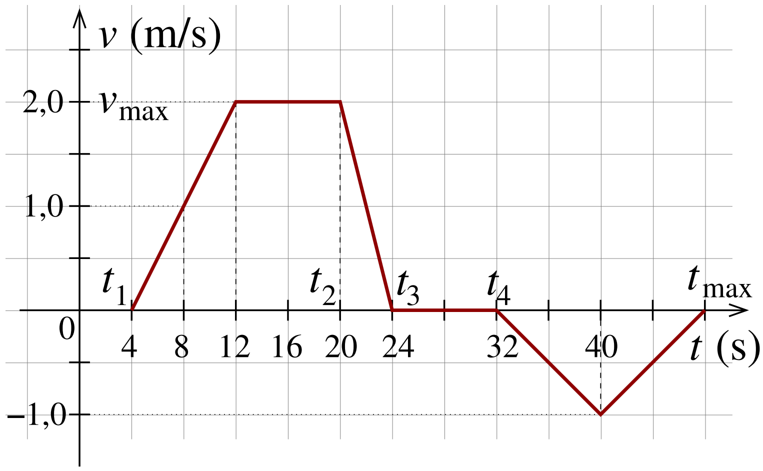
Soluzione degli esercizi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari del 15/11/2019

Esercizio 1



Un ascensore di massa $m_1 = 480$ kg (inclusa la persona al suo interno) ha una velocità verso l'alto rappresentata dal grafico a fianco, in cui $v_{max} = 2.0$ m/s e $t_{max} = 48$ s. Al tempo $t_1 = 4$ s la sua altezza, cioè la sua posizione verticale rispetto al suolo, vale $y_0 = 11{,}0$ m.

Ci sono 12 divisioni tra $t = 0$ *e* t_{max}*, quindi ogni divisione orizzontale corrisponde a* 4 s. *Ci sono 4 divisioni tra* $v = 0$ *e* v_{max}*, quindi ogni divisione verticale corrisponde a* 0.5 m/s.

a) Quanto vale l'accelerazione all'istante $t_A = 8$ s?
In t_A *la velocità varia in modo lineare, quindi il moto è uniformemente accelerato, e questo succede in tutto il tratto tra* $t = 4$ s *e* $t = 12$ s. *Quindi* $a_A = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2-0)\ \text{m/s}}{(12-4)\ \text{s}} = 0.25\ \text{m/s}^2$.

b) Quanto vale l'accelerazione all'istante $t_B = 16$ s?
In t_B *la velocità non varia,* $\Delta v = 0$*, quindi il moto è rettilineo uniforme ed* $a_B = 0$.

c) Quanto vale l'accelerazione all'istante $t_C = 44$ s?
In t_C *il moto è ancora uniformemente accelerato. La velocità è negativa, ma aumenta, e l'accelerazione è positiva. Se la calcoliamo tra gli istanti* $t = 40$ s *e* $t = 48$ s *troviamo* $a_C = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-(-1)}{48-40} = 0{,}125\ \text{m/s}^2$.

d) Quanto vale l'energia cinetica K_1 del sistema al tempo $t_1 = 4$ s?
In t_1 *il corpo è fermo, quindi* $K_1 = 0$ J.

e) Quanto vale l'energia cinetica K_2 del sistema al tempo $t_2 = 20$ s?
In t_2 *la velocità vale* $v_2 = 2$ m/s *quindi* $K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = 960$ J.

f) Quanto vale la variazione di energia potenziale tra gli istanti t_1 e t_2?
Bisogna calcolare lo spostamento dell'ascensore, cioè la variazione di altezza, tra t_1 *e* t_2. *Si può calcolare come somma degli spostamenti nel primo tratto di moto uniformemente accelerato e nel secondo tratto di moto uniforme. Il calcolo si può fare con le formule, ma è più semplice farlo calcolando l'area sottesa dal grafico tra i due punti in questione. Tra* 4 s *e* 12 s *abbiamo un triangolo di base* $\Delta t = (12 - 4) = 8$ s *ed altezza* $v_{max} = 2$ m/s*, quindi* $\Delta h_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$ m. *Tra* 12 s *e* 20 s *abbiamo un rettangolo di base* $\Delta t = 8$ s *ed altezza* $v_{max} = 2$ m/s*, quindi* $\Delta h_2 = 8 \cdot 2 = 16$ m. *Quindi* $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 24$ m *e* $\Delta U = mg\Delta h = 112900$ J.

