12. – Soluzione degli esercizi su: ***calcolo combinatorio***.

Esercizio 12.1

In quanti modi diversi si possono distribuire 35 caramelle alla menta (tutte uguali fra loro) fra 15 bambini

(i) senza altre condizioni;
(ii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero dispari di caramelle;
(iii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero pari di caramelle.

Soluzione –
(i) Il numero delle diverse distribuzioni di 35 oggetti identici fra 15 persone è uguale, come ben sappiamo, al numero delle combinazioni con ripetizione di 15 oggetti a 35 a 35, quindi è uguale a

$$\binom{35+15-1}{35} = \frac{49{\cdot}48{\cdot}47{\cdot}46{\cdot}45{\cdot}44{\cdot}43{\cdot}42{\cdot}41{\cdot}40{\cdot}39{\cdot}38{\cdot}37{\cdot}36}{14{\cdot}13{\cdot}12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2} =$$

$$= 47 \cdot 46 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 3 = 675\,248\,872\,536\,.$$

(ii) Se ogni bambino deve ricevere un numero dispari di caramelle, possiamo procedere come segue. Diamo subito una caramella a ogni bambino; restano 20 caramelle, cioè 10 coppie (tutte identiche fra loro) di caramelle. Il numero delle diverse distribuzioni di queste 10 coppie identiche fra 15 persone è uguale, come ben sappiamo, al numero delle combinazioni con ripetizione di 15 oggetti a 10 a 10, quindi è uguale a

$$\binom{10+15-1}{10} = \binom{24}{10} = \binom{24}{14} = \frac{24{\cdot}23{\cdot}22{\cdot}21{\cdot}20{\cdot}19{\cdot}18{\cdot}17{\cdot}16{\cdot}15}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2} =$$

$$= 23 \cdot 22 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 3 = 1\,961\,256\,.$$

(iii) Se ogni bambino deve ricevere un numero pari di caramelle, il totale delle caramelle deve essere pari; pertanto non è possibile distribuire 35 caramelle fra una quantità qualsiasi di bambini rispettando la condizione (iii) (il numero richiesto è dunque 0) .

Esercizio 12.2

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Soluzione – Tralasciando in prima istanza i coefficienti, ogni diverso monomio di grado 13 nelle x, y, z è un "sacchetto" di 13 lettere scelte fra x, y, z; il numero di tali "sacchetti" è dunque uguale al numero delle 13 – combinazioni con ripetizione di 3 oggetti, cioè è

$$\binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = \tfrac{15\cdot 14}{2} = 105\,.$$

Ciascuno di questi può avere un coefficiente scelto fra 1 e 6 (ovviamente lo 0 si esclude perché il grado del monomio non sarebbe più 13), quindi il numero cercato è

$$6 \cdot 105 = 630\,.$$

Esercizio 12.3

Quante diverse $5-$ple ordinate di lettere dell’alfabeto inglese (26 simboli) si possono formare

(i) con la condizione che le lettere siano tutte diverse fra loro;

(ii) con la condizione che nessuna lettera sia seguita da una lettera che la precede nell’alfabeto inglese (quindi “Z” può essere seguita soltanto da “Z”, mentre “A” può essere seguita da qualsiasi lettera, compresa un’ulteriore “A”).

Soluzione – La condizione (i) individua le $5-$disposizioni semplici di 26 oggetti, che sono in numero di

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600\,.$$

La condizione (ii) individua le $5-$combinazioni con ripetizione di 26 oggetti, che sono in numero di

$$\binom{26+5-1}{5} = \binom{30}{5} = \frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = 29 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 7 = 142\,506\,.$$

Esercizio 12.4

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 5 differenti altezze (2, 4, 7, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 9 mattoncini di altezza ***non decrescente*** .

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Soluzione – Le diverse file di mattoncini che rispondono ai requisiti richiesti sono tante quante le combinazioni con ripetizione delle 5 differenti altezze a 9 a 9, cioè sono in numero di

$$\binom{5+9-1}{9} = \binom{13}{9} = \frac{13!}{9!\cdot4!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{4\cdot3\cdot2} = 13 \cdot 11 \cdot 5 = 715\,.$$

Esercizio 12.5

Joe Plumber è da molte edizioni componente della giuria che ogni anno elegge miss Calisota tra 5 finaliste, anche se è un po’ disorientato perché le regole di votazione cambiano frequentemente.

Due anni fa, Joe poteva assegnare ad ogni finalista un voto, consistente in un numero naturale da lui scelto tra un minimo di 3 e un massimo di 9.

L'anno scorso fu aggiunto il vincolo che ogni giurato dovesse assegnare alle finaliste punteggi tutti diversi, sempre numeri naturali compresi fra un minimo di 3 e un massimo di 9.

Quest'anno le regole sono ancora cambiate: Joe (come ogni altro giurato) ha a disposizione 20 punti che deve distribuire tra le 5 finaliste, senza altro vincolo che quello di assegnarli tutti senza frazionarli.

In quanti modi diversi Joe Plumber poteva votare due anni fa? In quanti modi diversi poteva votare l'anno scorso? In quanti modi diversi può votare quest'anno?

Soluzione – Due anni fa, Joe aveva 7 scelte (i 7 numeri interi compresi fra 3 e 9) per il voto da assegnare a ciascuna finalista, e ogni assegnazione di voto era indipendente dall'altra: il numero dei modi diversi in cui Joe poteva votare due anni fa è dunque uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di 7 oggetti a 5 a 5, cioè è uguale a 7^5 $(= 16\,807)$.

L'anno scorso, Joe aveva 7 scelte (i 7 numeri interi compresi fra 3 e 9) per il voto da assegnare a ciascuna finalista, ma le assegnazioni di voto dovevano essere tutte diverse fra loro: il numero dei modi diversi in cui Joe poteva votare l'anno scorso è dunque uguale al numero delle $5-$ disposizioni semplici di 7 oggetti, cioè è uguale a $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ $(= 2\,520)$.

Quest'anno, se indichiamo con v_i il voto che Joe assegna alla $i-$sima finalista, il numero dei modi diversi in cui Joe può votare è uguale al numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^5$ dell'equazione

$$v_1 + \; v_2 + v_3 + \; v_4 + v_5 = 20$$

e quindi è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti a 20 a 20, ossia è

$$\binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20} = \tfrac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626\,.$$

Esercizio 12.6

In quanti modi diversi la maestra può dividere 160 cioccolatini fra 8 bambini, con la condizione che ogni bambino riceva almeno dieci cioccolatini?

