9. – Soluz. degli es. su: ***notazione posizionale, cambiamenti di base e criteri di divisibilità***.

Esercizio 9.1

Si scriva in base *tredici* il numero naturale che in base *dieci* si scrive

$$4\,134\,909\,.$$

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$4\,134\,909 = 318\,069 \cdot 13 + 12$$

si ricava che l'ultima cifra a destra della scrittura richiesta è C. Proseguendo successivamente con le divisioni

$$318\,069 = 24\,466 \cdot 13 + 11$$

$$24\,466 = 1\,882 \cdot 13 + 0$$

$$1\,882 = 144 \cdot 13 + 10$$

$$144 = 11 \cdot 13 + 1$$

$$11 = 0 \cdot 13 + 11$$

si ricava che la scrittura richiesta è

$$\text{B1A0BC}\,.$$

Esercizio 9.2

Si scriva in base *tredici* il numero

trecentoundicimilaottocentocinque.

Si dica poi quale numero in base *undici* si scrive 7653A .

Soluzione – Usando la notazione in base *dieci*, eseguiamo successive divisioni per *tredici*:

$$311\,805 = 13 \cdot 23\,985 + 0\,;$$

$$23\,985 = 13 \cdot 1\,845 + 0\,;$$

$$1\,845 = 13 \cdot 141 + 12\,;$$

$$141 = 13 \cdot 10 + 11\,;$$

$$10 = 13 \cdot 0 + 10\,.$$

Le cifre corrispondenti ai resti trovati, scritte in ordine inverso, forniscono la scrittura richiesta: ABC00 .

Il numero che in base *undici* si scrive $7653\mathrm{A}$ è (con notazione in base *dieci*)

$$7 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11^2 + 3 \cdot 11 + 10 = 7 \cdot 14\,641 + 6 \cdot 1\,331 + 5 \cdot 121 + 3 \cdot 11 + 10 =$$
$$= 102\,487 + 7\,986 + 605 + 33 + 10 = 111\,121$$

ossia *centoundicimilacentoventuno*.

Esercizio 9.3

Si scriva in base *tredici* il numero

$$n := \textit{trecentoundicimilaseicentoventitré} = 311\,623_{\textit{dieci}}$$

e si determini, senza eseguire la divisione, il resto della divisione di n per *sei*.

Soluzione – Eseguendo successive divisioni euclidee per *tredici* si trova che (la notazione in quanto segue è in base *dieci*)

$$311\,623 = 23\,971 \cdot 13 + 0\,; \qquad 23\,971 = 1\,843 \cdot 13 + 12\,;$$
$$1\,843 = 141 \cdot 13 + 10\,; \qquad 141 = 10 \cdot 13 + 11\,; \qquad 10 = 0 \cdot 13 + 10\,.$$

Scrivendo da destra a sinistra le cifre che rappresentano i resti così trovati si ottiene la rappresentazione di n in base *tredici*, cioè $\mathrm{ABAC}0$.

Infine, poiché *tredici* è congruo *uno* (mod *sei*), il resto della divisione di n per *sei* è dato dal resto della divisione per *sei* della somma delle cifre nella sua scrittura in base *tredici*: tale somma è *quarantatré*, e dunque il resto cercato è *uno*.

Esercizio 9.4

Si scriva in base *quarantatré* il numero

ventiquattromilionicinquecentoottantaquattromilasettecentouno

(che in base *dieci* si scrive $24\,584\,701$). Si determini poi, senza effettuare la divisione e spiegando sinteticamente il procedimento seguito, il resto della divisione euclidea di tale numero per *sette*.

Soluzione – Poiché (con notazione in base *dieci*)

$$24\,584\,701 = 43 \cdot 571\,737 + 10\,;$$
$$571\,737 = 43 \cdot 13\,296 + 9\,;$$
$$13\,296 = 43 \cdot 309 + 9\,;$$
$$309 = 43 \cdot 7 + 8\,;$$
$$7 = 43 \cdot 0 + 7$$

il numero dato in base *quarantatré* si scrive $7\,8\,9\,9\,\mathrm{A}$.

