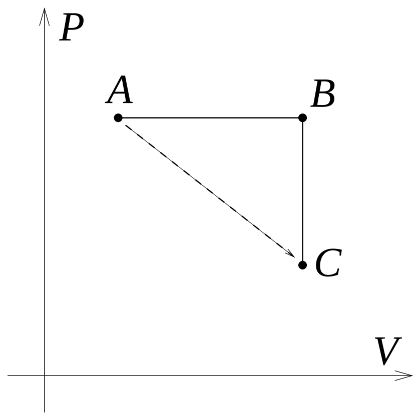
Soluzione degli esercizi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari del 18/12/2019

Esercizio 1



$n = 1{,}70$ mol moli di idrogeno biatomico sono inizialmente preparate alla pressione $P_A = 3{,}3 \cdot 10^5$ Pa e occupano un volume $V_A = 24{,}0$ litri. Questo gas si espande *a pressione costante* fino ad un volume V_B e compie un lavoro $L_{AB} = 8100$ J, come rappresentato dalla trasformazione $A \to B$ nel diagramma in figura. Assumendo di poter considerare il gas come un gas perfetto, con costante $R = 8{,}31$ J/(mol · K),

a) Quanto vale la temperatura iniziale T_A del gas?

Dall'equazione di stato dei gas perfetti, con $V_A = 24{,}0 \cdot 10^{-3}$ m^3*, ricaviamo*

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 561 \text{ K} .$$

b) Quando vale la temperatura T_B del gas?

Il modo più semplice è quello di usare l'equazione di stato dei gas perfetti, ricavando il valore del volume V_B *dai dati del problema, come richiesto al punto (c), ove rimandiamo per i calcoli. Si trova così*

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 1134 \text{ K} .$$

Un modo alternativo, senza la necessità di calcolare V_B*, è il seguente: a pressione costante il calore assorbito è* $Q_{AB} = n\, c_P\, \Delta T_{AB}$*, dove* c_P *è il calore molare a pressione costante, mentre la variazione di energia interna è* $\Delta E_{AB} = n\, c_V\, \Delta T_{AB}$*, dove* c_V *è il calore molare a volume costante. Per il primo principio della termodinamica*

$$L_{AB} = Q_{AB} - \Delta E_{AB} = n(c_P - c_V)\Delta T_{AB} = nR\, \Delta T_{AB}$$

in quanto $c_P = c_V + R$*. Si ha pertanto che*

$$\Delta T_{AB} = T_B - T_A = \frac{L_{AB}}{nR} = 573 \text{ K} \quad \Longrightarrow \quad T_B = T_A + \Delta T_{AB} = 1134 \text{ K} ,$$

c) Quanto vale il volume V_B del gas?

Il lavoro compiuto dal gas nell'isobara $A \to B$ *vale* $L_{AB} = P_A(V_B - V_A)$*, quindi la variazione di volume è* $\Delta V_{AB} = V_B - V_A = L_{AB}/P_A = 0{,}0245$ m^3 *ed infine* $V_B = V_A + (V_B - V_A) = 0{,}0485$ m$^3 = 48{,}5$ litri.

d) Di quanto è variata l'energia interna nella trasformazione $A \to B$?

Il gas è biatomico, quindi $c_V = \frac{5}{2}R$ *da cui* $\Delta E_{AB} = nc_V \Delta T_{AB} = 20250$ J.

e) Quanto calore ha assorbito il gas nella trasformazione $A \to B$?

$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + L_{AB} = 28350$ J.

f) Il gas viene successivamente raffreddato *a volume costante* mettendolo a contatto per breve tempo con una sorgente a temperatura $T_S = -100$°C . La variazione di energia interna del gas è $\Delta E_{BC} = -5900$ J. Quanto calore ha assorbito il gas in questa trasformazione $B \to C$?

La trasformazione è a volume costante, quindi il sistema non fa lavoro: $L_{BC} = 0$*, pertanto* $Q_{BC} = \Delta E_{BC} = -5900$ J. *Il dato di* -100°C *è superfluo.*

g) Se il gas fosse stato espanso dallo stato A allo stato C attraverso una trasformazione reversibile come indicato dalla linea retta AC tratteggiata nel diagramma PV, quanto calore sarebbe stato necessario fornire al gas? (Suggerimento: ricordare l'interpretazione grafica del lavoro ...)

