12. – Esercizi su: ***calcolo combinatorio***.

Esercizio 12.1

In quanti modi diversi si possono distribuire 35 caramelle alla menta (tutte uguali fra loro) fra 15 bambini

(i) senza altre condizioni;
(ii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero dispari di caramelle;
(iii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero pari di caramelle.

Esercizio 12.2

Si dica quanti sono i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Esercizio 12.3

Quante diverse $5-$ple ordinate di lettere dell’alfabeto inglese (26 simboli) si possono formare

(i) con la condizione che le lettere siano tutte diverse fra loro;

(ii) con la condizione che nessuna lettera sia seguita da una lettera che la precede nell’alfabeto inglese (quindi “Z” può essere seguita soltanto da “Z”, mentre “A” può essere seguita da qualsiasi lettera, compresa un’ulteriore “A”).

Esercizio 12.4

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 5 differenti altezze (2, 4, 7, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 9 mattoncini di altezza ***non decrescente***: ad esempio, può costruire una fila nella quale i nove mattoncini abbiano altezza rispettivamente 4, 4, 4, 7, 7, 8, 8, 8, 9 cm., ma non costruirebbe mai alcuna fila nella quale i nove mattoncini avessero altezza rispettivamente 2, 7, 7, 4, 8, 8, 8, 9, 9 .

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

$\boxed{\text{Esercizio 12.5}}$

Joe Plumber è da molte edizioni componente della giuria che ogni anno elegge miss Calisota tra 5 finaliste, anche se è un po' disorientato perché le regole di votazione cambiano frequentemente.

Due anni fa, Joe poteva assegnare ad ogni finalista un voto, consistente in un numero naturale da lui scelto tra un minimo di 3 e un massimo di 9.

L'anno scorso fu aggiunto il vincolo che ogni giurato dovesse assegnare alle finaliste punteggi tutti diversi, sempre numeri naturali compresi fra un minimo di 3 e un massimo di 9.

Quest'anno le regole sono ancora cambiate: Joe (come ogni altro giurato) ha a disposizione 20 punti che deve distribuire tra le 5 finaliste, senza altro vincolo che quello di assegnarli tutti senza frazionarli.

In quanti modi diversi Joe Plumber poteva votare due anni fa? In quanti modi diversi poteva votare l'anno scorso? In quanti modi diversi può votare quest'anno?

$\boxed{\text{Esercizio 12.6}}$

In quanti modi diversi la maestra può dividere 160 cioccolatini fra 8 bambini, con la condizione che ogni bambino riceva almeno dieci cioccolatini?

$\boxed{\text{Esercizio 12.7}}$

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 6 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra "5" compare esattamente tre volte;
(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);
(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);
(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

$\boxed{\text{Esercizio 12.8}}$

In quanti modi diversi si possono distribuire 37 caramelle al lampone (tutte uguali fra loro) fra 13 bambini

(i) senza altre condizioni;
(ii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero dispari di caramelle;
(iii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero pari di caramelle.

Esercizio 12.9

Si dica quanti sono i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$.

Esercizio 12.10

Si stabilisca quanti diversi numeri di 8 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 3, 5, 7, 8
(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere otto nell’usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);
(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);
(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l’ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dodici, sia divisibile per sei.

Esercizio 12.11

Si dica quante soluzioni in $\mathbb{N}^5$ ha l’equazione

$$x + y + z + t + w = 56\,.$$

Esercizio 12.12

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 6 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui
(i) la cifra “2” compare esattamente tre volte;
(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);
(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);
(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Esercizio 12.13

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 6 differenti altezze (2, 5, 6, 8, 9, 12 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 8 mattoncini di altezza ***non decrescente***: ad esempio, può costruire una fila nella quale gli otto mattoncini abbiano altezza rispettivamente 5, 5, 6, 9, 9, 9, 12, 12 cm., ma non costruirebbe mai alcuna fila nella quale gli otto mattoncini avessero altezza rispettivamente 2, 6, 6, 5, 8, 9, 9, 12.

