sqrt{n} \text{ con } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi$$

procediamo per induzione su  $n$ :

$\sqrt{0} = 0 \in \Pi$ , perché  $\mathbb{Q} \subseteq \Pi$  (**Corollario 3.2.10**).

Sia  $\sqrt{n} = m \in \Pi$ , allora  $\sqrt{n+1} = \sqrt{m^2 + 1} \in \Pi$  per il **Lemma 3.2.11**.

A questo punto è facile vedere che per ogni  $q \in \mathbb{Q}$  si ha  $\sqrt{|q|} \in \Pi$ ; infatti se  $q = \pm \frac{n}{m}$  con  $n, m \in \mathbb{N}$  si ha

$$\sqrt{|q|} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}} \in \Pi$$

ricordando che  $\Pi$  è un campo (**Corollario 3.2.10**).  $\square$

Pertanto le radici quadrate dei numeri razionali appartengono a  $\Pi$ , possono quindi essere costruite piegando la carta con le regole di Pitagora. Enunciamo adesso il teorema fondamentale di questa sezione, che caratterizza le coordinate dei punti costruibili secondo Pitagora.

**Teorema 3.2.13.** *Se un punto (o una retta) del piano è costruibile secondo Pitagora, esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c) il punto ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$   
(la retta ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}_k$ ).

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla lunghezza  $l$  della sequenza di costruzione del nostro punto o retta:

Se  $l = 1$  abbiamo a che fare con uno dei due punti  $P_0$  e  $P_x$  e l'asserto è ovvio. Supponiamo allora che il teorema sia vero per tutti i punti e le rette costruibili secondo Pitagora la cui sequenza di costruzione abbia lunghezza inferiore o uguale a  $l$ .

Sia

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di un punto  $P$ , allora

(p) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = r_i$  e  $\omega_j = r_j$  sono due rette costruibili secondo Pitagora e  $P$  è il loro punto di intersezione. Allora per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $r_i$  ha equazione  $ax + by + c = 0$  e  $r_j$  ha equazione  $a'x + b'y + c' = 0$ , con  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{F}_k$

cosicché le coordinate di  $P$  sono soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

e dunque appartengono a  $\mathbb{F}_k$ .

Analogamente, sia

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di una retta  $r$ , si hanno tre casi:

(r1) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Pitagora ed  $r$  è la retta passante per  $P_i P_j$ ; per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{F}_k$

La retta  $r$  ha equazione

$$(y_j - y_i)(x - x_i) - (x_j - x_i)(y - y_i) = 0$$

da cui l'asserto.

(r2) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Pitagora ed  $r$  è l'asse del segmento  $P_i P_j$ ; per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{F}_k$

La retta  $r$  ha equazione

$$2x(x_j - x_i) + 2y(y_j - y_i) + (y_i^2 - y_j^2 + x_i^2 - x_j^2) = 0$$

per cui ancora vale l'asserto.

(r3) esistono  $i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_i = r_i$  e  $\omega_j = r_j$  sono due rette costruibili secondo Pitagora ed  $r$  è la bisettrice dell'angolo formato da  $r_i$  e  $r_j$ ; per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $r_i$  ha equazione  $ax + by + c = 0$  e  $r_j$  ha equazione  $a'x + b'y + c' = 0$ , con  $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{F}_k$

La retta  $r$  ha equazione

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

che, detto  $x_k = \sqrt{a'^2 + b'^2}$  e  $x_{k+1} = \sqrt{a^2 + b^2}$  diventa

$$\left(a \frac{x_k}{x_{k+1}} \mp a'\right)x + \left(b \frac{x_k}{x_{k+1}} \mp b'\right)y + \left(c \frac{x_k}{x_{k+1}} \mp c'\right) = 0 \quad (3.2.1)$$

Definiamo  $\mathbb{F}_{k+1}$  come l'ampliamento di  $\mathbb{F}_k$  tramite  $x_k$  e  $\mathbb{F}_{k+2}$  come l'ampliamento di  $\mathbb{F}_{k+1}$  tramite  $x_{k+1}$ . I coefficienti di (3.2.1) appartengono a  $\mathbb{F}_{k+2}$ , per cui l'asserto vale anche in questo caso.  $\square$

Tramite il teorema precedente abbiamo adesso una caratterizzazione anche per i numeri di Pitagora:

**Teorema 3.2.14.** *Sia  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $\bar{x} \in \Pi$ ;
- (ii) esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:
  - (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
  - (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
  - (c)  $\bar{x} \in \mathbb{F}_k$ .

*Dimostrazione.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $\bar{x} \in \Pi$  per la **Proposizione 3.2.8** è costruibile secondo Pitagora il punto  $P = (\bar{x}, 0)$  e dunque vale la (ii) per il **Teorema 3.2.13**.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Tenendo conto del **Corollario 3.2.10** e del **Lemma 3.2.11** si dimostra facilmente che  $\bar{x} \in \Pi$  procedendo per induzione sulla lunghezza  $k$  della sequenza di sottocampi.  $\square$

**Corollario 3.2.15.** *Un punto (o una retta) del piano è costruibile secondo Pitagora se e soltanto se esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c) il punto ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$   
(la retta ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}_k$ ).

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) È il **Teorema 3.2.13**.

( $\Leftarrow$ ) Se  $P$  è un punto tale che esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $P$  ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$

allora per il **Teorema 3.2.14**  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono numeri di Pitagora, e per la **Proposizione 3.2.8**  $P$  è costruibile secondo Pitagora.

Se  $r$  è una retta tale che esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 = \alpha^2 + \beta^2$  per certi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $r$  ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}_k$ .

allora per il **Teorema 3.2.14**  $a, b$  e  $c$  sono numeri di Pitagora, e per la **Proposizione 3.2.9**  $r$  è costruibile secondo Pitagora.  $\square$

## Capitolo 4

# Euclide

### 4.1 La regola di Euclide

Aggiungiamo un'ulteriore regola:

(RP5) Dati due punti  $P$ ,  $Q$  e una piega  $r$ , si può effettuare ogni piega passante per  $Q$  che porti  $P$  su  $r$ .

Tale piega, quando esiste, può essere realizzata piegando  $P$  su un punto qualsiasi  $P'$  di  $r$ , e facendo scorrere poi  $P'$  lungo  $r$  fino a che la piega non passa per  $Q$  (Figura 4.1).

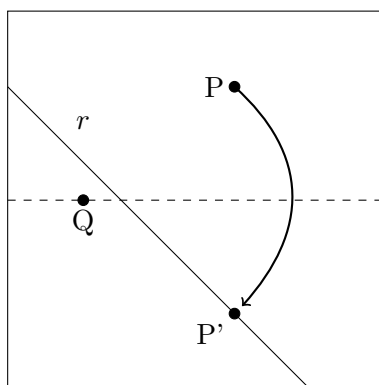


Figura 4.1: la piegatura di Euclide

Nel corso di questo capitolo vedremo che la piega descritta dalla regola (RP5) non è altro che la tangente passante per  $Q$  alla parabola di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ . Per farlo inizieremo ricordando alcuni risultati riguardanti le parabole, per poi mostrare come la nuova regola di piegatura possa essere utilizzata per estrarre radici quadrate. Analogamente a quanto fatto nel capitolo su Pitagora, definiremo un sottoinsieme dei numeri reali che possono essere costruiti tramite il nostro insieme di regole e ne daremo una

caratterizzazione, mostrando come formino un campo, chiuso per estrazione di radice quadrata.

## 4.2 Richiami sulle tangenti alle parabole

Scelti nel piano un punto  $F$  e una retta  $d$ , si dice *parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $d$*  l'insieme dei punti  $P$  del piano per i quali si ha

$$d(P, F) = d(P, d).$$

La retta perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco è asse di simmetria per la parabola, la indicheremo talvolta come *asse della parabola*.