Poiché la base *quarantatré* è congrua a *uno* modulo *sette*, il resto della divisione per *sette* del numero dato è uguale al resto della divisione per *sette* della somma delle sue cifre (in base *quarantatré*), cioè è uguale al resto della divisione per *sette* di *quarantatré*, cioè è uguale a *uno*.

Esercizio 9.5

Si scriva in base *quindici* il numero

ottomilionicentocinquantamilaottocentodiciotto .

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$8\,150\,818 = 543\,387 \cdot 15 + 13$$

si ricava che l'ultima cifra a destra della scrittura richiesta è D. Proseguendo successivamente con le divisioni

$$543\,387 = 36\,225 \cdot 15 + 12\,; \qquad 36\,225 = 2\,415 \cdot 15 + 0\,;$$

$$2\,415 = 161 \cdot 15 + 0\,; \qquad 161 = 10 \cdot 15 + 11\,;$$

$$10 = 0 \cdot 15 + 10$$

si ricava che la scrittura richiesta è AB00CD .

Esercizio 9.6

Sia n il numero naturale che in base *tredici* si scrive

123 ABC .

Si scriva n in base *dieci* e in base *sette* e si dica (senza effettuare la divisione, ma motivando il procedimento seguito) qual è il resto della divisone euclidea di n per *dodici*.

Soluzione – La scrittura di n in base *dieci* è

$$1 \cdot 13^5 + 2 \cdot 13^4 + 3 \cdot 13^3 + 10 \cdot 13^2 + 11 \cdot 13^1 + 12 \cdot 13^0 =$$

$$= 371\,293 + 2 \cdot 28\,561 + 3 \cdot 2\,197 + 10 \cdot 169 + 11 \cdot 13 + 12 =$$

$$= 371\,293 + 57\,122 + 6\,591 + 1690 + 143 + 12 = 436\,851$$

Dunque n è il numero *quattrocentotrentaseimilaottocentocinquantuno*. Per scriverlo in base *sette* effettuiamo successive divisioni euclidee per *sette* e consideriamo i resti nell'ordine inverso a quello in cui li troviamo (per le divisioni che seguono usiamo la notazione in base *dieci*):

$$436\,851 = 62\,407 \cdot 7 + 2\,; \qquad 62\,407 = 8\,915 \cdot 7 + 2\,;$$

$$8\,915 = 1\,273 \cdot 7 + 4\,; \qquad 1\,273 = 181 \cdot 7 + 6\,;$$

$$181 = 25 \cdot 7 + 6\,; \qquad 25 = 3 \cdot 7 + 4\,;$$

$$3 = 0 \cdot 7 + 3\,.$$

Pertanto la scrittura di n in base *sette* è $3\,466\,422$.

Per rispondere all'ultima domanda, torniamo alla scrittura di n in base *tredici*. Poiché *tredici* è congruo a uno modulo *dodici*, il resto della divisione euclidea di n per *dodici* è uguale al resto della divisione euclidea per *dodici* della somma delle cifre di n in base *tredici*. Tale somma delle cifre è *trentanove*, che diviso per *dodici* dà (quoziente *tre* e) resto *tre*: quindi il resto della divisione euclidea di n per *dodici* è *tre*.

Esercizio 9.7

Sia n il numero naturale che in base *trentacinque* si scrive

$$123\,456\,789\,123\,456\,789\,123\,456\,789\,.$$

Si trovi il resto della divisione euclidea di n per *cinque*, per *sette* e per *diciassette*.

Soluzione – Nella scrittura in base *trentacinque*, la cifra $i-$sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)-$sima di *trentacinque*; poiché *trentacinque* è congruo a zero modulo *cinque* e *sette*, ed è congruo a uno modulo *diciassette*, ciò significa che:

– modulo *cinque* e modulo *sette*, tutte le cifre tranne l'ultima vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *nove* (modulo *cinque* e modulo *sette*), cioè il resto della divisione di n per *cinque* è *quattro* e il resto della divisione di n per *sette* è *due*.

– modulo *diciassette*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *diciassette*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *centotrentacinque*). Il resto della divisione di n per *diciassette* è dunque il resto della divisione di *centotrentacinque* per *diciassette*, ossia *sedici*.

