Algebra Lineare e geometria analitica

(Prof.ssa D. Bubboloni)
19 Dicembre 2019.

Avete due ore e mezza di tempo. Potete scegliere 5 esercizi fra i 7 proposti per avere punteggio pieno.

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x, y, z]^T) = \begin{pmatrix} 2x & -y & \\ -x & +y & +2z \\ & y & +4z \end{pmatrix}$$

provare che e' lineare. Trovarne nucleo e immagine. Dire se f e' biunivoca. Trovarne gli autovalori.

2. Discutere il seguente sistema sfruttando il teorema di Rouche-Capelli e la teoria del determinante (suggerimento: si parta da considerazioni sulla matrice incompleta) oppure la riduzione di Gauss

$$\begin{cases} x + ay + z & = & 3 \\ x - y - 2az & = & a + 4 \\ 2x - z & = & 8 \end{cases}$$

3. Dati i vettori di $\mathbb{Q}^4$ seguenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

a) una base

b) un sistema di generatori per $\mathbb{Q}^4$.

4. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6yz + 8xz + y^2 + z^2$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $p(x, y, z) > 0$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$? Stabilire il segno della forma quadratica

$$q(x, y, z) = p(x, y, z) + 5x^2$$

tramite considerazioni teoriche, senza fare calcoli.

5. Dire se la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ammette 0 come autovalore di molteplicitá 2. Trovare i restanti autovalori. Dire se esiste una matrice invertibile e ortogonale C tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale (non e' richiesto di esplicitare C). Esibire, se esistono, due autovettori di M di norma 1 formanti un angolo di $\pi/4$.

6. Si consideri l' applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare $\mathrm{sp}(A)$ e trovare gli autospazi. Dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base di autovettori di L_A e in caso affermativo esibirla.

7. Sia

$$S := \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Giustificare il fatto che S sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e trovane una base e la dimensione. Determinare l'equazione cartesiana di S. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$?