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $\gamma$  una parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ .*

- (i) *Ogni retta parallela all'asse della parabola incontra la parabola in un solo punto;*
- (ii) *se  $P$  è un punto della parabola, esistono esattamente due rette passanti per  $P$  che incontrano la parabola nel solo punto  $P$ .*

*Dimostrazione.* Introduciamo un nuovo sistema di riferimento: detta  $F_1$  la proiezione del fuoco  $F$  sulla direttrice, scegliamo come origine il punto medio  $O$  del segmento  $FF_1$ , come asse delle ascisse l'asse del segmento  $FF_1$  e come unità di misura il doppio della lunghezza del segmento  $FF_1$ . Così facendo, nel nuovo sistema di riferimento  $Oxy$ , la parabola  $\gamma$  ha equazione  $y = x^2$ .

Ogni retta parallela all'asse della parabola ha un'equazione della forma  $x = x_0$  e quindi incontra la parabola nel solo punto  $P = (x_0, x_0^2)$ . Viceversa, sia  $P = (x_0, x_0^2)$  un punto della parabola e sia  $r$  una retta non parallela all'asse della parabola; allora  $r$  ha equazione

$$y = px + q$$

e passa per  $P$  se e soltanto se

$$x_0^2 = px_0 + q$$

ossia se e soltanto se

$$q = x_0^2 - px_0$$

Cerchiamo le intersezioni fra  $r$  e la parabola per imporre che l'unica di esse sia il punto  $P$ . Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = px + x_0^2 - px_0 \end{cases}$$



che ci conduce all'equazione in  $x$

$$x^2 - px - (x_0^2 - px_0) = 0$$

Come è noto, la retta  $r$  è tangente alla parabola in  $P$  se e soltanto se il discriminante  $\Delta$  di quest'ultima equazione è nullo. Imponiamo allora

$$\Delta = p^2 - 4px_0 + 4x_0^2 = 0$$

che ci porta a

$$p = \frac{4x_0 \pm \sqrt{16x_0^2 - 16x_0^2}}{2} = 2x_0$$

□

**Definizione 4.2.2.** Sia  $\gamma$  una parabola, una retta  $r$  si dice *tangente* alla parabola  $\gamma$  se incontra  $\gamma$  in un solo punto e non è parallela al suo asse.

Visto il significato geometrico della derivata di una funzione, ricordiamo che il coefficiente angolare della retta tangente a una parabola  $\gamma$  è uguale alla derivata di  $\gamma$ , calcolata nel punto di tangenza. Vediamo ora quante possibilità si hanno per le rette tangenti a una parabola:

**Teorema 4.2.3.** *Sia  $\gamma$  una parabola di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ . Per ogni punto  $P$  del piano:*

- (1) se  $d(P, F) < d(P, d)$  non esistono rette tangenti alla parabola  $\gamma$  passanti per  $P$ ;
- (2) se  $d(P, F) > d(P, d)$  esistono esattamente due tangenti a  $\gamma$  per  $P$ ;
- (3) se  $d(P, F) = d(P, d)$ , ossia se  $P$  appartiene alla parabola, esiste un'unica tangente a  $\gamma$  per  $P$ .

*Dimostrazione.* Introduciamo un nuovo sistema di riferimento: detta  $F_1$  la proiezione del fuoco  $F$  sulla direttrice, scegliamo come origine il punto medio  $O$  del segmento  $FF_1$ , come asse delle ascisse l'asse del segmento  $FF_1$  e come unità di misura il doppio della lunghezza del segmento  $FF_1$ . Così facendo, nel nuovo sistema di riferimento  $Oxy$ , la parabola  $\gamma$  ha equazione  $y = x^2$ .

Siano  $(x_0, y_0)$  le coordinate del punto  $P$ ;

$$\begin{aligned} d(P, F) < d(P, d) &\iff y_0 > x_0^2 \\ d(P, F) > d(P, d) &\iff y_0 < x_0^2 \\ d(P, F) = d(P, d) &\iff y_0 = x_0^2 \end{aligned}$$

Se  $r$  è una retta parallela all'asse della parabola non può essere tangente. Consideriamo allora una retta  $r$  passante per  $P$  di equazione

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Cerchiamo le intersezioni fra  $r$  e  $\gamma$ :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = y_0 + m(x - x_0) \end{cases}$$

da cui otteniamo l'equazione in  $x$

$$x^2 - mx + mx_0 - y_0 = 0. \quad (4.2.1)$$

$r$  è tangente alla parabola se e soltanto se il discriminante  $\Delta_1$  dell'equazione (4.2.1) è nullo:

$$\Delta_1 = m^2 - 4mx_0 + 4y_0 = 0 \quad (4.2.2)$$

che è un'altra equazione di secondo grado, in  $m$ , il cui discriminante è

$$\Delta_2 = 16x_0^2 - 16y_0.$$

Ora, nel caso (1) abbiamo  $y_0 > x_0^2$  quindi  $\Delta_2 < 0$ , per cui la (4.2.2) non ha soluzioni, ossia  $\Delta_1$  è diverso da zero per ogni retta passante per  $P$ , quindi non esistono tangenti a  $\gamma$  per  $P$ .

Nel caso (2)  $y_0 < x_0^2$  quindi  $\Delta_2 > 0$  strettamente, per cui la (4.2.2) ha esattamente due soluzioni, che sono i coefficienti angolari  $m_i$  delle due rette  $r_i$  passanti per  $P$  e tangenti a  $\gamma$ .

Nel caso (3)  $y_0 = x_0^2$  quindi  $\Delta_2 = 0$ , per cui la (4.2.2) ha un'unica soluzione, che è il coefficiente angolari  $m$  della retta  $r$  passante per  $P$  e tangente a  $\gamma$ .  $\square$

Introduciamo ora un metodo operativo per trovare la tangente a una parabola in un suo punto, noti il fuoco e la direttrice.

**Teorema 4.2.4.** *Per ogni punto  $P$  sulla direttrice  $d$ , sia  $r_P$  la retta per  $P$  ortogonale a  $d$  (e quindi parallela all'asse della parabola) e sia  $T$  l'unico punto in cui  $r_P$  incontra  $\gamma$ . L'asse del segmento  $FP$  è la retta tangente alla parabola  $\gamma$  nel punto  $T$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $T$  appartiene alla parabola  $\gamma$ ,

$$d(T, F) = d(T, d) = d(T, P)$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla costruzione di  $T$  ( $P$  è la proiezione ortogonale di  $T$  su  $d$ ). Allora  $T$  appartiene all'asse del segmento  $FP$ .

Se l'asse del segmento  $FP$  incontrasse  $\gamma$  in un altro punto  $\bar{T}$ , dovrebbe essere:

$$d(\bar{T}, P) = d(\bar{T}, F) = d(\bar{T}, d)$$

(la prima uguaglianza perché  $\bar{T}$  appartiene all'asse del segmento  $FP$ , la seconda perché  $\bar{T}$  appartiene alla parabola  $\gamma$ ) cioè la proiezione ortogonale di  $\bar{T}$  su  $d$  dovrebbe essere  $P$ . Ma allora  $\bar{T}$  apparterebbe alla retta  $r_P$ , che però incontra la parabola  $\gamma$  soltanto nel punto  $T$ , essendo parallela all'asse della parabola.  $\square$

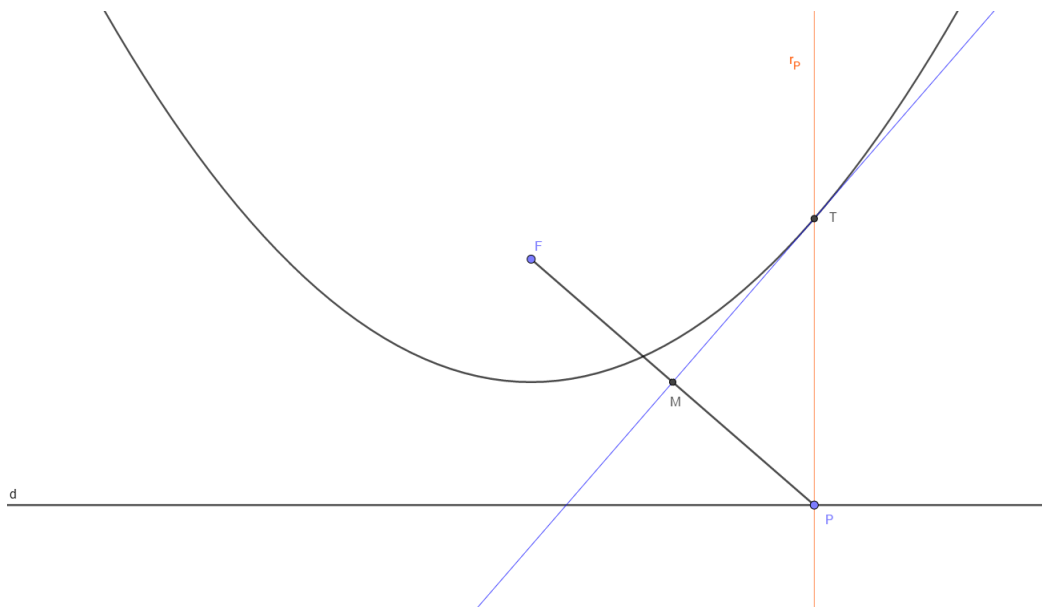


Figura 4.2: L'asse di  $FP$  è tangente a  $\gamma$

Dimostriamo adesso, con i prossimi due risultati, che la tangente a una parabola è l'asse di una simmetria che ne porta il fuoco sulla direttrice