Esercizio 9.8

Si scriva in base *tredici* il numero naturale che in base *dieci* si scrive

$$4\,508\,386\,.$$

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$4\,508\,386 = 346\,798 \cdot 13 + 12$$

si ricava che l'ultima cifra a destra della scrittura richiesta è C. Proseguendo successivamente con le divisioni

$$346\,798 = 26\,676 \cdot 13 + 10\,; \qquad 26\,676 = 2\,052 \cdot 13 + 0\,;$$

$$2\,052 = 157 \cdot 13 + 11\,; \qquad 157 = 12 \cdot 13 + 1\,;$$

$$12 = 0 \cdot 13 + 12$$

si ricava che la scrittura richiesta è $\quad \mathrm{C1B0AC}\,.$

Esercizio 9.9

Si scriva in base *diciassette* il numero

$$n := \textit{cinquantaduemilacinquecentootto} = 52\,508_{\textit{dieci}}$$

e si determini, senza eseguire la divisione, il resto della divisione di n per *otto* .

Soluzione – Eseguendo successive divisioni euclidee per *diciassette* si trova che (la notazione in quanto segue è in base *dieci*)

$$52\,508 = 3\,088 \cdot 17 + 12\,;$$

$$3\,088 = 181 \cdot 17 + 11\,;$$

$$181 = 10 \cdot 17 + 11\,;$$

$$10 = 0 \cdot 17 + 10\ .$$

Scrivendo da destra a sinistra le cifre che rappresentano i resti così trovati si ottiene la rappresentazione di n in base *diciassette*, cioè ABBC .

Infine, poiché *diciassette* è congruo *uno* (mod *otto*), il resto della divisione di n per *otto* è dato dal resto della divisione per *otto* della somma delle cifre nella sua scrittura in base *diciassette*: tale somma è *quarantaquattro*, e dunque il resto cercato è *quattro* .

Esercizio 9.10

Si scriva in base *tredici* il numero

trecentotrentottomilatrecentoventicinque.

Si dica poi quale numero in base *sette* si scrive 44252.

Soluzione – Usando la notazione in base *dieci*, eseguiamo successive divisioni per *tredici*:

$$338\,325 = 13 \cdot 26\,025 + 0\,;$$

$$26\,025 = 13 \cdot 2\,001 + 12\,;$$

$$2\,001 = 13 \cdot 153 + 12\,;$$

$$153 = 13 \cdot 11 + 10\,;$$

$$11 = 13 \cdot 0 + 11\,.$$

Le cifre corrispondenti ai resti trovati, scritte in ordine inverso, forniscono la scrittura richiesta: BACC0 .

Il numero che in base *sette* si scrive 44252 è (con notazione in base *dieci*)

$$4 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 2 = 4 \cdot 2\,401 + 4 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 2 =$$

$$= 9\,604 + 1\,372 + 98 + 35 + 2 = 11\,111$$

ossia *undicimilacentoundici*.

Esercizio 9.11

Sia n il numero naturale che in base *venticinque* si scrive

$$976\,781\,457\,198\,.$$

Si trovi il resto della divisione euclidea di n per *cinque*, per *dodici* e per *tredici*.

Soluzione – Nella scrittura in base *venticinque*, la cifra i – sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)$ – sima di *venticinque*; poiché *venticinque* è congruo a *zero* modulo *cinque* e *sette*, è congruo a *uno* modulo *dodici* ed è congruo a "*meno uno*" modulo *tredici*, ciò significa che:

– modulo *cinque*, tutte le cifre tranne la prima a destra vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *otto* (modulo *cinque*), cioè il resto della divisione di n per *cinque* è il resto della divisione di *otto* per *cinque*, ossia *tre*.

– modulo *dodici*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *dodici*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *settantadue*). Il resto della divisione di n per *dodici* è dunque il resto della divisione di *settantadue* per *dodici*, ossia *zero*.

– modulo *tredici*, tutte le cifre di posto dispari (contando da destra e iniziando con *zero*) vengono moltiplicate per *uno*, mentre le cifre di posto *pari* (contando da destra e iniziando con *zero*) vengono moltiplicate per "*meno uno*"; dunque, modulo *tredici*, n è congruo alla differenza tra la somma delle proprie cifre di posto dispari (che è *ventinove*) e la somma delle proprie cifre di posto pari (che è *quarantatré*). Tale differenza è "*meno quattordici*", che è congruo a *dodici* modulo *tredici*. Il resto della divisione di n per *tredici* è dunque *dodici*.

