# Esempio calcolo calore, entropia, lavoro, energia interna

Franco Bagnoli

22 dicembre 2019

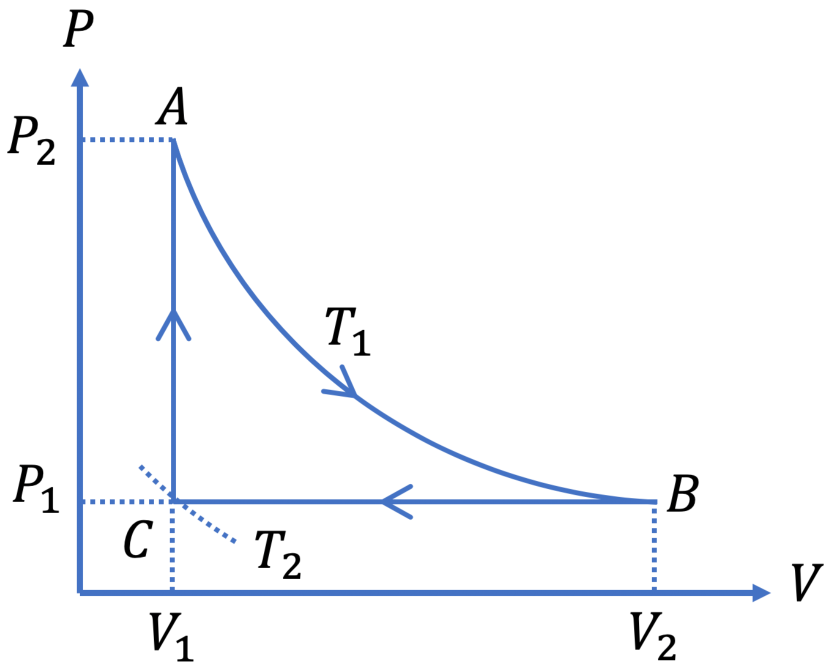


Figura 1: Ciclo termodinamico composto da una isoterma ($AB$), una isobara $BC$ e una isocore $CA$.

Calcoliamo il bilancio del calore $\Delta Q$, del lavoro $\Delta W$, e la variazione di energia interna $\Delta U$ e dell'entropia $\Delta S$ nel ciclo $ABC$ di figura 1 per un gas perfetto.

Il ciclo è composto da una isoterma a temperatura $T_1$ tra $A$ e $B$, da una isobara a pressione $P_1$ tra $B$ e $C$ e da una isocora a volume $V_1$ tra $C$ e $A$.

Indichiamo con $P_2$ la pressione in $A$, con $T_2$ la temperatura in $C$ e con $V_2$ il volume in $B$.

Abbiamo dall'equazione di stato del gas perfetto

$$\begin{aligned} A) \quad & P_2 V_1 = nRT_1 \\ B) \quad & P_1 V_2 = nRT_1 \\ C) \quad & P_1 V_1 = nRT_2. \end{aligned} \tag{1}$$

e inoltre si usa il primo principio

$$dQ = dU + dW = dU + PdV.$$

**Trasformazione $A$-$B$**

La trasformazione è una isoterma per cui la variazione di energia interna è nulla

$$\Delta U_{AB} = 0$$

Il lavoro è

$$\Delta W_{AB} = \int_A^B PdV = \int_{V_1}^{V_2} nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

e dato che $\Delta_U = 0$ questo è anche uguale alla quantità di calore scambiato

$$\Delta Q_{AB} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

La variazione di entropia è

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dW}{T} = \int_{V_1}^{V_2} nR\frac{dV}{V} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Usando le equazioni di stato Eq. (1), possiamo esprimere queste quantità in funzione della temperatura

$$\Delta W_{AB} = \Delta Q_{AB} = nrT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

$$\Delta S_{AB} = nR\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

**Trasformazione** $B$**-**$C$

La variazione di calore per una trasformazione a pressione costante è

$$\Delta Q_{BC} = nc_P(T_2 - T_1) = n(c_V + R)(T_2 - T_1).$$

La variazione di energia interna è

$$\Delta U_{BC} = nc_V(T_2 - T_1).$$

Il lavoro è

$$\Delta W_{BC} = \int_B^C PdV = P_1 \int_{V_2}^{V_1} dV = P_1(V_1 - V_2).$$

Utilizzando le equazioni di stato Eq. (1) possiamo anche scrivere

$$\Delta W_{BC} = P_1V_1 - P_1V_2 = nR(T_2 - T_1).$$

Verifica: il calore scambiato è dato dalla somma della variazione dell'energia interna più il lavoro

$$\Delta Q_{BC} = \Delta U_{BC} + \Delta W_{BC} = nc_V(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) = nc_P(T_2 - T_1).$$

La variazione di entropia è

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = nc_P \int_{T_1} T_2 \frac{dT}{T} = nc_P \ln\left(\frac{T2}{T_1}\right) = n(c_V + R)\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

**Trasformazione** $C$**-**$A$

Essendo una isocora $dV = 0$ e quindi anche $\Delta W = 0$.
La variazione di energia interna (che è uguale al calore scambiato perché $\Delta W = 0$) vale

$$\Delta Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_1 - T_2)$$

La variazione di entropia è

$$\Delta S = \int_C^A \frac{dQ}{T} = nc_V \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = nc_V \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right).$$

**Ciclo**

Quindi, sommando sulle tre trasformazioni si ha per il calore

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{ciclo}} &= \Delta Q_{AB} + \Delta Q_{BC} + \Delta Q_{CA}\\ &= nRT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + n(c_V + R)(T_2 - T_1) + nc_V(T_1 - T_2)\\ &= nRT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + nR(T_2 - T_1)\end{aligned}$$

Per il lavoro invece

$$\begin{aligned}\Delta W_{\text{ciclo}} &= \Delta W_{AB} + \Delta W_{BC} + \Delta W_{CA}\\ &= nRT_1 \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + nR(T_2 - T_1) + 0\end{aligned}$$

e come si vede $\Delta Q_{\text{ciclo}} = \Delta W_{\text{ciclo}}$.
Per l'energia interna

$$\begin{aligned}\Delta U_{\text{ciclo}} &= \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA}\\ &= 0 + nc_V(T_2 - T_1) + nc_V(T_1 - T_2) = 0\end{aligned}$$

Per l'entropia

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{ciclo}} &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}\\ &= nR\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + n(c_V + R)\ln\left(\frac{T2}{T_1}\right) + nc_V \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = 0.\end{aligned}$$