**Corollario 4.2.5.** *Sia  $t$  una retta tangente alla parabola  $\gamma$  di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ . La simmetria assiale di asse  $t$  porta  $F$  su  $d$ , inoltre la proiezione ortogonale del punto di tangenza sulla direttrice coincide con  $\sigma_t(F)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $T$  l'unica intersezione fra  $t$  e  $\gamma$ , e sia  $P$  la proiezione ortogonale di  $T$  su  $d$ . Per il **Teorema 4.2.4**, l'asse del segmento  $FP$  è tangente alla parabola in  $T$ , dunque coincide con  $t$  (perché la tangente a una parabola in un suo punto è unica, è il caso (3) del **Teorema 4.2.3**). Pertanto, la simmetria assiale di asse  $t$  scambia  $F$  con  $P$ , ossia  $\sigma_t(F) = P$ , e in particolare  $\sigma_t$  porta  $F$  su  $d$ .  $\square$

**Corollario 4.2.6.** *Sia  $t$  l'asse di una simmetria assiale che porta il punto  $F$  sulla retta  $d$ . Allora  $t$  è tangente alla parabola  $\gamma$  di fuoco  $F$  e direttrice  $d$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $P = \sigma_t(F)$  appartenente a  $d$ , sia  $r_P$  la retta per  $P$  ortogonale a  $d$  e sia  $T$  il punto in cui  $r_P$  incontra la parabola  $\gamma$ . Poiché  $t$  è l'asse del segmento  $FP$ , per il **Teorema 4.2.4**  $t$  è tangente alla parabola  $\gamma$  nel punto  $T$ .  $\square$

Concludiamo questa sezione di riepilogo sulle parabole e le loro tangenti con un lemma che ci sarà utile più avanti; grazie a questo risultato possiamo esprimere le coordinate del punto di intersezione fra una tangente

alla parabola canonica e l'asse  $y$  in funzione delle coordinate del punto di tangenza.

**Lemma 4.2.7.** *Sia  $\gamma$  la parabola di equazione  $y = x^2$  e sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ . La retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $(x_0, x_0^2)$  interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, -x_0^2)$ .*

*Dimostrazione.* Cerchiamo l'equazione della retta tangente a  $\gamma$  in  $(x_0, x_0^2)$ :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - x_0^2 = m(x - x_0) \end{cases}$$

che ci conduce all'equazione in  $x$ :

$$x^2 - mx + mx_0 - x_0^2 = 0$$

ed eguagliando a zero il suo  $\Delta$  otteniamo

$$m^2 - 4mx_0 + 4x_0^2 = 0$$

da cui  $m = 2x_0$ . Allora la retta  $t$  tangente a  $\gamma$  in  $(x_0, x_0^2)$  ha equazione:

$$t : y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

e quindi interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0, -x_0^2)$ . □

### 4.3 Costruzioni secondo Euclide

**Definizione 4.3.1.** Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano si dice chiuso per Euclide (o **E**-chiuso) se è chiuso per Pitagora e inoltre

(C5) comunque presi in  $\mathcal{I}$  due punti  $P, Q$  e una retta  $r$ , ogni retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .

Visto il **Corollario 4.2.6**, tali rette sono le tangenti alla parabola di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ . Ricordando il **Teorema 4.2.3** si può notare che:

- se  $d(Q, P) < d(Q, r)$  non esistono rette passanti per  $Q$  che riflettono  $P$  su  $r$ ;
- se  $d(Q, P) > d(Q, r)$  esistono due rette passanti per  $Q$  che riflettono  $P$  su  $r$ ;
- se  $d(Q, P) = d(Q, r)$  esiste un'unica retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $r$ .

**Definizione 4.3.2.** Un punto, o una retta, del piano si dice costruibile secondo Euclide se appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi **E**-chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ .

Vediamo una caratterizzazione della costruibilità secondo Euclide:

**Teorema 4.3.3** (Costruzioni secondo Euclide). *Un punto, o una retta, del piano è costruibile secondo Euclide se e soltanto se è l'ultimo elemento di una sequenza finita, ogni elemento della quale*

(RC0) è  $P_0$  o  $P_x$ , oppure

(RC1) è la retta passante per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, oppure

(RC2) è il punto di intersezione tra due rette che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC3) è l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC4) è la bisettrice di un angolo formato da due rette che la precedono nella sequenza, oppure

(RC5) è una retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $l$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti ed  $l$  una retta che la precedono nella sequenza.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 2.2.3**. □

**Osservazione 4.3.4.** Ogni punto, o retta, costruibile secondo Pitagora è costruibile secondo Euclide.

Consideriamo ora un insieme  $\mathcal{I}$  **E**-chiuso contenente  $P_0, P_x$ . Il punto  $F = (0, \frac{1}{4})$  e la retta  $d$ , di equazione  $y = -\frac{1}{4}$ , appartengono a  $\mathcal{I}$  (segue dal **Teorema 2.3.14** e dal **Lemma 2.3.15**). Definiamo  $\gamma$  come la parabola che ha fuoco  $F$  e direttrice  $d$ ;  $\gamma$  ha equazione  $y = x^2$  nel nostro sistema di riferimento  $P_0xy$ .

Vediamo come la regola (C5) ci permetta di costruire rette tangenti alla parabola  $\gamma$ ; questa proprietà sarà fondamentale per ottenere la chiusura sotto radice quadrata, che non potevamo garantire in generale per i numeri di Pitagora.

**Corollario 4.3.5.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **E**-chiuso contenente  $P_0, P_x$ . Sia  $Q$  un punto di  $\mathcal{I}$ , le eventuali rette per  $Q$  tangenti a  $\gamma$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $t$  una retta per  $Q$  tangente a  $\gamma$ , per il **Corollario 4.2.5** la simmetria assiale di asse  $t$  porta  $F$  su  $d$ . Allora  $t$  è una retta per  $Q$  che riflette  $F$  su  $d$ , e quindi appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C5).  $\square$

**Lemma 4.3.6.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **E**-chiuso contenente  $P_0, P_x$ . Sia  $t \in \mathcal{I}$  tangente a  $\gamma$ , allora il punto  $T$  di intersezione fra  $t$  e  $\gamma$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .*

*Dimostrazione.* Per il **Corollario 4.2.5** la proiezione ortogonale di  $T$  su  $d$  è il punto  $\sigma_t(F)$ , che appartiene a  $\mathcal{I}$  visto che  $F, t \in \mathcal{I}$  (**Corollario 2.3.8**). La retta  $r$ , perpendicolare a  $d$  passante per  $\sigma_t(F)$  appartiene a  $\mathcal{I}$  (**Corollario 2.3.7**) e quindi il punto  $T$  di intersezione fra  $r$  e  $t$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C2).  $\square$

**Lemma 4.3.7.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme **E**-chiuso contenente  $P_0, P_x$ . Sia  $R = (0, r) \in \mathcal{I}$ , allora appartiene a  $\mathcal{I}$  anche il punto  $(\sqrt{|r|}, r)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $R = (0, r) \in \mathcal{I}$  anche  $Q = (0, -r) \in \mathcal{I}$ . Sia  $t$  la retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $T = (\sqrt{|r|}, r)$ , per il **Lemma 4.2.7**  $t$  interseca l'asse  $y$  in  $Q$ ; allora  $t$  è la tangente a  $\gamma$  passante per  $Q$ , appartiene quindi a  $\mathcal{I}$  per il **Corollario 4.3.5**. Dal momento che  $t \in \mathcal{I}$ , anche  $T$  appartiene a  $\mathcal{I}$  per il **Lemma 4.3.6**, come si voleva.  $\square$

**Definizione 4.3.8.** Un numero reale  $a$  si dice costruibile secondo Euclide (o, semplicemente, di Euclide) se il suo valore assoluto  $|a|$  è la distanza tra due punti costruibili secondo Euclide.