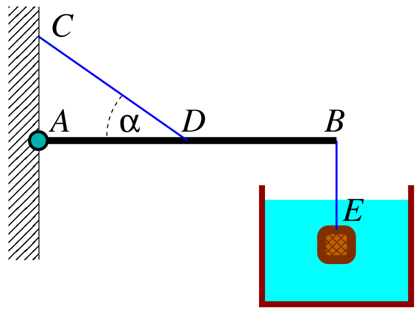
g) Qual è la potenza media $\bar{p}$ erogata dal motore tra t_1 e t_2?
Il lavoro svolto dal motore che solleva l'ascensore corrisponde alla variazione di energia totale dell'ascensore, sia cinetica che potenziale, quindi tra t_1 e t_2 il motore dell'ascensore fa un lavoro $L = \Delta K + \Delta U = (K_2 - K_1) + \Delta U = 960 + 112900 = 113860$ J. *Siccome questo lavoro è compiuto in un tempo* $\Delta t = t_2 - t_1 = 16$ s, *la potenza media vale* $\bar{p} = \frac{L}{\Delta t} = 7120$ W.

h) In quale istante l'ascensore raggiunge la sua altezza massima? Quanto vale l'altezza massima?
La velocità dell'ascensore è positiva fino all'istante $t = 24$ s, *poi si annulla fino a* $t = 32$ s, *poi diventa negativa fino a* $t = t_{\max}$. *Quindi l'altezza massima è raggiunta a* $t = 24$ s *e mantenuta fino a* $t = 32$ s. *Abbiamo già calcolato di quanto si è alzato l'ascensore tra* t_1 *e* t_2. *Tra* $t_2 = 20$ s *e* $t_3 = 24$ s *l'ascensore si alza di* $\Delta h_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ m *(area del triangolo tra* t_2 *e* t_3*). Quindi tra* t_1 *e* t_3 *si è alzato di* 28 m, *e siccome partiva da un'altezza di* 11 m *l'altezza massima vale* $h_{\max} = 11 + 28 = 39$ m.

i) Quanto è alto l'ascensore alla fine del percorso?
nel tratto tra $t_4 = 32$ s *e* $t_{\max}$ *l'ascensore* **scende** *di uno spazio pari all'area del triangolo corrispondente nel grafico:* $\Delta h_4 = -\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 1 = -8$ m, *quindi* $h_{\text{finale}} = 39 - 8 = 31$ m.

Esercizio 2

Un'asta AB omogenea di lunghezza $l = 0{,}80$ m e massa $m_1 = 14{,}5$ kg è incernierata ad una parete verticale e sorretta in posizione orizzontale da una corda CD attaccata al punto medio D dell'asta, come indicato in figura. La corda forma con l'asta un angolo $\alpha = 40{,}0°$ ed ha massa trascurabile. All'estremità dell'asta è appeso, tramite una corda BE, un oggetto di piombo (di densità $\rho = 11{,}3$ kg/dm^3) il cui volume è $V_2 = 1{,}4$ dm^3. L'oggetto di piombo è completamente immerso in un secchio contenente acqua.



a) Determinare la spinta di Archimede sul corpo immerso.
$F_{H_2O} = \rho_{H_2O} V g = 1{,}000 \cdot 1{,}4 \cdot 9{,}8 = 17{,}7$ N *verso l'alto.*

b) Determinare la tensione della fune BE.
La tensione della fune applica all'oggetto di piombo una forza verso l'alto che, assieme alla forza di Archimede, controbilancia la forza peso $F_P = m_{Pb}\, g = \rho_{Pb}\, V g = 11{,}3 \cdot 1{,}4 \cdot 9{,}8 = 155$ N, *quindi* $F_{BE} = F_P - F_{H_2O} = 137$ N.

c) Utilizzando il bilancio delle forze e dei loro momenti rispetto ad un opportuno centro di riduzione, determinare la tensione della corda CD.
Consideriamo l'asta come un corpo rigido, Sull'asta agiscono 4 forze:

1. *la tensione della fune* F_{BE} *provoca una forza verso il basso applicata nel punto* B;
2. *la forza peso dell'asta, che vale* $F_1 = m_1 g = 142$ N *verso il basso e che si considera applicata al suo centro di massa, il punto* D;

3. la tensione della corda F_{CD} incognita, che provoca una forza applicata al punto D in direzione DC;

4. la forza F_A incognita che la parete esercita sull'asta, applicata in A.