Soluzione – Diamoglieli subito, questi dieci cioccolatini a ciascun bambino. Ne restano 80 da dividere fra gli 8 bambini, senza più alcuna condizione; se indichiamo con $c_1, c_2,$ $\ldots, c_8$ il numero dicioccolatini che distribuiremo (in aggiunta ai precedenti) al primo, al secondo, $\ldots$, all'ottavo bambino, si tratta di trovare il numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^8$ dell'equazione

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 = 80$$

e sappiamo che tale numero è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 8 oggetti a 80 a 80, cioè è

$$\tbinom{80+8-1}{80} = \tbinom{87}{80} = \tfrac{87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 87 \cdot 83 \cdot 43 \cdot 41 \cdot 27 \cdot 17 =$$
$$= 5\,843\,355\,957\,.$$

Esercizio 12.7

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 6 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra "5" compare esattamente tre volte;
(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);
(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);
(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente.

Soluzione – (i) Ragioniamo sulla prima cifra, che non può essere zero, distinguendo il caso in cui è "5" da quello in cui è uno degli altri possibili 8 valori. Se la prima cifra è diversa da "5", le tre cifre "5" occupano tre dei rimanenti cinque posti; questi tre posti possono essere scelti in $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ possibilità (8 scelte per la prima cifra, 9 per ciascuna delle altre due): in tutto, 6 480 numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra diversa da "5". Se la prima cifra è un "5", le altre due cifre "5" occupano due dei rimanenti cinque posti; questi due posti possono essere scelti in $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $9^3 = 729$ possibilità: in tutto, $7\,290$ numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra uguale a "5". Complessivamente, abbiamo trovato $6\,480 + 7\,290 = 13\,770$ numeri diversi che verificano la condizione (i).

I numeri che soddisfano la condizione (ii) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni semplici delle 9 cifre da 1 a 9 (perché i numeri non possono iniziare con zero), dunque sono $\binom{9}{6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$.

I numeri che soddisfano la condizione (iii) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni semplici delle 10 cifre da 0 a 9 (perché i numeri non possono iniziare ma certamente possono terminare con zero), dunque sono $\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$.

Infine, i numeri che soddisfano la condizione (iv) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni con ripetizione delle 10 cifre da 0 a 9 (escludendo però la sequenza di 6 cifre tutte uguali a zero), dunque sono

$$\binom{10+6-1}{6} - 1 = \binom{15}{6} - 1 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 - 1 = 5\,004\,.$$

Esercizio 12.8

In quanti modi diversi si possono distribuire 37 caramelle al lampone (tutte uguali fra loro) fra 13 bambini

(i) senza altre condizioni;
(ii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero dispari di caramelle;
(iii) con la condizione che ogni bambino riceva un numero pari di caramelle.

Soluzione –

(i) Il numero delle diverse distribuzioni di 37 oggetti identici fra 13 persone è uguale, come ben sappiamo, al numero delle combinazioni con ripetizione di 13 oggetti a 37 a 37, quindi è uguale a

$$\binom{37+13-1}{37} = \binom{49}{37} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 43 \cdot 41 \cdot 38 \cdot 13 = 92\,263\,734\,836\,.$$

(ii) Se ogni bambino deve ricevere un numero dispari di caramelle, possiamo procedere come segue. Diamo subito una caramella a ogni bambino; restano 24 caramelle, cioè 12 coppie (tutte identiche fra loro) di caramelle. Il numero delle diverse distribuzioni di queste 12 coppie identiche fra 13 persone è uguale, come ben sappiamo, al numero delle combinazioni con ripetizione di 13 oggetti a 12 a 12, quindi è uguale a

$$\binom{12+13-1}{12} = \binom{24}{12} = \frac{24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 23\cdot19\cdot17\cdot14\cdot13\cdot2 = 2\,704\,156\,.$$

(iii) Se ogni bambino deve ricevere un numero pari di caramelle, il totale delle caramelle deve essere pari; pertanto non è possibile distribuire 37 caramelle fra una quantità qualsiasi di bambini rispettando la condizione (iii) (il numero richiesto è dunque 0) .

Esercizio 12.9

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$.

Soluzione – Trascuriamo in un primo momento i coefficienti. Per quanto riguarda la parte letterale, i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z si possono pensare come dei “sacchetti” contenenti ciascuno, in proporzione diversa, 13 lettere fra x, y e z. Il loro numero è dunque quello delle combinazioni con ripetizione di tre oggetti a 13 a 13, ossia è

$$\binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = \frac{15\cdot14}{2} = 105.$$

Ciascuno di questi può avere un coefficiente fra 1 e 4 (non 0, perché il monomio allora varrebbe 0 e non sarebbe più di grado 13). Dunque, i monomi di grado 13 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ sono $4\cdot105 = 420$.

Esercizio 12.10

Si stabilisca quanti diversi numeri di 8 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 3, 5, 7, 8

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere otto nell’usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l’ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dodici, sia divisibile per sei.

Soluzione – Per rispettare la condizione (i), la prima cifra può essere scelta in 5 modi diversi, mentre ciascuna delle successive può essere scelta in 6 modi diversi; in tutto abbiamo $5\cdot6^7 = 1\,399\,680$ numeri diversi.

La condizione (ii) individua le 8 – combinazioni con ripetizione di 6 oggetti, dalle quali dobbiamo escludere quella formata da tutti “zero”; in tutto abbiamo $\binom{8+6-1}{8} - 1 = \binom{13}{8} - 1 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 13 \cdot 11 \cdot 9 - 1 = 1\,286$ numeri diversi.

Un numero scritto in base dodici è divisibile per sei se e soltanto se termina per 0 o per 6; ma il 6 non è fra le cifre a disposizione, quindi i numeri cercati sono tanti quante le 7 – combinazioni con ripetizione di 6 oggetti (a ciascuna delle quali aggiungeremo una cifra “zero” a destra); come sopra, dobbiamo escludere la combinazione formata da tutte cifre uguali a “zero”. Il numero dei numeri (!) che soddisfano la condizione (iii) è dunque

$\binom{7+6-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 11 \cdot 9 \cdot 8 - 1 = 791\,.$

Esercizio 12.11

Si dica, motivando brevemente la risposta, quante soluzioni in $\mathbb{N}^5$ ha l’equazione

$$x + y + z + t + w = 56\,.$$

Soluzione – Se immaginiamo di avere a disposizione una quantità illimitata di palline di cinque tipi diversi, ciascuna contrassegnata con una delle lettere x, y, z, t, w, è lecito pensare a ogni soluzione in $\mathbb{N}^5$ dell’equazione proposta come a un diverso modo di scegliere 56 tali palline.