Indicheremo con  $\mathcal{E}$  l'insieme dei numeri di Euclide.

**Proposizione 4.3.9.** *Un punto  $Q = (a, b)$  è costruibile secondo Euclide se e soltanto se le sue coordinate  $a$  e  $b$  sono numeri di Euclide.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella della **Proposizione 3.2.8**.  $\square$

**Corollario 4.3.10.** *L'insieme dei numeri di Euclide è un campo; inoltre  $\mathbb{Q} \subseteq \Pi \subseteq \mathcal{E}$ .*

*Dimostrazione.* Che  $\mathcal{E}$  sia un campo deriva dal **Teorema 2.3.14**.  $\Pi \subseteq \mathcal{E}$  segue dall' **Osservazione 4.3.4**.  $\square$

Ora che abbiamo attribuito la struttura di campo a  $\mathcal{E}$ , dimostriamo che, come sperato, è chiuso sotto estrazione di radice quadrata:

**Lemma 4.3.11.** *Sia  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x^2 \in \mathcal{E}$ , allora  $x \in \mathcal{E}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $x^2 \in \mathcal{E}$ , per la **Proposizione 4.3.9** è costruibile secondo Euclide il punto  $Q = (0, x^2)$ ; allora per il **Lemma 4.3.7** è costruibile secondo Euclide anche il punto  $(x, x^2)$ , quindi, sempre per la **Proposizione 4.3.9**,  $x \in \mathcal{E}$ .  $\square$

**Osservazione 4.3.12.** Se  $F$  e  $d$  sono un punto e una retta costruibili secondo Euclide, la parabola  $\Gamma$  di fuoco  $F$  e direttrice  $d$  ha un'equazione della forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

con  $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{E}$ .

*Dimostrazione.* Se

$$F = (x_F, y_F) \quad \text{e} \quad d : lx + my + n = 0$$

sono il fuoco e la direttrice di  $\Gamma$ , costruibili secondo Euclide, abbiamo visto che  $x_F, y_F, l, m, n$  appartengono a  $\mathcal{E}$ .

Allora l'equazione di  $\Gamma$ , che può essere ottenuta imponendo

$$d(P, F) = d(P, d)$$

dove  $P$  è un generico punto di  $\Gamma$ , ha la forma

$$\frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2} = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$$

come si voleva.  $\square$

Enunciamo adesso, al solito, la caratterizzazione dei numeri di Euclide:

**Teorema 4.3.13.** *Se un punto (o una retta) del piano è costruibile secondo Euclide, esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*

(a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;

(b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$ ;

(c) il punto ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$   
(la retta ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}_k$ ).

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla lunghezza  $l$  della sequenza di costruzione del nostro punto o retta:

Se  $l = 0$  abbiamo a che fare con uno dei due punti  $P_0$  e  $P_1$  e l'asserto è ovvio. Supponiamo allora che il teorema sia vero per tutti i punti e le rette costruibili secondo Euclide la cui sequenza di costruzione abbia lunghezza inferiore o uguale a  $l$ .

La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 3.2.13** per i casi (p), (r1), (r2), (r3).

Sia ora

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di una retta  $r$  tale che:

(r4) esistono  $h, i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_h = r_h$  è una retta costruibile secondo Euclide,  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Euclide ed  $r$  è una retta passante per  $P_i$  che riflette  $P_j$  su  $r_h$ ; per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

(a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;

(b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$ ;

(c)  $r_h$  ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c, x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{F}_k$

Abbiamo visto (**Corollario 4.2.6**) che  $r$  deve essere tangente alla parabola  $\Gamma$  di fuoco  $P_j$  e direttrice  $r_h$ , inoltre  $r$  passa per  $P_i$ . Sia allora

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

l'equazione della parabola  $\Gamma$ , che come abbiamo visto ha tutti i coefficienti in  $\mathcal{E}$ ; l'equazione di  $r$  è ottenuta dal sistema

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \\ y - y_{P_i} = m(x - x_{P_i}) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

imponendo il suo discriminante uguale a zero si ottiene un'equazione di secondo grado in  $m$  (i termini di terzo e quarto grado si elidono),

$$Am^2 + Bm + C = 0$$



che ci fornisce i coefficienti angolari delle rette tangenti alla parabola  $\Gamma$  passanti per  $P_i$ , nella forma

$$m_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

pertanto  $m_{1,2}$  appartengono all'ampliamento di  $\mathbb{F}_k$  mediante un  $x_k$  tale che  $x_k^2 \in \mathbb{F}_k$ . Sostituendo  $m_{1,2}$  nella seconda equazione di (4.3.1) otteniamo l'equazione di  $r$  e dell'altra retta tangente a  $\Gamma$  passante per  $P_i$ , i cui coefficienti sono della forma richiesta.  $\square$

**Teorema 4.3.14.** *Sia  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $\bar{x} \in \mathcal{E}$ ;
- (ii) *esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*
  - (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
  - (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$ ;
  - (c)  $\bar{x} \in \mathbb{F}_k$ .

*Dimostrazione.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $\bar{x} \in \mathcal{E}$  per la **Proposizione 4.3.9** è costruibile secondo Euclide il punto  $P = (\bar{x}, 0)$  e dunque vale la (ii) per il **Teorema 4.3.13**.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Per il **Corollario 4.3.10** e il **Lemma 4.3.11** è immediato che  $\bar{x} \in \mathcal{E}$ .  $\square$

Osserviamo che i punti e le rette costruibili secondo Euclide sono esattamente i punti e le rette costruibili con riga e compasso.

## 4.4 Un commento alle regole di costruzione

In questa sezione riconsideriamo le nostre regole di costruzione, evidenziando come alcune di esse siano ormai superflue. Definiamo a questo scopo una “chiusura circa-euclidea” e mostriamo come questa sia equivalente alla chiusura propriamente euclidea.

**Definizione 4.4.1.** Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano si dice chiuso per circa-Euclide (o  $\tilde{\mathbf{E}}$ -chiuso) se:

- (C2) comunque prese due rette distinte appartenenti a  $\mathcal{I}$ , il loro (eventuale) unico punto di intersezione appartiene a  $\mathcal{I}$  ;
- (C3) comunque presi due punti  $P, Q$  appartenenti a  $\mathcal{I}$ , l’asse del segmento  $PQ$  appartiene a  $\mathcal{I}$ ;
- (C5) comunque presi una retta  $r$  e due punti  $P, Q$  appartenenti a  $\mathcal{I}$ , ogni retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $r$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .

**Teorema 4.4.2.** *Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano, contenente  $P_0$  e  $P_x$ , è  $\mathbf{E}$ -chiuso se e soltanto se è  $\tilde{\mathbf{E}}$ -chiuso.*

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{I}$  è  $\mathbf{E}$ -chiuso allora è banalmente  $\tilde{\mathbf{E}}$ -chiuso. Viceversa sia  $\mathcal{I}$   $\tilde{\mathbf{E}}$ -chiuso, vediamo che:

- (C1) comunque presi due punti appartenenti a  $\mathcal{I}$ , la retta passante per essi appartiene a  $\mathcal{I}$ ;
- (C4) comunque prese due rette  $r_1, r_2$  appartenenti a  $\mathcal{I}$ , le rette bisettrici degli angoli individuati da  $r_1$  e  $r_2$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .

Innanzitutto mostriamo (C1):

Siano  $P$  e  $Q$  due punti di  $\mathcal{I}$ , per (C3) l’asse  $l$  del segmento  $PQ$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . Dato che  $d(P, Q) > d(P, l)$ , per (C5) esiste in  $\mathcal{I}$  una retta  $m$  passante per  $P$  che riflette  $Q$  su  $l$ .

La simmetria rispetto alla retta  $PQ$  lascia fisso  $P$ , che appartiene alla retta  $m$ , pertanto  $PQ$  è una retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $m$ , quindi appartiene a  $\mathcal{I}$  per (C5).

Vediamo adesso che per  $\mathcal{I}$  vale (C4):

Siano  $l, m \in \mathcal{I}$  due rette incidenti e sia  $Q$  il loro punto di intersezione; per (C2)  $Q$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . Per il **Lemma 2.3.4** esiste un altro punto  $P \in \mathcal{I}$  che giace sulla retta  $l$ .

Per (C5) la retta  $r$  che passa per  $Q$  e riflette  $P$  su  $m$  appartiene a  $\mathcal{I}$ . Tale retta è proprio la bisettrice dell’angolo  $l\hat{Q}m$ , infatti, detto  $M$  il punto medio di  $P\sigma_r(P)$ , i triangoli  $PQM$  e  $QM\sigma_r(P)$  sono uguali, in particolare  $P\hat{Q}M = M\hat{Q}\sigma_r(P)$ .  $\square$

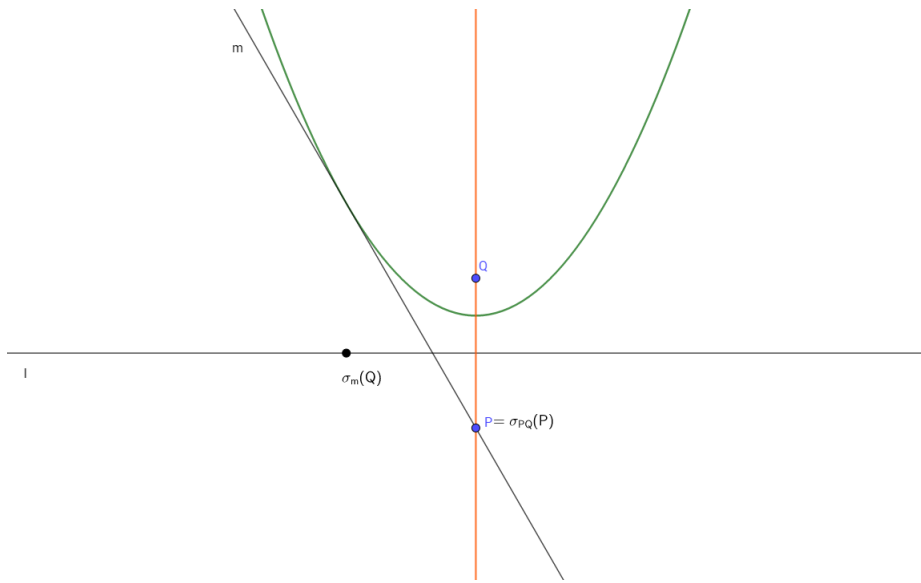


Figura 4.3: in  $\mathcal{I}$  vale (C1)

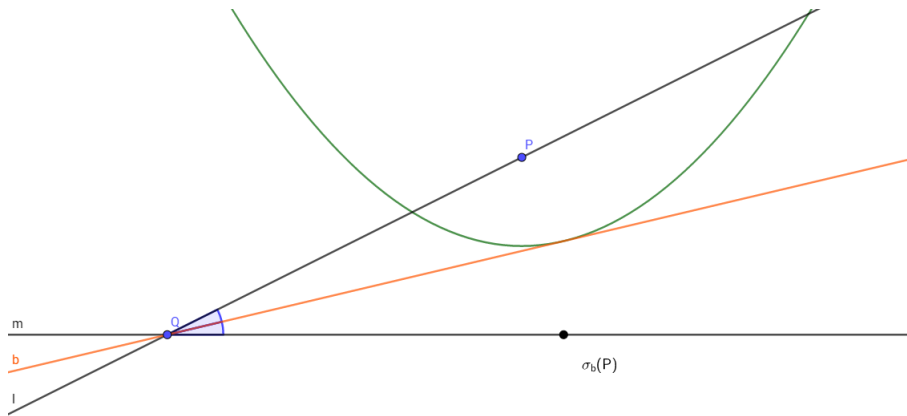


Figura 4.4: in  $\mathcal{I}$  vale (C4)

## Capitolo 5

# Huzita

### 5.1 La regola di Huzita

Introduciamo l'ultima regola di piegatura:

(RP6) Dati due punti  $P$ ,  $Q$  e due pieghe  $r$ ,  $s$ , si può effettuare ogni piega che porti  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$ .

Questa piega, quando esiste, può essere realizzata piegando  $P$  su un punto qualsiasi di  $r$  e facendo scorrere  $P$  su  $r$  finché  $Q$  non giace su  $s$ .

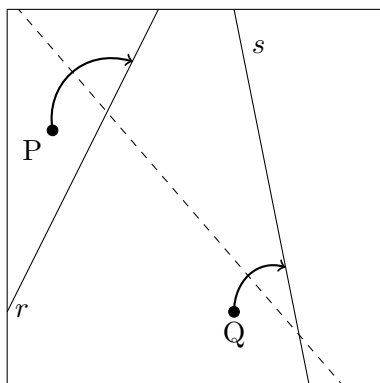


Figura 5.1: la piegatura di Huzita

Dai risultati del capitolo precedente, si capisce subito che la piega descritta dalla regola (RP6) non è altro che la tangente comune a due parabole, una di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ , l'altra di fuoco  $Q$  e direttrice  $s$ .

Vedremo come la regola di Huzita ci permetta di espandere il nostro insieme di numeri costruibili, mantenendo le proprietà di campo e di chiusura sotto radice quadrata, ottenendo in più la chiusura per radice cubica.

## 5.2 Costruzioni secondo Huzita

**Definizione 5.2.1.** Un insieme  $\mathcal{I}$  di punti e rette del piano si dice chiuso per Huzita (o **H**-chiuso) se è chiuso per Euclide e inoltre

(C6) comunque presi in  $\mathcal{I}$  due punti  $P, Q$  e due rette  $r, s$ , ogni retta che riflette  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$  appartiene a  $\mathcal{I}$ .

Visto il **Corollario 4.2.6**, tale retta è una tangente comune alla parabola  $\gamma_1$ , di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ , e alla parabola  $\gamma_2$ , di fuoco  $Q$  e direttrice  $s$ .

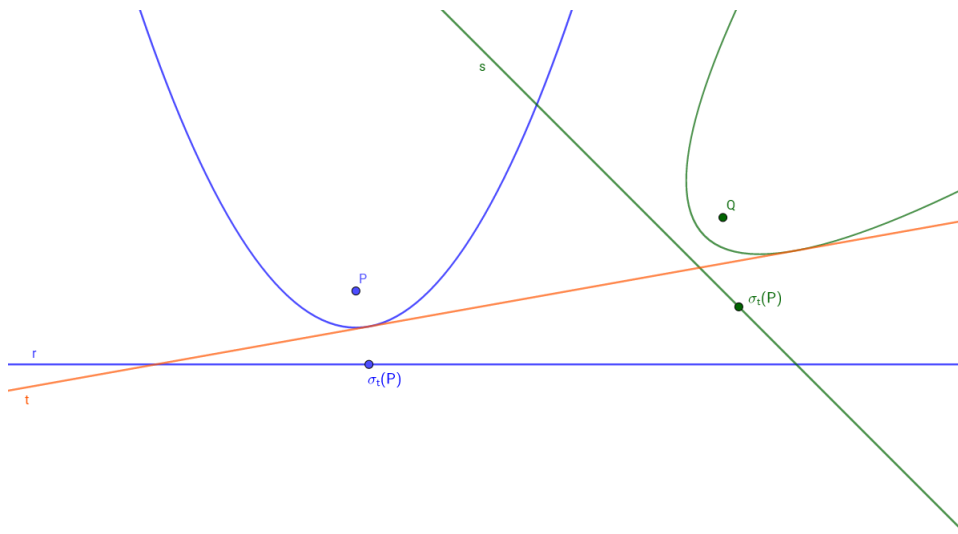


Figura 5.2: La regola di costruzione (C6)

Osserviamo che, nel caso in cui il punto  $Q$  si trovi già sulla retta  $s$ , la regola (C6) coincide con la (C5), che ne rappresenta quindi un caso particolare. Ricordando la sezione 4.4 allora, si può notare che le regole di Huzita (C1) – (C6) sono equivalenti alle sole (C2), (C3) e (C6).