Esercizio 9.12

Si scriva in base *cinquantasette* il numero

settantacinquemilioniquattrocentotremilatrecentoquindici

(che in base *dieci* si scrive $75\,403\,315$). Si determini poi, senza effettuare la divisione e spiegando sinteticamente il procedimento seguito, il resto della divisione euclidea di tale numero per *sette*.

Soluzione – Poiché (con notazione in base *dieci*)

$$75\,403\,315 = 57 \cdot 1\,322\,865 + 10\,;$$

$$1\,322\,865 = 57 \cdot 23\,208 + 9\,;$$

$$23\,208 = 57 \cdot 407 + 9\,;$$

$$407 = 57 \cdot 7 + 8\,;$$

$$7 = 57 \cdot 0 + 7$$

il numero dato in base *cinquantasette* si scrive $78\,99\mathrm{A}\,.$

Poiché la base *cinquantasette* è congrua a *uno* modulo *sette*, il resto della divisione per *sette* del numero dato è uguale al resto della divisione per *sette* della somma delle sue cifre (in base *cinquantasette*), cioè è uguale al resto della divisione per *sette* di *quarantatré*, cioè è uguale a *uno*.

Esercizio 9.13

Si scriva in base *quindici* il numero

undicimilioniduecentoottantanovemilacinquecentosessantasei .

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$11\,289\,566 = 752\,637 \cdot 15 + 11$$

si ricava che l'ultima cifra a destra della scrittura richiesta è B. Proseguendo successivamente con le divisioni

$752\,637 = 50\,175 \cdot 15 + 12\,;$ $\quad$ $50\,175 = 3\,345 \cdot 15 + 0\,;$

$3\,345 = 223 \cdot 15 + 0\,;$ $\quad$ $223 = 14 \cdot 15 + 13\,;$

$14 = 0 \cdot 15 + 14$

si ricava che la scrittura richiesta è $\quad \mathrm{ED00CB}\,.$

Esercizio 9.14

Sia n il numero naturale che in base *quindici* si scrive

$$123\,\mathrm{ABC}\,.$$

Si scriva n in base *dieci* e in base *undici* e si dica (senza effettuare la divisione, ma motivando il procedimento seguito) qual è il resto della divisone euclidea di n per *sette*.

Soluzione – La scrittura di n in base *dieci* è

$$1 \cdot 15^5 + 2 \cdot 15^4 + 3 \cdot 15^3 + 10 \cdot 15^2 + 11 \cdot 15^1 + 12 \cdot 15^0 =$$
$$= 759\,375 + 2 \cdot 50\,625 + 3 \cdot 3\,375 + 10 \cdot 225 + 11 \cdot 15 + 12 =$$
$$= 759\,375 + 101\,250 + 10\,125 + 2\,250 + 165 + 12 = 873\,177$$

Dunque n è il numero *ottocentosettantatremilacentosettantasetta*. Per scriverlo in base *undici* effettuiamo successive divisioni euclidee per *undici* e consideriamo i resti nell'ordine inverso a quello in cui li troviamo (per le divisioni che seguono usiamo la notazione in base *dieci*):

$873\,177 = 79\,379 \cdot 11 + 8\,;$ $\quad$ $79\,379 = 7\,216 \cdot 11 + 3\,;$

$7\,216 = 656 \cdot 11 + 0\,;$ $\quad$ $656 = 59 \cdot 11 + 7\,;$

$59 = 5 \cdot 11 + 4\,;$ $\quad$ $5 = 0 \cdot 11 + 5\,.$

Pertanto la scrittura di n in base *undici* è $\;547038\,.$

Per rispondere all'ultima domanda, torniamo alla scrittura di n in base *quindici*. Poiché *quindici* è congruo a *uno* modulo *sette*, il resto della divisione euclidea di n per *sette* è uguale al resto della divisione euclidea per *sette* della somma delle cifre di n in base *quindici*. Tale somma delle cifre è *trentanove*, che diviso per *sette* dà (quoziente *cinque* e) resto *quattro*: quindi il resto della divisione euclidea di n per *sette* è *quattro*.