Il numero di soluzioni in $\mathbb{N}^5$ dell’equazione proposta è pertanto uguale al numero dei modi diversi in cui si possono scegliere 56 oggetti di cinque tipi diversi, cioè al numero delle 56 – *combinazioni con ripetizione* di 5 oggetti, ossia

$$\binom{5+56-1}{56} = \binom{60}{56} = \frac{60!}{56! \cdot 4!} = 487\,635\,.$$

Esercizio 12.12

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 6 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra “2” compare esattamente tre volte;

(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);

(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);

(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Soluzione – (i) Ragioniamo sulla prima cifra, che non può essere zero, distinguendo il caso in cui è "2" da quello in cui è uno degli altri possibili 8 valori. Se la prima cifra è diversa da "2", le tre cifre "2" occupano tre dei rimanenti cinque posti; questi tre posti possono essere scelti in $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ possibilità (8 scelte per la prima cifra, 9 per ciascuna delle altre due): in tutto, $6\,480$ numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra diversa da "2". Se la prima cifra è un "2", le altre due cifre "2" occupano due dei rimanenti cinque posti; questi due posti possono essere scelti in $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $9^3 = 729$ possibilità: in tutto, $7\,290$ numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra uguale a "2". Complessivamente, abbiamo trovato $6\,480 + 7\,290 = 13\,770$ numeri diversi che verificano la condizione (i).

I numeri che soddisfano la condizione (ii) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni semplici delle 9 cifre da 1 a 9 (perché i numeri non possono iniziare con zero), dunque sono $\binom{9}{6} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2} = 84$.

I numeri che soddisfano la condizione (iii) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni semplici delle 10 cifre da 0 a 9 (perché i numeri non possono iniziare ma certamente possono terminare con zero), dunque sono $\binom{10}{6} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 210$.

Infine, i numeri che soddisfano la condizione (iv) sono in corrispondenza biunivoca con le 6 – combinazioni con ripetizione delle 10 cifre da 0 a 9 (escludendo però la sequenza di 6 cifre tutte uguali a zero), dunque sono

$$\binom{10+6-1}{6} - 1 = \binom{15}{6} - 1 = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 - 1 = 5\,004\,.$$

Esercizio 12.13

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 6 differenti altezze (2, 5, 6, 8, 9, 12 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 8 mattoncini di altezza ***non decrescente***.

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Soluzione – Le diverse file di mattoncini che rispondono ai requisiti richiesti sono tante quante le combinazioni con ripetizione delle 6 differenti altezze a 8 a 8, cioè sono in numero di

$$\binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!\cdot 5!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1\,287\,.$$

Esercizio 12.14

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 11 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Soluzione – Se trascuriamo i coefficienti, il numero dei diversi monomi di grado 11 nelle indeterminate x, y, z, w è dato dal numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^4$ dell'equazione

$$e_x + e_y + e_z + e_w = 11$$

(dove e_x, e_y, e_z e e_w indicano l'esponente con cui rispettivamente x, y, z e w compaiono nel monomio) e quindi è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 4 oggetti a 11 a 11, ossia è

$$\binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = \tfrac{14\cdot 13\cdot 12}{3\cdot 2} = 14\cdot 13\cdot 2 = 364\,.$$

Ciascuno di essi può avere per coefficiente uno dei 6 elementi non nulli di $\mathbb{Z}_7$, quindi in tutto ci sono $2\,184$ diversi monomi di grado 11 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Esercizio 12.15

Pierino costruisce segnaposto per il pranzo di Ferragosto sovrapponendo in modo concentrico dieci dischetti di cartone scelti fra un numero illlimitato a sua disposizione che si distinguono fra loro perché sono di quindici differenti dimensioni; unica regola da rispettare per la costruzione: in ciascun segnaposto, nessun dischetto può essere sovrapposto a un dischetto più piccolo.

Quanti diversi segnaposto può costruire Pierino?

Soluzione – I diversi segnaposto che si possono costruire con questa regola sono tanti quante le $10-$ combinazioni con ripetizione di 15 oggetti; dunque il numero cercato è

$$\binom{15+10-1}{10} = \binom{24}{10} = \tfrac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 23\cdot 22\cdot 19\cdot 17\cdot 4\cdot 3 = 1\,961\,256\,.$$

Esercizio 12.16

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con cinque cifre tutte diverse da zero, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre due sono diverse (fra loro e dalle precedenti).

Si dica poi, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con sei cifre, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre tre sono diverse (fra loro e dalle precedenti). In questo caso dunque la cifra "zero" è ammessa, ma le cifre devono essere effettivamente cinque nell'usuale notazione in base dieci (quindi la prima cifra non può essere zero).

Soluzione – Nel primo caso, ogni cifra può andare in qualsiasi posto. Scegliamo dunque in primo luogo dove sistemare le tre cifre uguali fra loro (ciò si può fare in $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ modi diversi). La cifra da ripetere tre volte può essere scelta in 9 modi diversi, le altre due cifre rispettivamente in 8 e 7 modi diversi. Per il principio di moltiplicazione, i numeri cercati sono in tutto $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5\,040\,.$

Nel secondo caso, la prima cifra non può essere zero, e si può scegliere in 9 modi diversi. Bisogna distinguere il caso in cui la prima cifra è una delle tre uguali fra loro dal caso in cui non lo è, ed applicare poi il principio di addizione. Se la prima cifra è una delle tre uguali fra loro, gli altri due posti (per le altre due ad essa uguali) si possono scegliere in $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ modi diversi; le altre tre cifre si possono scegliere rispettivamente in $9, 8$ e 7 modi diversi, quindi se la prima cifra è una delle tre uguali fra loro ci sono $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 45\,360$ possibilità. Se le tre cifre uguali fra loro sono diverse dalla prima, i loro posti si possono scegliere in $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$ modi diversi; in questo caso abbiamo 9 possibili scelte per la prima cifra, 9 possibili scelte per la cifra ripetuta tre volte, e rispettivamente 8 possibili scelte e 7 possibili scelte per le altre cifre, quindi se la prima cifra non è una delle tre uguali fra loro ci sono altre $20 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 90\,720$ possibilità. In tutto, in questo secondo caso i numeri sono

$$45\,360 + 90\,720 = 136\,080\,.$$

$\boxed{\text{Esercizio 12.17}}$

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 3, 5, 7, 8

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Soluzione – (i) Per la prima posizione a sinistra abbiamo 5 possibili scelte (va escluso lo zero), per ciascuna delle successive 6; in tutto, $5 \cdot 6^6 (= 233\,280)$.