**Definizione 5.2.2.** Un punto, o una retta, del piano si dice costruibile secondo Huzita se appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi **H**-chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ .

Vediamo una caratterizzazione della costruibilità secondo Huzita:

**Teorema 5.2.3** (Costruzioni secondo Huzita). *Un punto, o una retta, del piano è costruibile secondo Huzita se e soltanto se è l'ultimo elemento di una sequenza finita, ogni elemento della quale*

(RC0) è  $P_0$  o  $P_x$ , oppure

(RC1) è la retta passante per due punti  $P, Q$  che la precedono nella sequenza, oppure

(RC2) è il punto di intersezione tra due rette che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC3) è l'asse di un segmento  $PQ$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti che lo precedono nella sequenza, oppure

(RC4) è la bisettrice di un angolo formato da due rette che la precedono nella sequenza, oppure

(RC5) è una retta passante per  $Q$  che riflette  $P$  su  $l$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti ed  $l$  una retta che la precedono nella sequenza;

(RC6) è una retta che riflette contemporaneamente  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$ , dove  $P$  e  $Q$  sono due punti e  $r$  ed  $s$  due rette che la precedono nella sequenza.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 2.2.3**.  $\square$

**Osservazione 5.2.4.** Ogni punto, o retta, costruibile secondo Euclide è costruibile secondo Huzita.

Grazie ai risultati del capitolo precedente, possiamo immediatamente comprendere che cosa otteniamo con l'aggiunta della regola (C6):

**Corollario 5.2.5.** Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{H}$ -chiuso contenente  $P_0, P_x$ . Siano  $P, Q$  due punti di  $\mathcal{I}$  e  $r, s$  due rette di  $\mathcal{I}$ . Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  le parabole di fuochi rispettivamente  $P$  e  $Q$  e direttrici rispettivamente  $r$  ed  $s$ ; le eventuali tangenti comuni alle parabole  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  appartengono a  $\mathcal{I}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $t$  una tangente comune alle due parabole, allora per il **Corollario 4.2.5**  $t$  riflette  $P$  su  $r$  e  $Q$  su  $s$ , appartiene quindi a  $\mathcal{I}$  per (C6).  $\square$

**Definizione 5.2.6.** Un numero reale  $a$  si dice costruibile secondo Huzita (o, semplicemente, di Huzita) se il suo valore assoluto  $|a|$  è la distanza tra due punti costruibili secondo Huzita.

Indicheremo con  $\mathcal{H}$  l'insieme dei numeri di Huzita; vediamo ora come questi si colleghino ai punti e alle rette costruibili secondo Huzita.

**Proposizione 5.2.7.** Un punto  $Q = (a, b)$  è costruibile secondo Huzita se e soltanto se le sue coordinate  $a$  e  $b$  sono numeri di Huzita.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella della **Proposizione 3.2.8**.  $\square$

**Proposizione 5.2.8.** *Una retta  $r$  è costruibile secondo Huzita se e soltanto se ha un'equazione a coefficienti in  $\mathcal{H}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $J$  l'intersezione di tutti gli insiemi **H**-chiusi contenenti  $P_0$  e  $P_x$ ;  $r$  è costruibile secondo Huzita se e soltanto se appartiene a  $J$ , che è un insieme **H**-chiuso (quindi in particolare **T**-chiuso) contenente  $P_0$ ,  $P_x$  (e  $P_y$ , **Osservazione 3.2.2**). Per il **Lemma 2.3.15** allora  $r \in J$  se e soltanto se ha un'equazione i cui coefficienti sono coordinate di punti in  $J$ , ossia (**Proposizione 5.2.7**) se e soltanto se ha un'equazione a coefficienti in  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Corollario 5.2.9.** *L'insieme dei numeri di Huzita è un campo; inoltre  $\mathbb{Q} \subseteq \Pi \subseteq \mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$ .*

*Dimostrazione.* Che  $\mathcal{H}$  sia un campo deriva dal **Teorema 2.3.14**.  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$  segue dall' **Osservazione 5.2.4**.  $\square$

Ora che abbiamo verificato che i numeri di Huzita formano un campo, vediamo come, analogamente ai numeri di Euclide, siano chiusi sotto estrazione di radice quadrata.

**Lemma 5.2.10.** *Sia  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x^2 \in \mathcal{H}$ , allora  $x \in \mathcal{H}$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione ricalca quella del **Lemma 4.3.11**. Se  $x^2 \in \mathcal{H}$ , per la **Proposizione 5.2.7** è costruibile secondo Huzita il punto  $Q = (0, x^2)$ ; allora, essendo gli insiemi **H**-chiusi in particolare anche **E**-chiusi, possiamo applicare il **Lemma 4.3.7**. Il punto  $(x, x^2)$  è quindi costruibile secondo Huzita pertanto, sempre per la **Proposizione 5.2.7**,  $x \in \mathcal{H}$ .  $\square$

### 5.3 Osservazioni sul cambio di sistema di riferimento

Finora abbiamo sempre lavorato con il sistema di riferimento  $P_0xy$  definito all'inizio del lavoro, ci troveremo presto nella necessità di utilizzarne un altro. In questa sottosezione studiamo quali proprietà delle coordinate si conservano cambiando opportunamente il sistema di riferimento.

Procediamo per gradi: sia  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$  un punto costruibile secondo Huzita e consideriamo la traslazione che porta l'origine  $P_0$  in  $\bar{P}$  e quindi trasforma l'asse  $x$  nella retta  $\bar{x}$  ad esso parallela

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

si capisce immediatamente che le coordinate di un punto generico  $Q = (x', y')$  nel nuovo sistema di riferimento  $\bar{P}\bar{x}\bar{y}$  sono numeri di Huzita se e

soltanto se lo erano le coordinate  $(x, y)$  di  $Q$  nel vecchio sistema di riferimento  $P_0xy$ .

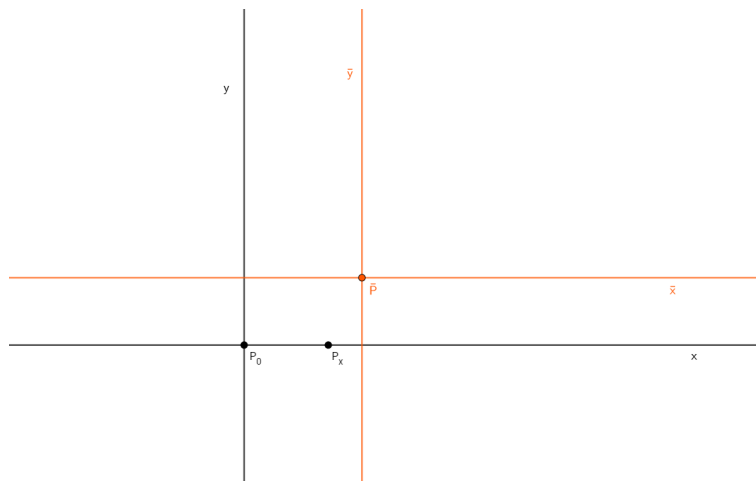


Figura 5.3: traslazione del sistema di riferimento



Sia ora  $r$  una retta costruibile secondo Huzita, passante per  $P_0$  che formi un angolo  $\alpha$  con l'asse  $x$ , consideriamo la rotazione che mantiene l'origine in  $P_0$  e porta l'asse  $x$  su  $r$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Per ottenere lo stesso risultato della traslazione, è sufficiente dimostrare che  $\cos(\alpha)$  e  $\sin(\alpha)$  sono numeri di Huzita:

Sia  $A$  l'intersezione di tutti gli insiemi **H**-chiusi contenenti  $P_0, P_x$ , se  $r$  appartiene ad  $A$  allora per il **Teorema 3.2.6** esiste in  $A$  un punto  $Q$  giacente su  $r$  tale che  $d(P, Q) = d(P_0, P_x) = 1$ .  $Q$  ha coordinate  $(\pm \cos(\alpha), \pm \sin(\alpha))$  in  $P_0xy$ ,  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$  sono quindi numeri di Huzita.