Conviene prendere come centro di riduzione il punto A, visto che F_A non è nota. Le condizioni di staticità sono che la somma delle forze sia nulla e che la somma dei momenti delle forze sia nulla. Partendo da quest'ultima condizione ricaviamo

$$0 = \tau_{BE} + \tau_1 + \tau_{CD} + \tau_A = -lF_{BE} - \frac{l}{2}F_1 + \frac{l}{2}F_{CD}\sin(\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad F_{CD} = \frac{l(F_{BE} + \frac{1}{2}F_1)}{\frac{1}{2}l\sin(\alpha)} = \frac{2F_{BE} + F_1}{\sin(\alpha)} = 647 \text{ N} ,$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $\tau_A = 0$.

d) Determinare le componenti della forza che l'asta esercita sulla parete nel punto A.
Nota la tensione della corda CD, possiamo calcolarne le sue componenti rispetto agli assi cartesiani x,y: la componente orizzontale è $F_{CDx} = -F_{CD}\cos(\alpha) = 496$ N (negativa perché verso sinistra) mentre la componente verticale è $F_{CDy} = F_{CD}\sin(\alpha) = 416$ N (positiva perché verso l'alto). Allora, dal bilancio delle forze, possiamo calcolare la forza che la parete esercita sull'asta:

$$\begin{aligned} 0 = F_{Ax} + F_{BEx} + F_{1x} + F_{CDx} \quad &\Longrightarrow \quad F_{Ax} = -F_{CDx} = 496 \text{ N} \\ 0 = F_{Ay} + F_{BEy} + F_{1y} + F_{CDy} \quad &\Longrightarrow \quad F_{Ay} = -(F_{BEy} + F_{1y} + F_{CDx}) \\ &\qquad\qquad = -(-137 - 142 + 416) = -137 \text{ N} . \end{aligned}$$

Per il principio di azione e reazione (III principio), la forza che l'asta esercita sulla parete è uguale e contraria alla forza che la parete esercita sull'asta, quindi la forza richiesta ha componenti $F_x = -496$ N, $F_y = +137$ N.

Esercizio 3

La Terra ruota intorno al suo asse in 24 ore.

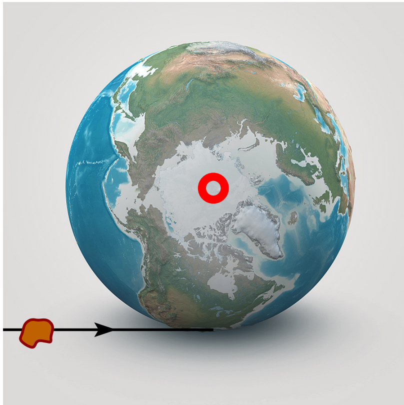
a) Determinare il momento di inerzia della Terra,
approssimandola ad una sfera omogenea di raggio $R = 6370$ km e massa $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

$$I_T = \frac{2}{5}MR^2 = 9{,}69 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 .$$

b) Determinare il momento angolare della Terra rispetto al suo asse di rotazione.

$$T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$
$$L_T = I_T\omega = 7{,}05 \cdot 10^{33} \text{ kgm}^2/\text{s} .$$

Nota: la Terra ruota in senso antiorario vista da sopra il Polo Nord, come in figura, quindi il suo momento angolare è positivo in questo sistema di riferimento.



Un asteroide di massa $m = 14{,}5 \cdot 10^{16}$ kg che si muove nel piano dell'equatore si schianta sulla Terra in un punto dell'equatore con velocità $v = 3{,}1 \cdot 10^5$ m/s
perpendicolare all'asse terrestre, come in figura.

c) Determinare il momento angolare dell'asteroide rispetto all'asse di rotazione terrestre.

Il momento di inerzia dell'asteroide rispetto all'asse di rotazione terrestre all'istante dell'impatto vale $I_A = mR^2 = 5{,}88 \cdot 10^{30}$ kg $\cdot$ m^2. *La velocità angolare prima dell'impatto vale* $\omega_A = v/R =$ 0,0487 rad/s. *Il momento angolare dell'asteriode vale* $L_A = I_A\omega_A = mRv = 2{,}86 \cdot 10^{29}$ kg$\cdot$m^2/s, *ed è positivo nel sistema di riferimento della figura, in quanto rispetto all'asse terrestre si muove con velocità angolare positiva.*

d) Determinare il momento di inerzia del sistema Terra-asteroide dopo l'urto.