La trasformazione AC *non è una delle trasformazioni tipiche che abbiamo incontrato. L'unico modo per calcolare il calore* Q_{AC} *è sfruttare il primo principio della termodinamica, calcolando* ΔE_{AC} *e* L_{AC}*. Possiamo calcolare* ΔE_{AC} *dalle temperature negli stati A e C.* T_A *è nota.* T_C *si calcola dalla variazione di energia interna nella trasformazione BC:*

$$\Delta E_{BC} = nc_V \Delta T_{BC} \quad \Longrightarrow \quad \Delta T_{BC} = \frac{\Delta E_{BC}}{nc_V} = -167 \text{ K} \quad \Longrightarrow \quad T_C = T_B + \Delta T_{BC} = 967 \text{ K} .$$

Troviamo così $\Delta E_{AC} = nc_V(T_C - T_A) = 14300$ J.

Calcoliamo ora L_{AC}*. Nel diagramma* $P - V$ *l'area sottesa dal grafico di una trasformazione reversibile corrisponde al lavoro compiuto dal sistema. Nel nostro caso la superficie compresa tra l'asse V ed il segmento AC è un trapezio rettangolo con le basi parallele all'asse* P*, in particolare la base maggiore è lunga* P_A*, la base minore è lunga* P_C *e l'altezza misura* $V_C - V_A = V_B - V_A$*. Bisogna quindi trovare* P_C*. Conosciamo* $V_C = V_B$ *e* T_C*, dall'equazione di stato ricaviamo* $P_C = nRT_C/V_C = 2{,}81 \cdot 10^5$ Pa *ed infine otteniamo* $L_{AC} = (P_A + P_C)(V_C - V_A)/2 = 7500$ J.

Dal primo principio determiniamo infine $Q_{AC} = \Delta E_{AC} + L_{AC} = 21800$ J. *Vediamo che* Q_{AC} *è diverso da* $Q_{AB} + Q_{BC}$*. Infatti il calore non è una variabile di stato, cioè il calore assorbito dal sistema tra gli stati A e C dipende da quale trasformazione si compie.*

Esercizio 2

Una pompa di calore deve mantenere una stanza alla temperatura $T_1 = 20{,}0$ °C assorbendo energia elettrica e scambiando calore con il sottosuolo che ha una temperatura costante $T_2 = 10{,}0$ °C .

a) Quanto vale il massimo coefficiente di resa teorico per una pompa di calore ideale che lavori tra queste due temperature?

Il coefficiente di resa C_R *esprime il rapporto tra beneficio e costo. In una pompa di calore, il beneficio è il* **calore** Q_1 **rilasciato nella stanza***, mentre il costo è il lavoro L compiuto dal motore della pompa, svolto per esempio assorbendo energia elettrica prelevata dall'impianto* *elettrico. Per il primo principio, che esprime la conservazione dell'energia, si ha* $Q_1 = L + Q_2$*, dove* Q_2 **è il calore rilasciato dal sottosuolo (e prelevato dalla pompa)**. *Per una macchina ideale vale*

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \Longrightarrow \quad L = Q_1 - Q_2 = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\Longrightarrow \quad C_R = \frac{Q_1}{L} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{293\ \text{K}}{10\ \text{K}} = 29{,}3\ .$$

Questo vuol dire che per ogni Joule di energia elettrica prelevata e spesa in lavoro meccanico, la pompa rilascerebbe nella stanza 29,3 J *di calore (gli altri* 28,3 J *li prende dal sottosuolo).*

b) Supponendo che la pompa di calore abbia un coefficiente di resa pari al 45% di una macchina termica reversibile, quanta potenza elettrica deve assorbire per fornire alla stanza $Q = 8100$ kJ all'ora?