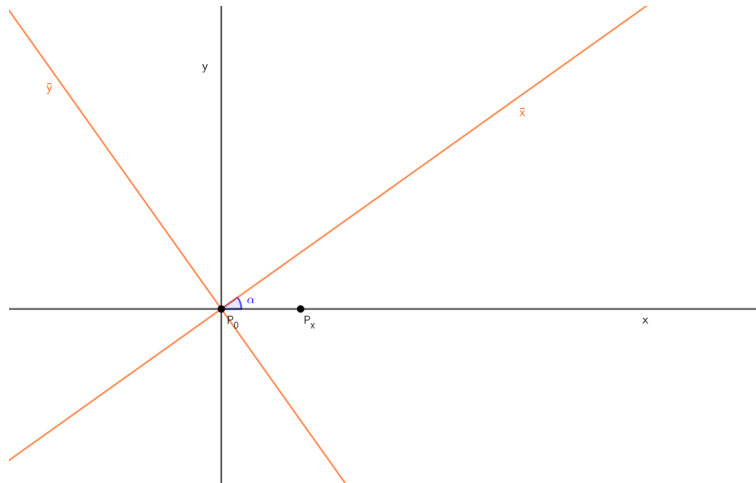


Figura 5.4: rotazione del sistema di riferimento attorno all'origine

Dovrebbe risultare a questo punto evidente il seguente:

**Teorema 5.3.1.** *Sia  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$  un punto costruibile secondo Huzita; sia  $r$  una retta costruibile secondo Huzita che passi per  $P$  e formi con l'asse  $x$  un angolo  $\alpha$ . Sia  $\bar{P}\bar{x}\bar{y}$  il sistema di riferimento ottenuto da  $P_0xy$  tramite la rototraslazione*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

*che porta  $P_0$  in  $\bar{P}$  e la retta  $P_0P_x$  nella retta  $r$ . Le coordinate  $(x', y')$  di un punto  $Q$  rispetto a  $\bar{P}\bar{x}\bar{y}$  sono numeri di Huzita se e soltanto se lo sono le sue coordinate  $(x, y)$  rispetto a  $P_0xy$ .*

*Dimostrazione.* Si capisce immediatamente che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono numeri di Huzita, vediamo che anche  $\cos(\alpha)$  e  $\sin(\alpha)$  lo sono: se  $A$  è l'intersezione di tutti gli insiemi  $\mathbf{H}$ -chiusi contenenti  $P_0, P_x$ , come abbiamo visto prima se  $r$  appartiene ad  $A$  allora per il **Teorema 3.2.6** il punto  $Q$  giacente su  $r$  a distanza 1 da  $\bar{P}$  appartiene ad  $A$ .  $Q$  ha coordinate  $(\bar{x} + \cos(\alpha), \bar{y} + \sin(\alpha))$ , per cui  $\cos(\alpha)$  e  $\sin(\alpha)$  sono numeri di Huzita.

A questo punto, ricordando che  $\mathcal{H}$  è un campo, se  $x$  e  $y$  sono numeri di Huzita, anche

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) + \bar{x} \\ y' &= -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) + \bar{y} \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

lo sono. Per il viceversa è sufficiente invertire la rototraslazione: se  $x'$  e  $y'$  sono numeri di Huzita, anche

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\alpha) - y' \sin(\alpha) - \bar{x} \\ y &= x' \sin(\alpha) + y' \cos(\alpha) - \bar{y} \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

lo sono. □

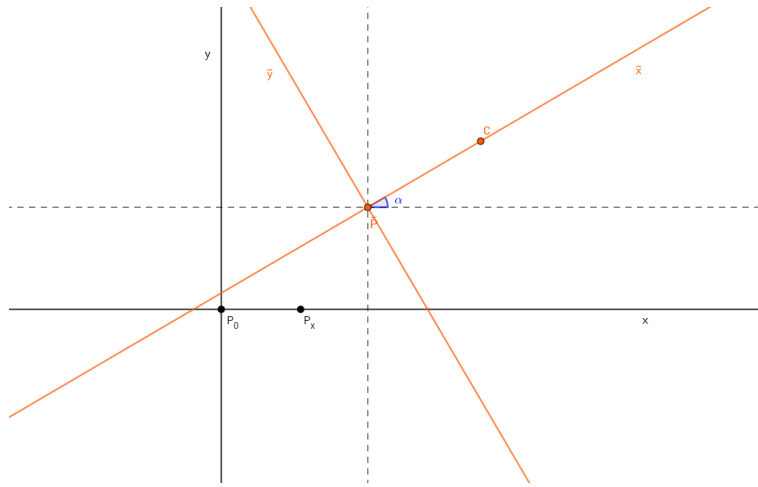


Figura 5.5: rotazione del sistema di riferimento (caso generale)

## 5.4 Conclusioni sulle costruzioni secondo Huzita

Vogliamo ora dimostrare che i numeri di Huzita sono chiusi sotto estrazione di radice cubica. Per fare ciò ci serviremo di due parabole particolari; innanzitutto verifichiamo che i loro fuochi e le loro direttrici siano costruibili secondo Huzita:

**Lemma 5.4.1.** *Sia  $\mathcal{I}$  un insieme  $\mathbf{H}$ -chiuso contenente  $P_0, P_x$  e sia  $b \in \mathcal{H}$ . Appartengono all'insieme  $\mathcal{I}$  anche i fuochi e le direttrici delle parabole  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , aventi equazioni:*

$$\Gamma_1 : \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx \quad e \quad \Gamma_2 : y = \frac{1}{2}x^2$$

*Dimostrazione.* Utilizzando la ben nota formula per fuoco e direttrice di una parabola si ottiene:

$$F_1 = \left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad d_1 : x = -\frac{b}{2}$$

$$F_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad d_2 : y = -\frac{1}{2}$$

che appartengono a  $\mathcal{H}$  per le **Proposizioni 5.2.7** e **5.2.8**, ricordando che i numeri di Huzita formano un campo.  $\square$

**Lemma 5.4.2.** *Siano  $a$  e  $b$  in  $\mathbb{R}$  e siano*

$$\Gamma_1 : \left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx \tag{5.4.1}$$

$$\Gamma_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \quad (5.4.2)$$

due parabole. Sia  $y = mx + q$  l'equazione della retta tangente simultaneamente a  $\Gamma_1$  e a  $\Gamma_2$ , allora  $m$  soddisfa l'equazione

$$m^3 + am + b = 0$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che la retta  $t$  sia tangente a  $\Gamma_1$  nel punto  $(x_1, y_1)$  e tangente a  $\Gamma_2$  in  $(x_2, y_2)$ . Allora derivando l'equazione di  $\Gamma_1$  rispetto a  $x$  otteniamo:

$$2(y - \frac{1}{2}a)y' = 2b$$

che, valutata in  $(x_1, y_1)$  diventa:

$$m = \frac{b}{y_1 - \frac{1}{2}a}$$

da cui, utilizzando la (5.4.1),

$$x_1 = \frac{(y_1 - \frac{1}{2}a)^2}{2b} = \frac{b}{2m^2}$$

Derivando invece l'equazione di  $\Gamma_2$  rispetto a  $x$  abbiamo:

$$y' = x$$

da cui, valutandola in  $(x_2, y_2)$

$$m = x_2$$

pertanto, dalla (5.4.2),

$$y_2 = \frac{1}{2}m^2$$

Ora, ricavando il coefficiente angolare  $m$  di  $t$  come rapporto incrementale:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{m}}{m - \frac{b}{2m^2}}$$

che dopo alcune semplificazioni diventa

$$m^3 + am + b = 0$$

come si voleva. □

**Lemma 5.4.3.** *Sia  $z \in \mathbb{R}$  tale che  $z^3 \in \mathcal{H}$ , allora  $z \in \mathcal{H}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $b = z^3 \in \mathcal{H}$  e sia  $t$  la retta tangente alle parabole

$$\tilde{\Gamma}_1 : y^2 = 2bx \quad \text{e} \quad \Gamma_2 : y = \frac{1}{2}x^2$$

per il **Corollario 5.2.5**,  $t$  è costruibile secondo Huzita.

