Intermedia II - Algebra Lineare

(Prof.ssa D. Bubboloni)
19 Dicembre 2019.
Avete due ore e mezza a disposizione. Lo svolgimento corretto dell'esercizio 6 o 7 e' condizione necessaria per l'ammissione alla prova orale. Potete scegliere 4 esercizi fra gli esercizi $1-5$.

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x,y,z]^T) = \begin{pmatrix} 2x & +y & \\ x & +y & +2z \\ & -y & -2z \end{pmatrix}$$

provare che e' lineare. Trovarne nucleo e immagine. Dire se f e' biunivoca. Trovarne gli autovalori.

2. Scrivere la forma quadratica Q_A su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6yz - 8xz + 2y^2 + z^2$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $p(x,y,z) > 0$ per ogni $x,y,z \in \mathbb{R}$?

Stabilire il segno della forma quadratica

$$q(x,y,z) = p(x,y,z) + 5x^2$$

tramite considerazioni teoriche, senza fare calcoli.

3. Trovare la molteplicita' dell'autovalore 0 per la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Trovare i restanti autovalori. Descrivere come *Span* gli autospazi relativi agli autovalori non nulli.

Dire se esiste una matrice invertibile e ortogonale C tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale (non e' richiesto di esplicitare C). Esibire due autovettori di M fra loro ortogonali e di norma 1.

4. Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Y_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che essi siano ortogonali. Sia ora $Y := Y_1$. Si calcoli $||X||, ||Y||, P_Y(X), P_X(Y)$, la distanza fra X e Y e l'angolo γ fra essi. Dire se γ e' acuto o ottuso.

5. Si consideri

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

Sia $A \in M_2(\mathbb{Q})$ tale che $AB = (B + I)A$. Provare che A non e' invertibile. Dire se esiste una matrice $A \neq 0$ soddisfacente $AB = (B + I)A$.

6. Enunciare il teorema di Binét. Utilizzarlo per dedurre che, se una matrice quadrata e' invertibile, il determinante dell'inversa e' uguale all'inverso del determinante della matrice data. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $A^3 = 2\,I$. Cosa si puo' dedurre per il valore del determinante di A?

7. Enunciare il teorema di Rouché Capelli. Utilizzarlo per dedurre che un sistema lineare di 7 equazioni in 10 incognite in cui la matrice incompleta abbia rango 7 ammette sempre almeno una soluzione. Dire anche qual' e' la dimensione dell'insieme delle soluzioni. Cosa si puo' dire invece di un sistema lineare di 6 equazioni e 5 incognite per cui il determinante della completa sia diverso da 0?