Questa pompa di calore reale ha una resa pari al 45% *della pompa ideale. Questo significa che per ogni Joule di lavoro meccanico, invece di* 29,3 J *rilascerà nella stanza solamente* $29{,}3 \cdot \frac{45}{100} = 29{,}3 \cdot 0{,}45 = 13{,}2$ J. *In altre parole, il coefficiente di resa reale vale* $C_R^{\text{reale}} = C_R \cdot 0{,}45 = 13{,}2\%$. *Se nel tempo* $\Delta t = 1$ h $= 3600$ s *nella stanza vengono rilasciati* 8100 kJ*, in quell'ora la macchina compie un lavoro meccanico L tale che*

$$C_R^{\text{reale}} = \frac{Q_1}{L} \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{Q_1}{C_R^{\text{reale}}} = 614\ \text{kJ}$$

e quindi la potenza assorbita (per esempio dall'impianto elettrico) vale $p = L/\Delta t = 171$ W.

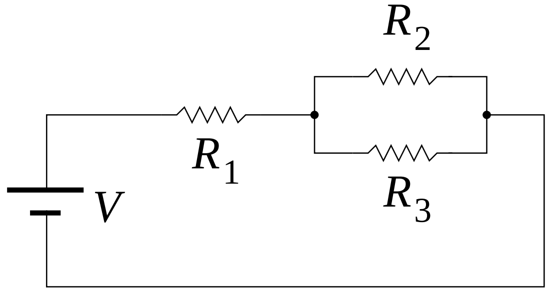
c) Se la stanza è esposta alla temperatura esterna $T_3 = -5{,}0$ °C su una superficie di area $A = 50{,}0$ m^2 ed è circondata da uno strato di materiale isolante di spessore $d = 6{,}00$ cm, quanto vale il coefficiente di conducibilità termica di tale materiale?

La temperatura della stanza è costante, quindi la potenza (l'energia per unità di tempo $p_1 = Q_1/\Delta t = 2250$ W*) che la stanza riceve dalla pompa è uguale alla potenza p dissipata dalla stanza verso l'ambiente esterno a temperatura* T_3 *attraverso la sua superficie. Dalla formula della conducibilità abbiamo*

$$p = \rho\frac{A\,\Delta T}{d} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{p_1 d}{A\,(T_1 - T_3)} = 0{,}108\ \text{W/(m} \cdot \text{K)}\ .$$

Esercizio 3

Un circuito elettrico è formato da un generatore di tensione, che produce una differenza di potenziale $V = 55$ V, e da tre resistenze collegate come in figura. I valori delle resistenze sono $R_1 = 66\ \Omega$, $R_2 = 94\ \Omega$ e $R_3 = 120\ \Omega$.



a) Quanta corrente scorre attraverso ciascuna resistenza?

Le resistenze R_2 ed R_3 sono collegate in parallelo, pertanto nel circuito si comportano come un'unica resistenza di valore

$$R_{23} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3} = 52{,}7\ \Omega\ .$$

A questo punto il circuito si comporta come se avesse due resistenze in serie: R_1 ed R_{23} (che formano un partitore di tensione) la cui resistenza equivalente è $R = R_1 + R_{23} = 118{,}7\ \Omega$. Quindi la corrente che esce dal generatore vale $I = V/R = 0{,}463$ A ed è anche uguale alla corrente che scorre in R_1: $I_1 = I = 0{,}463$ A. Questa corrente si separa in due correnti I_2 ed I_3 che scorrono rispettivamente attraverso R_2 ed R_3, collegate in parallelo, quindi $V_2 = V_3$. Si ha quindi, per la prima legge di Kirchhoff e la legge di Ohm, il sistema

$$\begin{cases} I_2 + I_3 = I \\ V_2 = R_2 I_2 \\ V_2 = R_3 I_3 \end{cases} \quad \text{che ha come soluzione} \quad \begin{cases} I_2 = I\frac{R_3}{R_2+R_3} = 0{,}260\ \text{A} \\ I_3 = I\frac{R_2}{R_2+R_3} = 0{,}203\ \text{A} \\ V_2 = V_3 = 24{,}4\ \text{V}\ . \end{cases}$$

b) Qual è la resistenza sottoposta alla maggior differenza di potenziale?