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

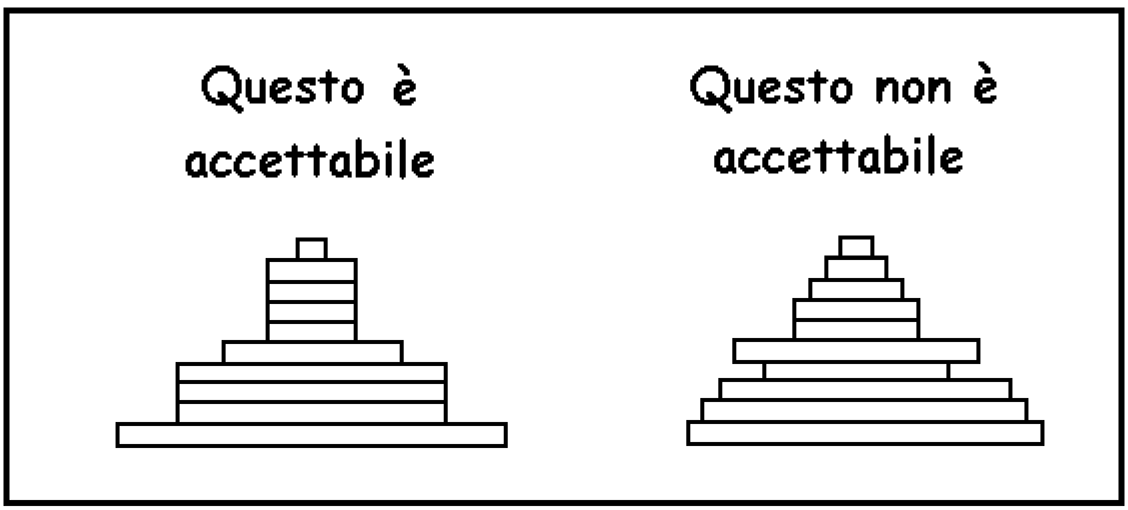
Esercizio 12.14

Si dica quanti sono i monomi di grado 11 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Esercizio 12.15

Pierino costruisce segnaposto per il pranzo di Ferragosto sovrapponendo in modo concentrico dieci dischetti di cartone scelti fra un numero illlimitato a sua disposizione che si distinguono fra loro perché sono di quindici differenti dimensioni; unica regola da rispettare per la costruzione: in ciascun segnaposto, nessun dischetto può essere sovrapposto a un dischetto più piccolo.

Quindi, ad esempio, Pierino può sovrapporre (in quest’ordine) dischetti di raggio rispettivamente $13, 9, 9, 9, 6, 3, 3, 3, 3, 1$ ma non può sovrapporre (in quest’ordine) dischetti di raggio rispettivamente $12, 11, 10, 6, 8, 4, 4, 3, 2, 1$ (perché $6 > 8$).



Quanti diversi segnaposto può costruire Pierino?

Esercizio 12.16

Si dica quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con cinque cifre tutte diverse da zero, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre due sono diverse (fra loro e dalle precedenti).

Si dica poi quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con sei cifre, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre tre sono diverse (fra loro e dalle precedenti). In questo caso dunque la cifra “zero” è ammessa, ma le cifre devono essere effettivamente cinque nell’usuale notazione in base dieci (quindi la prima cifra non può essere zero).

Esercizio 12.17

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 3, 5, 7, 8

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Esercizio 12.18

Si dica quante password distinte formate da 8 caratteri alfanumerici (cioè quante $8-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 4 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 4 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra “3”, esattamente due volte la cifra “2” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Esercizio 12.19

Si dica quanti sono i numeri di sette cifre (da 0 a 9) effettive (dunque la prima cifra non può essere zero) tali che

(i) non vi sono altre condizioni;
(ii) le cifre sono tutte distinte;
(iii) la cifra “7” compare esattamente tre volte, e la cifra “0” non compare;
(iv) compaiono soltanto le cifre “3” e “4”, rispettivamente tre e quattro volte;
(v) nessuna cifra è seguita da una di valore maggiore (quindi ad esempio si accetta 5333221 ma non si accetta 5334211).

Esercizio 12.20

Si dica quanti sono i monomi di grado 9 nelle incognite x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$.