La retta  $t$  non è parallela all'asse  $y$ , altrimenti non sarebbe tangente a  $\Gamma_2$ , per la **Proposizione 5.2.8** esiste una equazione di  $t$  della forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}, \quad \beta \neq 0$$

allora  $t$  ha equazione

$$y = mx + q \quad \text{con} \quad m = -\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad q = -\frac{\gamma}{\beta}$$

dove  $m$  e  $q$  sono numeri di Huzita.

Ricordando il **Lemma 5.4.2** notiamo che  $m$  deve soddisfare

$$m^3 + b = 0$$

pertanto se  $z^3 = b$  appartiene a  $\mathcal{H}$ , anche  $z = -m$  appartiene a  $\mathcal{H}$ , come si voleva.  $\square$

Notiamo che, per le costruzioni secondo Huzita, è ancora valida la **Osservazione 4.3.12** vista nel capitolo Euclide (la dimostrazione è analoga), ossia se  $F$  e  $d$  sono un punto e una retta costruibili secondo Huzita, la parabola  $\Gamma$  di fuoco  $F$  e direttrice  $d$  ha un'equazione della forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

con  $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 5.4.4.** *Se un punto (o una retta) del piano è costruibile secondo Huzita, esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$  oppure  $x_i^3 \in \mathbb{F}_i$ ;
- (c) il punto ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{F}_k$   
(la retta ha equazione  $ax + by + c = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{F}_k$ ).

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione sulla lunghezza  $l$  della sequenza di costruzione del nostro punto o retta:

Se  $l = 0$  abbiamo a che fare con uno dei due punti  $P_0$  e  $P_1$  e l'asserto è ovvio. Supponiamo allora che il teorema sia vero per tutti i punti e le rette costruibili secondo Huzita la cui sequenza di costruzione abbia lunghezza

inferiore o uguale a  $l$ .

La dimostrazione è analoga a quella del **Teorema 4.3.13** per i casi (p), (r1), (r2), (r3), (r4).

Sia ora

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{l+1}$$

la sequenza di costruzione di una retta  $r$  tale che:

(r5) esistono  $g, h, i, j \in \{1, \dots, l\}$  tali che  $\omega_g = r_g$ ,  $\omega_h = r_h$  sono due rette costruibili secondo Huzita,  $\omega_i = P_i = (x_i, y_i)$ ,  $\omega_j = P_j = (x_j, y_j)$  sono due punti costruibili secondo Huzita ed  $r$  è una retta che riflette contemporaneamente  $P_i$  su  $r_g$  e  $P_j$  su  $r_h$ ; per ipotesi induttiva esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:

- (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
- (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$  oppure  $x_i^3 \in \mathbb{F}_i$ ;
- (c)  $r_g$  ha equazione  $ax + by + c = 0$ ,  $r_h$  ha equazione  $dx + ey + f = 0$  con  $a, b, c, d, e, f, x_i, y_i, x_j, y_j \in \mathbb{F}_k$ .

Per il **Corollario 4.2.5**,  $r$  è una tangente comune alle parabole  $\Gamma_1$ , di fuoco  $P_i$  e direttrice  $r_g$ , e  $\Gamma_2$ , di fuoco  $P_j$  e direttrice  $r_h$ .

Tramite un opportuno cambio di sistema di riferimento, possiamo supporre che  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  abbiano equazioni:

$$\Gamma_1 : \quad y = \omega x^2 \tag{5.4.3}$$

$$\Gamma_2 : \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{5.4.4}$$

con  $\omega, a, b, c, d, e, f \in \mathcal{H}$ . La retta  $r$ , essendo tangente a  $\Gamma_1$ , non è parallela all'asse  $y$  del nuovo sistema di riferimento; avrà quindi equazione

$$y = \alpha x + \beta$$

Supponendo che il punto di tangenza con  $\Gamma_1$  sia  $(m, \omega m^2)$ , derivando la (5.4.3) otteniamo  $\alpha = 2\omega m$  e quindi  $\beta = -\omega m^2$ .

Imponiamo ora la tangenza con  $\Gamma_2$ :

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \\ y = 2\omega mx - \omega m^2 \end{cases} \tag{5.4.5}$$

da cui

$$(4c\omega^2 m^2 + 4b\omega m + a)x^2 + (-4c\omega^2 m^3 - 2b\omega m^2 + 4e\omega m + 2d)x + c\omega^2 m^4 - 2e\omega m^2 + f = 0 \tag{5.4.6}$$

e uguagliando a zero il suo discriminante otteniamo

$$(b^2 - ac)\omega^2 m^4 + (4be - 4cd)\omega^2 m^3 + [(-4cf + 4e^2)\omega^2 + (2ae - 2bd)\omega]m^2 + (4de - 4bf)\omega m - af + d^2 = 0 \quad (5.4.7)$$

Ma essendo  $\Gamma_2$  una parabola,  $b^2 - ac = 0$ ; abbiamo quindi una equazione di terzo grado in  $m$

$$(4be - 4cd)\omega^2 m^3 + [(-4cf + 4e^2)\omega^2 + (2ae - 2bd)\omega]m^2 + (4de - 4bf)\omega m - af + d^2 = 0 \quad (5.4.8)$$

e, per fatti noti sulle equazioni di terzo grado, la sua soluzione  $m$  sta quindi in  $\mathbb{F}_k$  o in un campo che si ottiene da  $\mathbb{F}_k$  mediante una catena di ampliamenti ciascuno dei quali ha grado 2 oppure 3.  $\square$

**Teorema 5.4.5.** *Sia  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Sono fatti equivalenti:*

- (i)  $\bar{x} \in \mathcal{H}$ ;
- (ii) *esiste una sequenza finita  $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \dots, \mathbb{F}_k$  di sottocampi di  $\mathbb{R}$  tale che:*
  - (a)  $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$ ;
  - (b)  $\mathbb{F}_{i+1}$  è l'ampliamento di  $\mathbb{F}_i$  mediante un  $x_i \in \mathbb{R}$  tale che  $x_i^2 \in \mathbb{F}_i$  oppure  $x_i^3 \in \mathbb{F}_i$ ;
  - (c)  $\bar{x} \in \mathbb{F}_k$ .

*Dimostrazione.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $\bar{x} \in \mathcal{H}$  per la **Proposizione 5.2.7** è costruibile secondo Huzita il punto  $P = (\bar{x}, 0)$  e dunque vale la (ii) per il **Teorema 5.4.4**.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Per il **Corollario 5.2.9**, il **Lemma 5.2.10** e il **Lemma 5.4.3** è immediato che  $\bar{x} \in \mathcal{H}$ .  $\square$

# Bibliografia

- [1] Alperin, R.C. *A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers*, New York J. Math. 6 (2000), 119-133
- [2] Beloch, M. P. *Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, Periodico di Matematiche Ser. 4, 16 (1936), 104-108
- [3] Euclide, *Elementi*, libro I
- [4] Hull, T.C. *Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill* (2011), American Mathematical Monthly. 118 (4), 307-315
- [5] Huzita, H. *La recente concezione matematica dell'origami - trisezione dell'angolo*, in: AA.VV. *Scienza e Gioco*, Sansoni (1986), 433-441
- [6] Khademzadeh, H.R. e Mazaheri, H. *Some results to the Huzita axioms*, International Mathematical Forum, 2 (2007) no. 14, 699-704
- [7] Lang, R.J. *Origami and Geometric Constructions* (1996)
- [8] Lucero, C.J. *On the elementary single-fold operations of origami: reflections and incidence constraints on the plane*, Forum Geometricorum, 17 (2017), 207-221
- [9] Row, T. S. *Geometric Exercises in Paper Folding*, Open Court, Chicago, 1901
- [10] Stewart, I. *Galois Theory*, CRC Press, (2015)
- [11] Yates, R.C. *Tools*, Luisiana State University, 1941. <https://archive.org/details/YatesToolsMathematicalSketchModel1941/page/n63>