(ii) La condizione comporta che la scelta delle cifre ne determini l'ordine: si tratta dunque di valutare il numero delle combinazioni con ripetizione delle 6 cifre date a 7 a 7 e poi sottrarre 1 (infatti la combinazione con tutti "0" non dà luogo a un numero di sette cifre). Il numero richiesto è dunque

$$\binom{6+7-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12!}{7!\cdot 5!} - 1 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 = 11 \cdot 9 \cdot 8 - 1 = 792 - 1 = 791\,.$$

(iii) Bisogna distinguere il caso in cui il numero finisce con "0" dal caso in cui il numero finisce con 5. Nel primo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre (escludendo la possibilità che siano tutte uguali a zero); nel secondo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre fra le cifre 5, 7 e 8. Il numero cercato è dunque (ricordando quanto osservato al punto (ii)

$$\binom{6+6-1}{6} - 1 + \binom{3+6-1}{6} = \binom{11}{6} - 1 + \binom{8}{6} = \frac{11!}{6!\cdot 5!} - 1 + \frac{8!}{6!\cdot 2!} =$$
$$= \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 + \frac{8\cdot 7}{2} =$$
$$11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 - 1 + 4 \cdot 7 = 462 - 1 + 28 = 489\,.$$

Esercizio 12.18

Si dica quante password distinte formate da 8 caratteri alfanumerici (cioè quante $8-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 4 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;
(ii) se esattamente 4 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;
(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra “3”, esattamente due volte la cifra “2” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);
(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Soluzione –
(i) Il primo carattere si può scegliere in 26 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico); per ognuno di questi 26 modi diversi, il secondo carattere si può scegliere in 25 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico diverso dal precedente); per il principio di moltiplicazione, ci sono $26 \cdot 25$ possibilità di scelta per i primi due caratteri. Per ciascuna di queste possibilità, ce ne sono 24 per il terzo; per ogni scelta dei primi tre caratteri ci sono 23 possibilità per il quarto. Applicando di nuovo ripetutamente il principio di moltiplicazione, in tutto ci sono $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ diverse possibilità per i primi 4 caratteri, quelli alfabetici.

Allo stesso modo si vede che ci sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ diverse possibilità per gli ultimi 4 caratteri, quelli numerici. Applicando ancora il principio di moltiplicazione, si può concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 1\,808\,352\,000\,.$$

(ii) Come si è visto nel punto (i), quattro distinte lettere si possono scegliere in $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$ modi diversi, e quattro distinte cifre si possono scegliere in $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ modi diversi; le possibili diverse posizioni delle quattro lettere negli otto posti a disposizione sono tante quanti i diversi sottoinsiemi di 4 elementi in un insieme di 8 elementi, cioè $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$. Ancora il principio di moltiplicazione ci permette di concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$358\,800 \cdot 5\,040 \cdot 70 = 126\,584\,640\,000\,.$$

(iii) Scegliamo subito i posti che deve occupare la cifra “3”: ci sono $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ possibilità; fra i rimanenti cinque posti, scegliamo i due posti che deve occupare la cifra “2”: ci sono $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ possibilità; in ciascuno dei due posti rimanenti possiamo inserire un qualsiasi carattere alfanumerico diverso dal “2” e dal “3”, quindi per ciascuno di tali posti abbiamo 34 diverse possibilità. Il principio di moltiplicazione ci permette questa volta di concludere che le password soddisfacenti la condizione (iii) sono in tutto $56 \cdot 10 \cdot 34 \cdot 34 = 647\,360\,.$

(iv) Le password che soddisfano la condizione (iv) sono tante quante le possibili scelte di 8 lettere fra le 26 disponibili (infatti una volta scelte le lettere la condizione di dover rcomparire in ordine alfabetico ne determina l'ordine), quindi sono $\binom{26}{8} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 = 1\,562\,275\,.$

Esercizio 12.19

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri di sette cifre (da 0 a 9) effettive (dunque la prima cifra non può essere zero) tali che

(i) non vi sono altre condizioni;

(ii) le cifre sono tutte distinte;

(iii) la cifra "7" compare esattamente tre volte, e la cifra "0" non compare;

(iv) compaiono soltanto le cifre "3" e "4", rispettivamente tre e quattro volte;

(v) nessuna cifra è seguita da una di valore maggiore.

Soluzione – Nel caso (i), la prima cifra può essere scelta arbitrariamente nell'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; le cifre successive possono essere scelte arbitrariamente nell'insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $9 \cdot 10^6$ possibilità.

Nel caso (ii), la prima cifra può essere scelta arbitrariamente nell'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; le cifre successive possono essere scelte arbitrariamente nell'insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ma devono essere distinte dalle precedenti: quindi per la prima cifra ci sono 9 possibili scelte; per la seconda cifra ci sono 9 possibili scelte; per la terza cifra ci sono 8 possibili scelte e così via decrescendo il numero di possibili scelte. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ ($= 544\,320$) possibilità.

Nel caso (iii), vediamo innanzitutto in quanti modi diversi si possono scegliere le posizioni in cui comparirà la cifra "7": sono tanti quanti i diversi sottoinsiemi con tre elementi in un insieme di sette elementi, cioè $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$. Per ognuna di tali scelte, nelle quattro posizioni restanti si può inserire una qualsiasi cifra dell'insieme $\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$, che può dunque essere scelta in 8 modi diversi. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $35 \cdot 8^4$ ($= 143\,360$) possibilità.

Nel caso (iv), il numero resta univocamente determinato una volta scelte le posizioni in cui comparirà la cifra "3": come si è visto per il caso (iii), le possibilità sono tante quanti i diversi sottoinsiemi con tre elementi in un insieme di sette elementi, cioè $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7 \cdot 5 = 35$.

Nel caso (v), il numero resta individuato dalla scelta delle cifre che vi compaiono e, per ciascuna di esse, dal numero di volte che compare: l'ordine infatti è determinato dalla condizione che nessuna cifra sia seguita da una di valore maggiore. I numeri possibili sono dunque tanti quante le combinazioni con ripetizione delle dieci cifre $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ a sette a sette, ossia sono

$$\binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 8 = 11\,440\,.$$

Esercizio 12.20

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 9 nelle incognite x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$.

Soluzione – Tralasciando in prima istanza i coefficienti, ogni diverso monomio di grado 9 nelle x, y, z, w è un "sacchetto" di 9 lettere scelte fra x, y, z, w; il numero di tali "sacchetti" è dunque uguale al numero delle 9 – combinazioni con ripetizione di 4 oggetti, cioè è

$$\binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220\,.$$

Ciascuno di questi può avere un coefficiente scelto fra 1 e 12 (ovviamente lo 0 si esclude perché il grado del monomio non sarebbe più 9), quindi il numero cercato è

$$12 \cdot 220 = 2\,640\,.$$

Esercizio 12.21

Si dica, motivando brevemente la risposta, quante soluzioni in $\mathbb{N}^6$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + u + w = 65\,.$$

Soluzione – Se immaginiamo di avere a disposizione una quantità illimitata di palline di sei tipi diversi, ciascuna contrassegnata con una delle lettere x, y, z, t, u, w, è lecito pensare a ogni soluzione in $\mathbb{N}^6$ dell'equazione proposta come a un diverso modo di scegliere 65 tali palline.

Il numero di soluzioni in $\mathbb{N}^6$ dell'equazione proposta è pertanto uguale al numero dei modi diversi in cui si possono scegliere 65 oggetti di sei tipi diversi, cioè al numero delle 65 – *combinazioni con ripetizione* di 6 oggetti, ossia

$$\binom{6+65-1}{65} = \binom{70}{65} = \frac{70!}{65! \cdot 5!} = 12\,103\,014\,.$$

Esercizio 12.22

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri che in base dieci si scrivono con nove cifre delle quali esattamente cinque sono dispari e le restanti quattro, da sinistra a destra, risultano in ordine non crescente (cioè, ciascuna cifra pari è maggiore o uguale della successiva cifra pari).