Esercizio 9.15

Sia n il numero naturale che in base *trentacinque* si scrive

$$987\,654\,321\,987\,654\,321\,987\,654\,321\,.$$

Si trovi il resto della divisione euclidea di n per *cinque*, per *sette* e per *diciassette*.

Soluzione – Nella scrittura in base *trentacinque*, la cifra i – sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)$ – sima di *trentacinque*; poiché *trentacinque* è congruo a *zero* modulo *cinque* e *sette*, ed è congruo a *uno* modulo *diciassette*, ciò significa che:

– modulo *cinque* e modulo *sette*, tutte le cifre tranne l’ultima vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *uno* (modulo *cinque* e modulo *sette*), cioè il resto della divisione di n per *cinque* (e il resto della divisione di n per *sette*) è *uno*.

– modulo *diciassette*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *diciassette*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *centotrentacinque*). Il resto della divisione di n per *diciassette* è dunque il resto della divisione di *centotrentacinque* per *diciassette*, ossia *sedici*.

Esercizio 9.16

Si scriva in base *tredici* il numero naturale che in base *dieci* si scrive

$$4\,139\,289\,.$$

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$4\,139\,289 = 318\,406 \cdot 13 + 11$$

si ricava che l’ultima cifra a destra della scrittura richiesta è B. Proseguendo successivamente con le divisioni

$$318\,406 = 24\,492 \cdot 13 + 10$$

$$24\,492 = 1\,884 \cdot 13 + 0$$

$$1\,884 = 144 \cdot 13 + 12$$

$$144 = 11 \cdot 13 + 1$$

$$11 = 0 \cdot 13 + 11$$

si ricava che la scrittura richiesta è $\mathrm{B1C0AB}\,.$

Esercizio 9.17

Si scriva in base *tredici* il numero

$$n := \textit{trecentotrentottomilatrecentotrentacinque} = 338\,335_{\textit{dieci}}$$

e si determini, senza eseguire la divisione, il resto della divisione di n per *sei*.

Soluzione – Eseguendo successive divisioni euclidee per *tredici* si trova che (la notazione in quanto segue è in base *dieci*)

$$338\,335 = 26\,025 \cdot 13 + 10\,;$$

$$26\,025 = 2\,001 \cdot 13 + 12\,;$$

$$2\,001 = 153 \cdot 13 + 12\,;$$

$$153 = 11 \cdot 13 + 10\,;$$

$$11 = 0 \cdot 13 + 11\,.$$

Scrivendo da destra a sinistra le cifre che rappresentano i resti così trovati si ottiene la rappresentazione di n in base *tredici*, cioè BACCA .

Infine, poiché *tredici* è congruo *uno* (mod *sei*), il resto della divisione di n per *sei* è dato dal resto della divisione per *sei* della somma delle cifre nella sua scrittura in base *tredici*: tale somma è *cinquantacinque*, e dunque il resto cercato è *uno*.

Esercizio 9.18

Sia n il numero naturale che in base *dodici* si scrive

$$323\,120\,\mathrm{B}17\,32\mathrm{B}\,\mathrm{A}48\,.$$

Si dica, motivando la risposta, qual è il resto della divisione euclidea di n per *sei* e per *undici*.

Soluzione – Nella scrittura in base *dodici*, la cifra i – sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)$ – sima di *dodici*; poiché *dodici* è congruo a *zero* modulo *sei*, ed è congruo a *uno* modulo *undici*, ciò significa che:

– modulo *sei*, tutte le cifre tranne l'ultima vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *otto* (modulo *sei*), cioè il resto della divisione di n per *sei* è *due*.

– modulo *undici*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *undici*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *sessantotto*). Il resto della divisione di n per *undici* è dunque il resto della divisione di *sessantotto* per *undici*, ossia *due*.