Calcoliamo le tensioni ai capi delle resistenze: dal precedente calcolo abbiamo che $V_1 = I_1 R_1 = 30{,}6$ V. Per differenza ricaviamo $V_2 = V - V_1 = 24{,}4$ V, ricavata anche nel precedente punto (a). Inoltre $V_3 = V_2$. Quindi la resistenza sottoposta alla maggior differenza di potenziale è R_1.

c) Quanta potenza viene dissipata da ciascuna resistenza per effetto Joule?

$p_1 = V_1 I_1 = 14{,}2$ W, $p_2 = V_2 I_2 = 6{,}3$ W, $p_3 = V_3 R_3 = 5{,}0$ W.

d) Quanta energia viene erogata dal generatore in un minuto?

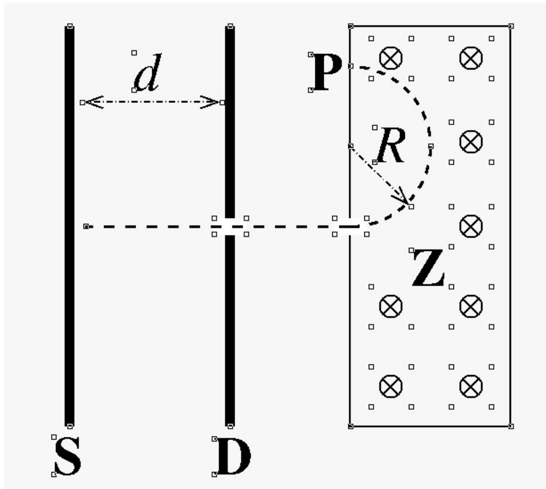
La potenza erogata dal generatore è uguale alla somma delle potenze dissipate dalle resistenze nel circuito: $p = p_1 + p_2 + p_3 = 25{,}5$ W. Equivalentemente, $p = V\,I = 25{,}5$ W. In un minuto ($\Delta t = 60$ s), il generatore eroga un energia pari a $E = p\,\Delta t = 1530$ J.

e) La resistenza R_1 è costituita da un filo di nichel (di resistività $\rho = 7{,}0 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$) lungo $l = 5{,}6$ m. Quanto vale la sezione del filo? (Nota: per rispondere a questa domanda non è necessario avere risposto alle altre.)

Indicando con A la sezione del filo, cioè l'area della sua sezione, abbiamo

$$R = \rho\frac{l}{A} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{\rho l}{R} = 5{,}94 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^2 = 5{,}94 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}^2\ .$$

Esercizio 4



Un dispositivo è in grado di accelerare ioni di sodio K^+ (di massa $m = 3{,}84 \cdot 10^{-26}$ kg) mediante il campo elettrico generato da un condensatore a facce piane e parallele. Gli ioni di sodio partono praticamente da fermi in prossimità dell'armatura di sinistra S, sono soggetti ad una differenza di potenziale $V = 2500$ V ed escono da un foro praticato nell'armatura di destra D, come mostrato in figura. La distanza tra le armature è $d = 9{,}5$ mm.

a) Determinare quale delle due armature va caricata positivamente e quanto vale il campo elettrico tra le armature del condensatore.

Poiché lo ione è positivo e deve essere accelerato verso destra, la forza (e quindi il campo elettrico) deve essere orientato verso destra. Pertanto l'armatura da caricare positivamente è quella a sinistra. Il campo elettrico all'interno di un condensatore a facce piane e parallele è uniforme, ed il suo modulo vale $E = V/d = 2{,}63 \cdot 10^5$ V/m. *Come già detto, è diretto verso destra.*

b) Qual è la velocità di ogni ione quando esce da tale dispositivo?

Lo ione è accelerato dalla forza del campo elettrico, infatti la sua carica è positiva e vale $q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, *perché l'atomo neutro ha perso uno dei suoi elettroni. Il lavoro svolto dal campo elettrico sullo ione che si muove dall'armatura S all'armatura D è dato da* $L = qV = 4{,}00 \cdot 10^{-16}$ J, *e, per la conservazione dell'energia, è uguale all'energia cinetica acquistata dallo ione:*

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = 1{,}44 \cdot 10^5 \text{ m/s} .$$

c) Sapendo che ciascuna armatura ha un'area $A = 45$ cm^2, determinare la capacità del condensatore.