Soluzione – Conviene distinguere tra il caso in cui la prima cifra a sinistra è dispari e il caso in cui la prima cifra a sinistra è pari: poiché si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità, poi basterà applicare il principio di addizione.

Se la prima cifra a sinistra è dispari, le altre quattro si possono disporre nelle restanti otto posizioni in $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$ modi diversi (che determinano automaticamente i posti delle cifre pari); le cifre dispari si possono scegliere in $5^5 = 3\,125$ modi diversi, quelle pari in $\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$ modi diversi. In tutto, in questo primo caso ci sono

$$70 \cdot 3\,125 \cdot 70 = 15\,312\,500$$

possibilità.

Se la prima cifra a sinistra è pari, le cifre dispari si possono disporre nelle restanti otto posizioni in $\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ modi diversi (che determinano automaticamente i posti delle rimanenti cifre pari); le cifre dispari si possono scegliere in $5^5 = 3\,125$ modi diversi, quelle pari in $\binom{5+4-1}{4} - 1 = 69$ modi diversi (perché bisogna escludere che la prima cifra sia 0, che corrisponde al fatto che tutte le cifre pari siano 0). In tutto, in questo primo caso ci sono

$$56 \cdot 3\,125 \cdot 69 = 12\,075\,000$$

possibilità.

Complessivamente, ci sono

$$15\,312\,500 + 12\,075\,000 = 27\,387\,500$$

numeri che verificano le condizioni richieste.

Esercizio 12.23

Quante diverse 6 – ple ordinate di lettere dell'alfabeto italiano (21 simboli) si possono formare

(i) con la condizione che le lettere siano tutte diverse fra loro;

(ii) con la condizione che nessuna lettera sia seguita da una lettera che la precede nell'alfabeto italiano (quindi "Z" può essere seguita soltanto da "Z", mentre "A" può essere seguita da qualsiasi lettera, compresa un'ulteriore "A").

Soluzione – La condizione (i) individua le 6 – disposizioni semplici di 21 oggetti, che sono in numero di

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 39\,070\,080\,.$$

La condizione (ii) individua le 6 – combinazioni con ripetizione di 21 oggetti, che sono in numero di

$$\binom{21+6-1}{6} = \binom{26}{6} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 26 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 = 230\,230\,.$$

Esercizio 12.24

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 6 differenti altezze (2, 4, 6, 7, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 7 mattoncini di altezza ***non decrescente*** .

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Soluzione – Le diverse file di mattoncini che rispondono ai requisiti richiesti sono tante quante le combinazioni con ripetizione delle 6 differenti altezze a 7 a 7, cioè sono in numero di

$$\binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 12 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 = 792\,.$$

Esercizio 12.25

Joe Plumber è da molte edizioni componente della giuria che ogni anno elegge miss Calisota tra 5 finaliste, anche se è un po’ disorientato perché le regole di votazione cambiano frequentemente.

Due anni fa, Joe poteva assegnare ad ogni finalista un voto, consistente in un numero naturale da lui scelto tra un minimo di 2 e un massimo di 8.

L’anno scorso fu aggiunto il vincolo che ogni giurato dovesse assegnare alle finaliste punteggi tutti diversi, sempre numeri naturali compresi fra un minimo di 2 e un massimo di 8.

Quest’anno le regole sono ancora cambiate: Joe (come ogni altro giurato) ha a disposizione 15 punti che deve distribuire tra le 5 finaliste, senza altro vincolo che quello di assegnarli tutti senza frazionarli.

In quanti modi diversi Joe Plumber poteva votare due anni fa? In quanti modi diversi poteva votare l’anno scorso? In quanti modi diversi può votare quest’anno?

Soluzione – Due anni fa, Joe aveva 7 scelte (i 7 numeri interi compresi fra 2 e 8) per il voto da assegnare a ciascuna finalista, e ogni assegnazione di voto era indipendente dall’altra: il numero dei modi diversi in cui Joe poteva votare due anni fa è dunque uguale al numero delle disposizioni con ripetizione di 7 oggetti a 5 a 5, cioè è uguale a $7^5\ (=16\,807)$.

L’anno scorso, Joe aveva 7 scelte (i 7 numeri interi compresi fra 2 e 8) per il voto da assegnare a ciascuna finalista, ma le assegnazioni di voto dovevano essere tutte diverse fra loro: il numero dei modi diversi in cui Joe poteva votare l’anno scorso è dunque uguale al numero delle $5-$disposizioni semplici di 7 oggetti, cioè è uguale a $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\ (=2\,520)$.

Quest’anno, se indichiamo con v_i il voto che Joe assegna alla $i-$sima finalista, il numero dei modi diversi in cui Joe può votare è uguale al numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^5$ dell’equazione

$$v_1+\ v_2+v_3+\ v_4+v_5=15$$

e quindi è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 5 oggetti a 15 a 15, ossia è

$$\binom{5+15-1}{15}=\binom{19}{15}=\tfrac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{4\cdot 3\cdot 2}=19\cdot 3\cdot 17\cdot 4=3\,876\,.$$

Esercizio 12.26

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 1, 3, 5, 7, 8

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell’usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l’ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Soluzione – (i) Per la prima posizione a sinistra abbiamo 5 possibili scelte (va escluso lo zero), per ciascuna delle successive 6; in tutto, $5\cdot 6^6 (=233\,280)$.

(ii) La condizione comporta che la scelta delle cifre ne determini l’ordine: si tratta dunque di valutare il numero delle combinazioni con ripetizione delle 6 cifre date a 7 a 7 e poi sottrarre 1 (infatti la combinazione con tutti “0” non dà luogo a un numero di sette cifre). Il numero richiesto è dunque

$$\binom{6+7-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12!}{7!\cdot 5!} - 1 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 = 11\cdot 9\cdot 8 - 1 = 792 - 1 = 791\,.$$

(iii) Bisogna distinguere il caso in cui il numero finisce con “0” dal caso in cui il numero finisce con 5. Nel primo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre (escludendo la possibilità che siano tutte uguali a zero); nel secondo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre fra le cifre 5, 7 e 8. Il numero cercato è dunque (ricordando quanto osservato al punto (ii))

$$\binom{6+6-1}{6} - 1 + \binom{3+6-1}{6} = \binom{11}{6} - 1 + \binom{8}{6} = \frac{11!}{6!\cdot 5!} - 1 + \frac{8!}{6!\cdot 2!} =$$
$$= \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 + \frac{8\cdot 7}{2} =$$
$$11\cdot 3\cdot 2\cdot 7 - 1 + 4\cdot 7 = 462 - 1 + 28 = 489\,.$$

Esercizio 12.27

In quanti modi diversi la maestra può dividere 150 cioccolatini fra 7 bambini, con la condizione che ogni bambino riceva almeno dieci cioccolatini?