Esercizio 12.21

Si dica quante soluzioni in $\mathbb{N}^6$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + u + w = 65 \,.$$

Esercizio 12.22

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri che in base dieci si scrivono con nove cifre delle quali esattamente cinque sono dispari e le restanti quattro, da sinistra a destra, risultano in ordine non crescente (cioè, ciascuna cifra pari è maggiore o uguale della successiva cifra pari).

Esercizio 12.23

Quante diverse $6-$ple ordinate di lettere dell’alfabeto italiano (21 simboli) si possono formare

(i) con la condizione che le lettere siano tutte diverse fra loro;

(ii) con la condizione che nessuna lettera sia seguita da una lettera che la precede nell’alfabeto italiano (quindi “Z” può essere seguita soltanto da “Z”, mentre “A” può essere seguita da qualsiasi lettera, compresa un’ulteriore “A”).

Esercizio 12.24

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 6 differenti altezze (2, 4, 6, 7, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 7 mattoncini di altezza ***non decrescente***: ad esempio, può costruire una fila nella quale i sette mattoncini abbiano altezza rispettivamente 4, 4, 6, 8, 8, 8, 9 cm., ma non costruirebbe mai alcuna fila nella quale i sette mattoncini avessero altezza rispettivamente 2, 6, 6, 4, 8, 9, 9 .

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Esercizio 12.25

Joe Plumber è da molte edizioni componente della giuria che ogni anno elegge miss Calisota tra 5 finaliste, anche se è un po’ disorientato perché le regole di votazione cambiano frequentemente.

Due anni fa, Joe poteva assegnare ad ogni finalista un voto, consistente in un numero naturale da lui scelto tra un minimo di 2 e un massimo di 8.

L’anno scorso fu aggiunto il vincolo che ogni giurato dovesse assegnare alle finaliste punteggi tutti diversi, sempre numeri naturali compresi fra un minimo di 2 e un massimo di 8.

Quest’anno le regole sono ancora cambiate: Joe (come ogni altro giurato) ha a disposizione 15 punti che deve distribuire tra le 5 finaliste, senza altro vincolo che quello di assegnarli tutti senza frazionarli.

In quanti modi diversi Joe Plumber poteva votare due anni fa? In quanti modi diversi poteva votare l’anno scorso? In quanti modi diversi può votare quest’anno?

Esercizio 12.26

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 1, 3, 5, 7, 8

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Esercizio 12.27

In quanti modi diversi la maestra può dividere 150 cioccolatini fra 7 bambini, con la condizione che ogni bambino riceva almeno dieci cioccolatini?

Esercizio 12.28

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 5 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra "7" compare esattamente tre volte;

(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);

(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);

(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Esercizio 12.29

Si dica quante password distinte formate da 7 caratteri alfanumerici (cioè quante $7-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 3 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 3 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra "2", esattamente due volte la cifra "3" e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Esercizio 12.30

Si dica quanti sono i monomi di grado 11 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Esercizio 12.31

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 4, 7, 8, 9
(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);
(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);
(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dodici, sia divisibile per sei.

Esercizio 12.32

Si dica quante soluzioni in $\mathbb{N}^5$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + w = 66\,.$$

Esercizio 12.33

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 3, 5, 7, 9
(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);
(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);
(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Esercizio 12.34

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 5 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui
(i) la cifra "3" compare esattamente tre volte;
(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);
(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);
(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Esercizio 12.35

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 5 differenti altezze (2, 5, 6, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 8 mattoncini di altezza ***non decrescente***: ad esempio, può costruire una fila nella quale gli otto mattoncini abbiano altezza rispettivamente 5, 5, 6, 8, 8, 8, 9, 9 cm., ma non costruirebbe mai alcuna fila nella quale gli otto mattoncini avessero altezza rispettivamente 2, 6, 6, 5, 8, 9, 9, 9.

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Esercizio 12.36

Si dica quanti sono i monomi di grado 8 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$.

Esercizio 12.37

Si dica quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con sei cifre tutte diverse da zero, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre tre sono diverse (fra loro e dalle precedenti).

Si dica poi quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con cinque cifre, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre due sono diverse (fra loro e dalle precedenti). In questo caso dunque la cifra “zero” è ammessa, ma le cifre devono essere effettivamente cinque nell’usuale notazione in base dieci (quindi la prima cifra non può essere zero).