Esercizio 9.19

Si scriva in base *tredici* il numero naturale che in base *dieci* si scrive

$$4\,506\,214\,.$$

Soluzione – Dalla divisione euclidea (scritta in base *dieci*)

$$4\,506\,214 = 346\,631 \cdot 13 + 11$$

si ricava che l’ultima cifra a destra della scrittura richiesta è B. Proseguendo successivamente con le divisioni

$$346\,631 = 26\,663 \cdot 13 + 12$$

$$26\,663 = 2\,051 \cdot 13 + 0$$

$$2\,051 = 157 \cdot 13 + 10$$

$$157 = 12 \cdot 13 + 1$$

$$12 = 0 \cdot 13 + 12$$

si ricava che la scrittura richiesta è C1A0CB.

Esercizio 9.20

Si scriva in base *diciassette* il numero

$$n := \textit{cinquantaduemilaottocentoquattordici} = 52\,814_{\textit{dieci}}$$

e si determini, senza eseguire la divisione, il resto della divisione di n per *otto*.

Soluzione – Eseguendo successive divisioni euclidee per *diciassette* si trova che (la notazione in quanto segue è in base *dieci*)

$$52\,814 = 3\,106 \cdot 17 + 12\,;$$

$$3\,106 = 182 \cdot 17 + 12\,;$$

$$182 = 10 \cdot 17 + 12\,;$$

$$10 = 0 \cdot 17 + 10\ .$$

Scrivendo da destra a sinistra le cifre che rappresentano i resti così trovati si ottiene la rappresentazione di n in base *diciassette*, cioè ACCC.

Infine, poiché *diciassette* è congruo *uno* (mod *otto*), il resto della divisione di n per *otto* è dato dal resto della divisione per *otto* della somma delle cifre nella sua scrittura in base *diciassette*: tale somma è *quarantasei*, e dunque il resto cercato è *sei*.

Esercizio 9.21

Sia n il numero naturale che in base *venticinque* si scrive

$$198\,457\,781\,976\,.$$

Si trovi il resto della divisione euclidea di n per *cinque*, per *dodici* e per *tredici*.

Soluzione – Nella scrittura in base *venticinque*, la cifra i – sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)$ – sima di *venticinque*; poiché *venticinque* è congruo a *zero* modulo *cinque*, è congruo a *uno* modulo *dodici* ed è congruo a “*meno uno*” modulo *tredici*, ciò significa che:

– modulo *cinque*, tutte le cifre tranne la prima a destra vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *otto* (modulo *cinque*), cioè il resto della divisione di n per *cinque* è il resto della divisione di *sei* per *cinque*, ossia è *uno*.

– modulo *dodici*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *dodici*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *settantadue*). Il resto della divisione di n per *dodici* è dunque il resto della divisione di *settantadue* per *dodici*, ossia *zero*.

– modulo *tredici*, tutte le cifre di posto dispari (contando da destra e iniziando con *zero*) vengono moltiplicate per *uno*, mentre le cifre di posto pari (contando da destra e iniziando con *zero*) vengono moltiplicate per “*meno uno*”; dunque, modulo *tredici*, n è congruo alla differenza tra la somma delle proprie cifre di posto dispari (che è *quarantatré*) e la somma delle proprie cifre di posto pari (che è *ventinove*). Tale differenza è *quattordici*, che è congruo a *uno* modulo *tredici*. Il resto della divisione di n per *tredici* è dunque *uno*.

Esercizio 9.22

Sia n il numero naturale che in base *dodici* si scrive

$$898\,\mathrm{AB9}\,\mathrm{B71}\,32\mathrm{B}\,84\mathrm{A}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, qual è il resto della divisione euclidea di n per *sei* e per *undici*.

Soluzione – Nella scrittura in base *dodici*, la cifra i – sima (contando da destra e iniziando con *zero*) viene moltiplicata per la potenza $(i-1)$ – sima di *dodici*; poiché *dodici* è congruo a *zero* modulo *sei*, ed è congruo a *uno* modulo *undici*, ciò significa che:

– modulo *sei*, tutte le cifre tranne l’ultima vengono moltiplicate per *zero*; dunque n è congruo a *dieci* (modulo *sei*), cioè il resto della divisione di n per *sei* è *quattro*.

– modulo *undici*, tutte le cifre vengono moltiplicate per *uno*; dunque, modulo *undici*, n è congruo alla somma delle proprie cifre (che è *centododici*). Il resto della divisione di n per *undici* è dunque il resto della divisione di *centododici* per *undici*, ossia *due*.