Soluzione – Diamoglieli subito, questi dieci cioccolatini a ciascun bambino. Ne restano 80 da dividere fra i 7 bambini, senza più alcuna condizione; se indichiamo con $c_1, c_2, \ldots, c_7$ il numero dicioccolatini che distribuiremo (in aggiunta ai precedenti) al primo, al secondo, $\ldots$, al settimo bambino, si tratta di trovare il numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^7$ dell’equazione

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 80$$

e sappiamo che tale numero è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 7 oggetti a 80 a 80, cioè è

$$\binom{80+7-1}{80} = \binom{86}{80} = \frac{86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 83\cdot 43\cdot 41\cdot 27\cdot 17\cdot 7 =$$
$$= 470\,155\,077\,.$$

Esercizio 12.28

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 5 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra “7” compare esattamente tre volte;

(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);

(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);

(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Soluzione – (i) Ragioniamo sulla prima cifra, che non può essere zero, distinguendo il caso in cui è “7” da quello in cui è uno degli altri possibili 8 valori. Se la prima cifra è diversa da “7”, le tre cifre “7” occupano tre dei rimanenti quattro posti; questi tre posti possono essere scelti in $\binom{4}{3} = 4$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $8 \cdot 9 = 72$ possibilità (8 scelte per la prima cifra, 9 l’altra cifra disponibile): in tutto, 288 numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra diversa da “7”. Se la prima cifra è un “7”, le altre due cifre “7” occupano due dei rimanenti quattro posti; questi due posti possono essere scelti in $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $9^2 = 81$ possibilità: in tutto, 486 numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra uguale a “7”. Complessivamente, abbiamo trovato $288 + 486 = 774$ numeri diversi che verificano la condizione (i).

I numeri che soddisfano la condizione (ii) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni semplici delle 9 cifre da 1 a 9 (perché i numeri non possono iniziare con zero), dunque sono $\binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$.

I numeri che soddisfano la condizione (iii) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni semplici delle 10 cifre da 0 a 9 (perché i numeri non possono iniziare ma certamente possono terminare con zero), dunque sono $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$.

Infine, i numeri che soddisfano la condizione (iv) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni con ripetizione delle 10 cifre da 0 a 9 (escludendo però la sequenza di 5 cifre tutte uguali a zero), dunque sono

$$\binom{10+5-1}{5} - 1 = \binom{14}{5} - 1 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 14 \cdot 13 \cdot 11 - 1 = 2\,001 .$$

Esercizio 12.29

Si dica quante password distinte formate da 7 caratteri alfanumerici (cioè quante 7 – ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell’alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 3 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 3 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 4 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra “2”, esattamente due volte la cifra “3” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Soluzione –

(i) Il primo carattere si può scegliere in 26 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico); per ognuno di questi 26 modi diversi, il secondo carattere si può scegliere in 25 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico diverso dal precedente); per il principio di moltiplicazione, ci sono $26 \cdot 25$ possibilità di scelta per i primi due caratteri. Per ciascuna di queste possibilità, ce ne sono 24 per il terzo; applicando di nuovo il principio di moltiplicazione, in tutto ci sono $26 \cdot 25 \cdot 24$ diverse possibilità per i primi 3 caratteri, quelli alfabetici.

Allo stesso modo si vede che ci sono $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ diverse possibilità per gli ultimi 4 caratteri, quelli numerici. Applicando ancora il principio di moltiplicazione, si può concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$(26 \cdot 25 \cdot 24) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 78\,624\,000\,.$$

(ii) Come si è visto nel punto (i), tre distinte lettere si possono scegliere in $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$ modi diversi, e quattro distinte cifre si possono scegliere in $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ modi diversi; le possibili diverse posizioni delle tre lettere nei sette posti a disposizione sono tante quanti i diversi sottoinsiemi di 3 elementi in un insieme di 7 elementi, cioè $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$. Ancora il principio di moltiplicazione ci permette di concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$15\,600 \cdot 5\,040 \cdot 35 = 2\,751\,840\,000\,.$$

(iii) Scegliamo subito i posti che deve occupare la cifra “2”: ci sono $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ possibilità; fra i rimanenti quattro posti, scegliamo i due posti che deve occupare la cifra “3”: ci sono $\binom{4}{2} = 6$ possibilità; in ciascuno dei due posti rimanenti possiamo inserire un qualsiasi carattere alfanumerico diverso dal “2” e dal “3”, quindi per ciascuno di tali posti abbiamo 34 diverse possibilità. Il principio di moltiplicazione ci permette questa volta di concludere che le password soddisfacenti la condizione (iii) sono in tutto $35 \cdot 6 \cdot 34 \cdot 34 = 242\,760$.

(iv) Le password che soddisfano la condizione (iv) sono tante quante le possibili scelte di 7 lettere fra le 26 disponibili (infatti una volta scelte le lettere la condizione di dover rcomparire in ordine alfabetico ne determina l’ordine), quindi sono $\binom{26}{7} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 2}{} = 26 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 2 = 657\,800$.

Esercizio 12.30

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 11 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

Soluzione – Trascuriamo in un primo momento i coefficienti. Per quanto riguarda la parte letterale, i monomi di grado 11 nelle incognite x, y, z si possono pensare come dei “sacchetti” contenenti ciascuno, in proporzione diversa, 11 lettere fra x, y e z. Il loro numero è dunque quello delle combinazioni con ripetizione di tre oggetti a 11 a 11, ossia è

$$\binom{3+11-1}{11} = \binom{13}{11} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78.$$

Ciascuno di questi può avere un coefficiente fra 1 e 6 (non 0, perché il monomio allora varrebbe 0 e non sarebbe più di grado 11). Dunque, i monomi di grado 11 nelle incognite x, y, z a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$ sono $6 \cdot 78 = 468$.

Esercizio 12.31

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 2, 4, 7, 8, 9

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dodici, sia divisibile per sei.

Soluzione – Per rispettare la condizione (i), la prima cifra può essere scelta in 5 modi diversi, mentre ciascuna delle successive può essere scelta in 6 modi diversi; in tutto abbiamo $5 \cdot 6^6 = 233\,280$ numeri diversi.

La condizione (ii) individua le 7 – combinazioni con ripetizione di 6 oggetti, dalle quali dobbiamo escludere quella formata da tutti "zero"; in tutto abbiamo $\binom{7+6-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 11 \cdot 9 \cdot 8 - 1 = 791$ numeri diversi.

Un numero scritto in base dodici è divisibile per sei se e soltanto se termina per 0 o per 6; ma il 6 non è fra le cifre a disposizione, quindi i numeri cercati sono tanti quante le 6 – combinazioni con ripetizione di 6 oggetti (a ciascuna delle quali aggiungeremo una cifra "zero" a destra); come sopra, dobbiamo escludere la combinazione formata da tutte cifre uguali a "zero".