Esercizio 12.38

Si dica quante password distinte formate da 8 caratteri alfanumerici (cioè quante $8-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell’alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 5 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 5 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra “2”, esattamente due volte la cifra “3” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Esercizio 12.39

Si dica quanti sono i numeri di otto cifre (da 0 a 9) effettive (dunque la prima cifra non può essere zero) tali che

(i) non vi sono altre condizioni;

(ii) le cifre sono tutte distinte;

(iii) la cifra “8” compare esattamente tre volte, e la cifra “0” non compare;

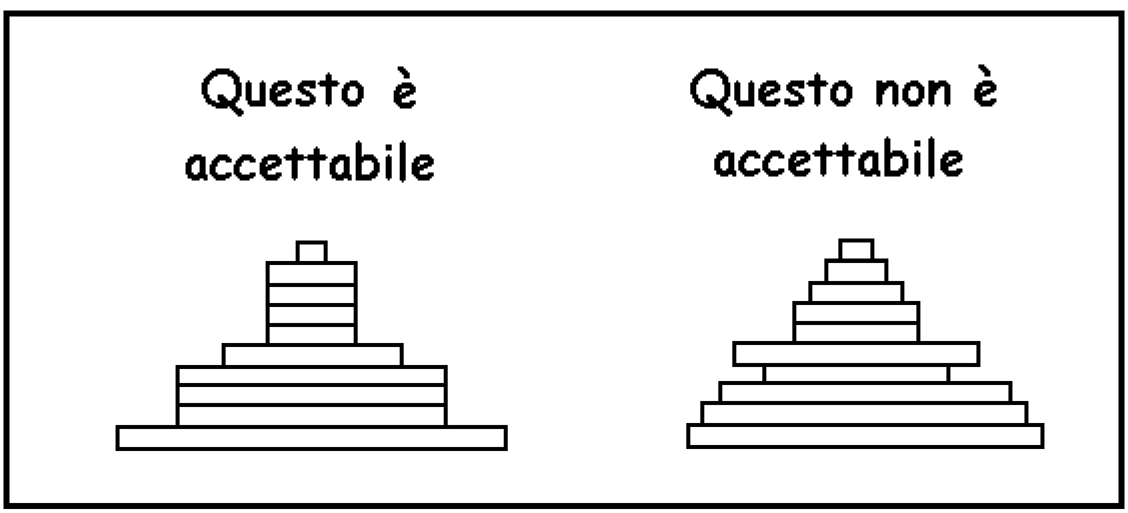
(iv) compaiono soltanto le cifre “3” e “4”, rispettivamente tre e cinque volte;

(v) nessuna cifra è seguita da una di valore maggiore (quindi ad esempio si accetta 53333221 ma non si accetta 53334211).

Esercizio 12.40

Pierino costruisce segnaposto per il pranzo di Ferragosto sovrapponendo in modo concentrico dodici dischetti di cartone scelti fra un numero illlimitato a sua disposizione che si distinguono fra loro perché sono di tredici differenti dimensioni; unica regola da rispettare per la costruzione: in ciascun segnaposto, nessun dischetto può essere sovrapposto a un dischetto più piccolo.

Quindi, ad esempio, Pierino può sovrapporre (in quest’ordine) dischetti di raggio rispettivamente $13, 9, 9, 9, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 1$ ma non può sovrapporre (in quest’ordine) dischetti di raggio rispettivamente $12, 11, 10, 6, 8, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1$ (perché $6 > 8$) .



Quanti diversi segnaposto può costruire Pierino?

Esercizio 12.41

Si dica quante soluzioni in $\mathbb{N}^6$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + u + w = 75\,.$$

Esercizio 12.42

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 1, 3, 5, 8, 9

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Esercizio 12.43

Si dica quante password distinte formate da 7 caratteri alfanumerici (cioè quante 7 – ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 4 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 4 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente due volte la cifra "2", esattamente tre volte la cifra "3" e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Esercizio 12.44

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri che in base dieci si scrivono con nove cifre delle quali esattamente quattro sono dispari e le restanti cinque, da sinistra a destra, risultano in ordine non crescente (cioè, ciascuna cifra pari è maggiore o uguale della successiva cifra pari).