Tra le armature del condensatore c'è presumibilmente aria oppure il vuoto. Quindi la costante dielettrica ϵ *è pari a quella del vuoto* ϵ_0 *e si ha*

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 4{,}19 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 4{,}19 \text{ pF} .$$

Successivamente, gli ioni così accelerati entrano in una zona Z in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 0{,}58$ T e diretto perpendicolarmente alla velocità degli ioni, in modo tale da costringerli a compiere una traiettoria circolare, come indicato in figura.

e) Quanto vale il raggio di curvatura R della traiettoria degli ioni nella regione con il campo magnetico?

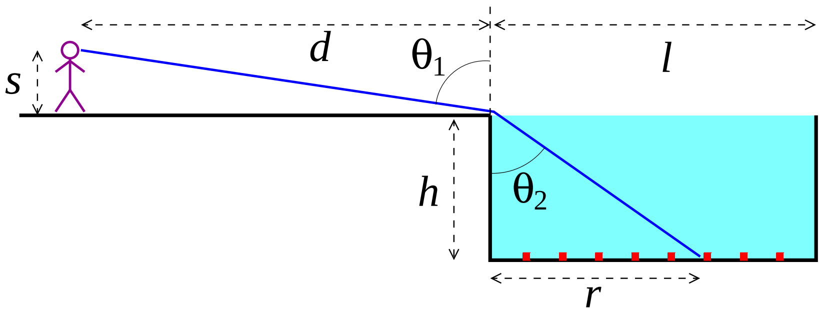
[La carica dell'elettrone $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C; la costante dielettrica del vuoto $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m]

La forza di Lorentz magnetica è perpendicolare alla velocità, quindi il moto dell'elettrone è un moto circolare uniforme, in cui la forza centripeta è data proprio dalla forza di Lorentz:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB} = 5{,}97 \text{ cm} .$$

Esercizio 5

Una bambina guarda una piscina piena d'acqua la cui superficie è perfettamente piatta e a filo con il bordo. La piscina è lunga $l = 18{,}0$ m e profonda $h = 1{,}75$ m. La distanza tra la bambina e il bordo della piscina vale $d = 14{,}5$ m e gli occhi della bambina si trovano ad una distanza $s = 1{,}20$ m dal suolo, come in figura.



a) Determinare l'inclinazione (rispetto alla verticale) del raggio di luce che, dal bordo della piscina, incide sugli occhi della bambina.

L'angolo richiesto, che indico con θ_1, è tale che

$$\tan\theta_1 = \frac{d}{s} = 12{,}0833 \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 = \arctan\frac{d}{s} = 1{,}48823 \text{ rad} = 85{,}269° .$$

b) Determinare l'inclinazione (rispetto alla verticale) dello stesso raggio di luce partito dall'interno della piscina, sapendo che l'indice di rifrazione dell'acqua vale $n = 1{,}33$.

Indico con θ_2 l'angolo richiesto, con $n_1 \simeq 1$ l'indice di rifrazione dell'aria e con $n_2 = 1{,}33$ quello dell'acqua. Dalla legge di Snell abbiamo che

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = 0{,}74932$$

$$\Longrightarrow \quad \theta_2 = \arcsin(0{,}74932) = 0{,}84703 \text{ rad} = 48{,}53° .$$

c) Sul fondo della piscina è sistemata una fila di piccole lampadine accese e distanti 50,0 cm l'una dall'altra, come in figura. Quante lampadine riesce a vedere la bambina?

Il raggio di luce che raggiunge l'occhio della bambina passando per il bordo della piscina, che è quello rappresentato in figura, proviene dal fondo della piscina dai punti che hanno una distanza $r = h\tan\theta_2 = 1{,}98$ m dal bordo sinistro. Quindi la bambina riesce a vedere $h - r = 16{,}02$ m del fondo, e quindi un numero di luci pari a $n = 16{,}02/0{,}50 = 32{,}04$. Ovviamente le luci sono in numero intero, quindi ne vedrà 32, o 31 se mancano quelle ai bordi (come in figura).