L'urto è anelastico, l'asteroide (o l'insieme dei suoi frammenti) resta attaccato alla Terra in prossimità dell'equatore, quindi il momento d'inerzia I' *del sistema dopo l'urto è la somma dei momenti d'inerzia dei due corpi:* $I' = I_T + I_A \simeq I_T$ *entro il numero di cifre significative.*

e) Utilizzando la conservazione del momento angolare, determinare il nuovo periodo di rotazione terrestre. In particolare, calcolare di quanti secondi aumenta (o diminuisce) il periodo di rotazione terrestre.

Il momento angolare si conserva, quindi dopo l'urto il momento angolare vale $L' = L_T + L_A$. *Da questo possiamo ricavare la velocità angolare dopo l'urto* $\omega' = L'/I'$ *e quindi il nuovo periodo di rotazione*

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi(I_T + I_A)}{L_T + L_A} = 2\pi\frac{I_T}{L_T} \cdot \frac{1 + \frac{I_A}{I_T}}{1 + \frac{L_A}{L_T}} \, .$$

Siccome $2\pi\frac{I_T}{L_T} = \frac{2\pi}{\omega} = T$ *e*

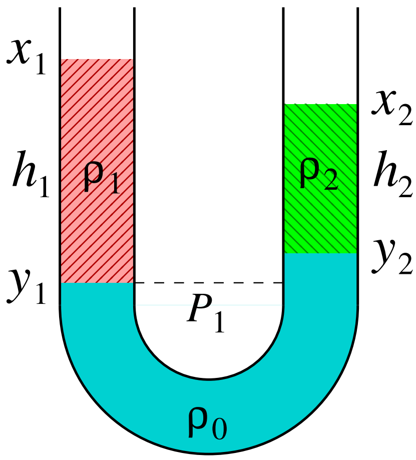
$$\frac{1 + \frac{I_A}{I_T}}{1 + \frac{L_A}{L_T}} = 0.9999595 = 1 - 4{,}05 \cdot 10^{-5}$$

si ha $\Delta T = T' - T = T \cdot (-4{,}05 \cdot 10^{-5}) = -3{,}5$ s. *Il periodo di rotazione terrestre si ridurrebbe quindi di* 3,5 s. *Per valutare questa quantità* ΔT *molto piccola rispetto a* T*, bisogna conservare nei calcoli intermedi almeno 6 o 7 cifre significative.*

Esercizio 4

Un tubo a forma di U contiene una certa quantità di acqua di densità $\rho_0 = 1000$ Kg/m^3. Nell'imboccatura di destra viene versato dell'olio (densità $\rho_2 = 932$ Kg/m^3) mentre nell'imboccatura di sinistra viene versato dell'alcool di densità $\rho_1 = 806$ Kg/m^3. Si raggiunge un equilibrio statico in cui tutto l'olio è contenuto nella parte destra del tubo mentre tutto l'alcool è contenuto in quella sinistra. L'altezza dell'olio nel tubo è $h_2 = 543$ mm mentre quella dell'alcool è $h_1 = 611$ mm.

- Dopo avere fatto un disegno del sistema in esame, determinare la differenza di livello $y_2 - y_1$ tra la superficie di separazione acqua–olio e quella acqua–alcool.



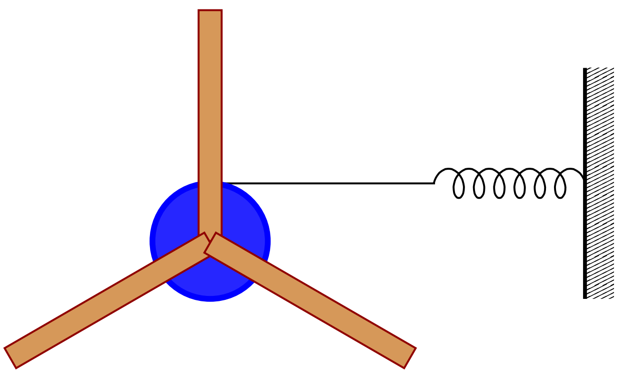
Dopo il versamento dei liquidi, la situazione è quella rappresentata in figura. Non possiamo sapere se i livelli x_1 e x_2 sono uguali e neppure se sono uguali y_1 e y_2. Supponiamo che $y_1 < y_2$, come in figura. Siccome all'equilibrio statico la pressione allo stesso livello **nello stesso liquido** *è la stessa, possiamo dire che la pressione all'altezza y_1 è la stessa nei due rami sinistro e destro:*

$$
\begin{aligned}
& P_1 = P_{\text{atm}} + \rho_1 h_1 g && \textit{ramo di sinistra} \\
& P_1 = P_{\text{atm}} + \rho_2 h_2 g + \rho_0 (y_2 - y_1) g && \textit{ramo di destra} \\
\Longrightarrow \quad & \rho_1 h_1 g = \rho_2 h_2 g + \rho_0 (y_2 - y_1) g \\
\Longrightarrow \quad & \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_0 (y_2 - y_1) \\
\Longrightarrow \quad & y_2 - y_1 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{\rho_0} = -13{,}6 \text{ mm} .
\end{aligned}
$$