Il numero dei numeri (!) che soddisfano la condizione (iii) è dunque

$\binom{6+6-1}{6} - 1 = \binom{11}{6} - 1 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 461\,.$

Esercizio 12.32

Si dica, motivando brevemente la risposta, quante soluzioni in $\mathbb{N}^5$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + w = 66\,.$$

Soluzione – Se immaginiamo di avere a disposizione una quantità illimitata di palline di cinque tipi diversi, ciascuna contrassegnata con una delle lettere x, y, z, t, w, è lecito pensare a ogni soluzione in $\mathbb{N}^5$ dell'equazione proposta come a un diverso modo di scegliere 66 tali palline.

Il numero di soluzioni in $\mathbb{N}^5$ dell'equazione proposta è pertanto uguale al numero dei modi diversi in cui si possono scegliere 66 oggetti di cinque tipi diversi, cioè al numero delle 66 – *combinazioni con ripetizione* di 5 oggetti, ossia

$$\binom{5+66-1}{66} = \binom{70}{66} = \frac{70!}{66! \cdot 4!} = 916\,895\,.$$

Esercizio 12.33

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre $0, 2, 3, 5, 7, 9$

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);
(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);
(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Soluzione – (i) Per la prima posizione a sinistra abbiamo 5 possibili scelte (va escluso lo zero), per ciascuna delle successive 6; in tutto, $5 \cdot 6^6 (= 233\,280)$.

(ii) La condizione comporta che la scelta delle cifre ne determini l'ordine: si tratta dunque di valutare il numero delle combinazioni con ripetizione delle 6 cifre date a 7 a 7 e poi sottrarre 1 (infatti la combinazione con tutti "0" non dà luogo a un numero di sette cifre). Il numero richiesto è dunque

$$\binom{6+7-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12!}{7! \cdot 5!} - 1 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 11 \cdot 9 \cdot 8 - 1 = 792 - 1 = 791\,.$$

(iii) Bisogna distinguere il caso in cui il numero finisce con "0" dal caso in cui il numero finisce con 5. Nel primo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre (escludendo la possibilità che siano tutte uguali a zero); nel secondo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre fra le cifre 5, 7 e 9. Il numero cercato è dunque (ricordando quanto osservato al punto (ii))

$$\binom{6+6-1}{6} - 1 + \binom{3+6-1}{6} = \binom{11}{6} - 1 + \binom{8}{6} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} - 1 + \frac{8!}{6! \cdot 2!} =$$
$$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 + \frac{8 \cdot 7}{2} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 - 1 + 4 \cdot 7 = 462 - 1 + 28 = 489\,.$$

Esercizio 12.34

Fra tutti i numeri scritti in base dieci con esattamente 5 cifre (ricordando che la prima cifra a sinistra non può essere lo zero), quanti sono quelli in cui

(i) la cifra "3" compare esattamente tre volte;
(ii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente crescente (da sinistra a destra);
(iii) le cifre compaiono tutte in ordine strettamente decrescente (da sinistra a destra);
(iv) le cifre compaiono tutte in ordine non crescente (cioè, da sinistra a destra, nessuna è strettamente inferiore alla successiva).

Soluzione – (i) Ragioniamo sulla prima cifra, che non può essere zero, distinguendo il caso in cui è "3" da quello in cui è uno degli altri possibili 8 valori. Se la prima cifra è diversa da "3", le tre cifre "3" occupano tre dei rimanenti quattro posti; questi tre posti possono essere scelti in $\binom{4}{3} = 4$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $8 \cdot 9 = 72$ possibilità (8 scelte per la prima cifra, 9 l'altra cifra disponibile): in tutto, 288 numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra diversa da "3". Se la prima cifra è un "3", le altre due cifre "3" occupano due dei rimanenti quattro posti; questi due posti possono essere scelti in $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modi diversi, per ognuno dei quali ci sono $9^2 = 81$ possibilità: in tutto, 486 numeri che verificano la condizione (i) con la prima cifra uguale a "3".

Complessivamente, abbiamo trovato $288 + 486 = 774$ numeri diversi che verificano la condizione (i).

I numeri che soddisfano la condizione (ii) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni semplici delle 9 cifre da 1 a 9 (perché i numeri non possono iniziare con zero), dunque sono $\binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$.

I numeri che soddisfano la condizione (iii) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni semplici delle 10 cifre da 0 a 9 (perché i numeri non possono iniziare ma certamente possono terminare con zero), dunque sono $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$.

Infine, i numeri che soddisfano la condizione (iv) sono in corrispondenza biunivoca con le 5 – combinazioni con ripetizione delle 10 cifre da 0 a 9 (escludendo però la sequenza di 5 cifre tutte uguali a zero), dunque sono

$$\binom{10+5-1}{5} - 1 = \binom{14}{5} - 1 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 14 \cdot 13 \cdot 11 - 1 = 2\,001 .$$

Esercizio 12.35

Pierino gioca con i mattoncini del suo kit di costruzioni.

Ne ha di 5 differenti altezze (2, 5, 6, 8, 9 centimetri), in quantità illimitate per ciascuna altezza, e vuole allinearli costruendo file di 8 mattoncini di altezza ***non decrescente***.

Quante diverse file di mattoncini può fare Pierino?

Soluzione – Le diverse file di mattoncini che rispondono ai requisiti richiesti sono tante quante le combinazioni con ripetizione delle 5 differenti altezze a 8 a 8, cioè sono in numero di

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495 .$$

Esercizio 12.36

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i monomi di grado 8 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$.

Soluzione – Se trascuriamo i coefficienti, il numero dei diversi monomi di grado 8 nelle indeterminate x, y, z, w è dato dal numero delle soluzioni in $\mathbb{N}^4$ dell'equazione

$$e_x + e_y + e_z + e_w = 8$$

(dove e_x, e_y, e_z e e_w indicano l'esponente con cui rispettivamente x, y, z e w compaiono nel monomio) e quindi è uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di 4 oggetti a 8 a 8, ossia è

$$\binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{8} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165 .$$

Ciascuno di essi può avere per coefficiente uno dei 10 elementi non nulli di $\mathbb{Z}_{11}$, quindi in tutto ci sono $1\,650$ diversi monomi di grado 8 nelle indeterminate x, y, z, w a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$.

Esercizio 12.37

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con sei cifre tutte diverse da zero, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre tre sono diverse (fra loro e dalle precedenti).

Si dica poi, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali che in base dieci si scrivono con cinque cifre, delle quali esattamente tre sono uguali fra loro e le altre due sono diverse (fra loro e dalle precedenti). In questo caso dunque la cifra “zero” è ammessa, ma le cifre devono essere effettivamente cinque nell’usuale notazione in base dieci (quindi la prima cifra non può essere zero).