Con P_{atm} abbiamo indicato la pressione atmosferica che agisce sulla superficie di entrambi i liquidi esposti all'aria. Il fatto che $y_2 - y_1$ sia negativa vuol dire che $y_2 < y_1$ e quindi y_2 è più in basso di y_1. Ma questo non lo potevamo sapere prima di fare il disegno.

Esercizio 5

Un'elica a 3 pale si può schematizzare come un corpo rigido costituito da 3 aste di lunghezza $l_1 = 59$ cm e massa $m_1 = 0{,}98$ kg ciascuna, collegate ad una estremità da un disco omogeneo di massa $m_2 = 0{,}48$ kg e raggio $r_2 = 14$ cm, come in figura.



a) Determinare il momento di inerzia dell'elica (aste e disco) rispetto al centro di simmetria, che è anche il centro di rotazione dell'elica nel piano.

Il momento di inerzia totale è la somma dei momenti di inerzia dei vari corpi. Ricordando che il momento di inerzia di un'asta che ruota attorno ad un suo estremo è $I_a = \frac{1}{3}ml^2$ *mentre quello di un disco è* $I_d = \frac{1}{2}mr^2$ *otteniamo*

$$I = 3\left(\frac{1}{3}m_1 l_1^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\right) = 0{,}346\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\ .$$

Per mettere in movimento l'elica, si avvolge attorno al disco un filo di massa trascurabile collegato ad una molla allungata di $l_2 = 35$ cm rispetto alla sua lunghezza a riposo. Quando la molla raggiunge la posizione di riposo, l'elica ruota con una velocità angolare $\omega = 9{,}3$ rad/s.

b) Determinare l'energia cinetica finale dell'elica.

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = 15{,}0\ \mathrm{J}\ .$$

c) Calcolare la costante elastica della molla.

Sull'elica agisce solo la forza elastica, che è conservativa. Possiamo quindi applicare il teorema di conservazione dell'energia meccanica: $K_i + U_i = K_f + U_f$ *dove* $K_i = 0$ *è l'energia cinetica iniziale (nulla perché l'elica è ferma);* $U_i = \frac{1}{2}kl_2^2$ *è l'energia potenziale elastica iniziale della molla allungata di* l_2 *rispetto alla lunghezza a riposo;* K_f *è l'energia cinetica finale dell'elica calcolata al punto (b);* $U_f = 0$ *è l'energia potenziale elastica finale della molla, nulla perché è a riposo. Quindi*

$$U_i = K_f \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}kl_2^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \Longleftrightarrow \quad k = \frac{I\,\omega^2}{l_2^2} = 244\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\,..$$

d) Calcolare il momento torcente della molla rispetto all'asse di rotazione dell'elica, nell'istante iniziale in cui l'elica è ancora ferma.

Nell'istante iniziale la molla è tesa di una lunghezza l_2*, quindi agisce sul disco con una forza di modulo* $F = kl_2$*. Il braccio di questa forza rispetto al centro del disco vale* r_2*, quindi il momento della forza è* $\tau = r_2 F = r_2\, k\, l_2 = 12{,}0\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. *Volendo essere precisi, in riferimento al disegno, il momento della forza elastica ha segno negativo.*

e) Dopo l'azione della molla, l'elica si ferma a causa delle forze di attrito in un tempo pari a $t = 24$ s. Calcolare il momento medio delle forze di attrito rispetto all'asse di rotazione dell'elica.

Abbiamo un moto rotatorio decelerato, con accelerazione angolare media

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -0{,}387\ \mathrm{rad/s}^2\ ,$$

in quanto ω *passa dal valore dato a zero,* $\Delta\omega = 0 - \omega = -\omega$*, mentre* $\Delta t = 24$ s *è dato. Questa decelerazione angolare è causata dalle forze di attrito, che producono un momento medio* $\bar{\tau}$*. L'equazione che lega il momento delle forze con l'accelerazione angolare ci permettere di risolvere il quesito:*

$$\tau = I\alpha \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau} = I\bar{\alpha} = -0{,}13\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\ ,$$

dove I *è il momento angolare dell'elica calcolato al punto (a).*