Soluzione – Nel primo caso, ogni cifra può andare in qualsiasi posto. Scegliamo dunque in primo luogo dove sistemare le tre cifre uguali fra loro (ciò si può fare in $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$ modi diversi). La cifra da ripetere tre volte può essere scelta in 9 modi diversi, le altre due cifre rispettivamente in 8 e 7 modi diversi. Per il principio di moltiplicazione, i numeri cercati sono in tutto $20 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 10\,080$.

Nel secondo caso, la prima cifra non può essere zero, e si può scegliere in 9 modi diversi. Bisogna distinguere il caso in cui la prima cifra è una delle tre uguali fra loro dal caso in cui non lo è, ed applicare poi il principio di addizione. Se la prima cifra è una delle tre uguali fra loro, gli altri due posti (per le altre due ad essa uguali) si possono scegliere in $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modi diversi; le altre due cifre si possono scegliere rispettivamente in 9 e 8 modi diversi, quindi se la prima cifra è una delle tre uguali fra loro ci sono $6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 3\,888$ possibilità. Se le tre cifre uguali fra loro sono diverse dalla prima, i loro posti si possono scegliere in $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ modi diversi; in questo caso abbiamo 9 possibili scelte per la prima cifra, 9 possibili scelte per la cifra ripetuta tre volte, e 8 possibili scelte per l’ultima cifra, quindi se la prima cifra non è una delle tre uguali fra loro ci sono altre $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 6\,480$ possibilità. In tutto, in questo secondo caso i numeri sono

$$3\,888 + 6\,480 = 10\,368\,.$$

Esercizio 12.38

Si dica quante password distinte formate da 8 caratteri alfanumerici (cioè quante $8-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell’alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 5 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(ii) se esattamente 5 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;

(iii) se deve comparire esattamente tre volte la cifra “2”, esattamente due volte la cifra “3” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);

(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Soluzione –

(i) Il primo carattere si può scegliere in 26 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico); per ognuno di questi 26 modi diversi, il secondo carattere si può scegliere in 25 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico diverso dal precedente); per il principio di moltiplicazione, ci sono $26 \cdot 25$ possibilità di scelta per i primi due caratteri. Per ciascuna di queste possibilità, ce ne sono 24 per il terzo; per ogni scelta dei primi tre caratteri ci sono 23 possibilità per il quarto; per ogni scelta dei primi quattro caratteri ci sono 22 possibilità per il quarto. Applicando di nuovo ripetutamente il principio di moltiplicazione, in tutto ci sono $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$ diverse possibilità per i primi 5 caratteri, quelli alfabetici.

Allo stesso modo si vede che ci sono $10 \cdot 9 \cdot 8$ diverse possibilità per gli ultimi 3 caratteri, quelli numerici. Applicando ancora il principio di moltiplicazione, si può concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8) = 5\,683\,392\,000\,.$$

(ii) Come si è visto nel punto (i), cinque distinte lettere si possono scegliere in $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7\,893\,600$ modi diversi, e tre distinte cifre si possono scegliere in $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ modi diversi; le possibili diverse posizioni delle cinque lettere negli otto posti a disposizione sono tante quanti i diversi sottoinsiemi di 5 elementi in un insieme di 8 elementi, cioè $\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$. Ancora il principio di moltiplicazione ci permette di concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$7\,893\,600 \cdot 720 \cdot 56 = 318\,269\,952\,000\,.$$

(iii) Scegliamo subito i posti che deve occupare la cifra "2": ci sono $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ possibilità; fra i rimanenti cinque posti, scegliamo i due posti che deve occupare la cifra "3": ci sono $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ possibilità; in ciascuno dei due posti rimanenti possiamo inserire un qualsiasi carattere alfanumerico diverso dal "2" e dal "3", quindi per ciascuno di tali posti abbiamo 34 diverse possibilità. Il principio di moltiplicazione ci permette questa volta di concludere che le password soddisfacenti la condizione (iii) sono in tutto $56 \cdot 10 \cdot 34 \cdot 34 = 647\,360\,.$

(iv) Le password che soddisfano la condizione (iv) sono tante quante le possibili scelte di 8 lettere fra le 26 disponibili (infatti una volta scelte le lettere la condizione di dover rcomparire in ordine alfabetico ne determina l'ordine), quindi sono $\binom{26}{8} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 19 = 1\,562\,275\,.$

Esercizio 12.39

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri di otto cifre (da 0 a 9) effettive (dunque la prima cifra non può essere zero) tali che

(i) non vi sono altre condizioni;
(ii) le cifre sono tutte distinte;
(iii) la cifra "8" compare esattamente tre volte, e la cifra "0" non compare;
(iv) compaiono soltanto le cifre "3" e "4", rispettivamente tre e cinque volte;
(v) nessuna cifra è seguita da una di valore maggiore.

Soluzione – Nel caso (i), la prima cifra può essere scelta arbitrariamente nell’insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; le cifre successive possono essere scelte arbitrariamente nell’insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $9\cdot 10^7$ possibilità.

Nel caso (ii), la prima cifra può essere scelta arbitrariamente nell’insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; le cifre successive possono essere scelte arbitrariamente nell’insieme $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ma devono essere distinte dalle precedenti: quindi per la prima cifra ci sono 9 possibili scelte; per la seconda cifra ci sono 9 possibili scelte; per la terza cifra ci sono 8 possibili scelte e così via decrescendo il numero di possibili scelte. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ $(=1\,632\,960)$ possibilità.

Nel caso (iii), vediamo innanzitutto in quanti modi diversi si possono scegliere le posizioni in cui comparirà la cifra “8”: sono tanti quanti i diversi sottoinsiemi con tre elementi in un insieme di otto elementi, cioè $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=8\cdot 7=56$. Per ognuna di tali scelte, nelle cinque posizioni restanti si può inserire una qualsiasi cifra dell’insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, che può dunque essere scelta in 8 modi diversi. Per il principio di moltiplicazione, ci sono in tutto $56\cdot 8^5$ $(=1\,835\,008)$ possibilità.

Nel caso (iv), il numero resta univocamente determinato una volta scelte le posizioni in cui comparirà la cifra “3”: come si è visto per il caso (iii), le possibilità sono tante quanti i diversi sottoinsiemi con tre elementi in un insieme di otto elementi, cioè $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=8\cdot 7=56$.

Nel caso (v), il numero resta individuato dalla scelta delle cifre che vi compaiono e, per ciascuna di esse, dal numero di volte che compare: l’ordine infatti è determinato dalla condizione che nessuna cifra sia seguita da una di valore maggiore. I numeri possibili sono dunque tanti quante le combinazioni con ripetizione delle dieci cifre $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ a otto a otto, ossia sono

$$\binom{10+8-1}{8}=\binom{17}{8}=\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=17\cdot 13\cdot 11\cdot 10=24\,310\,.$$

Esercizio 12.40

Pierino costruisce segnaposto per il pranzo di Ferragosto sovrapponendo in modo concentrico dodici dischetti di cartone scelti fra un numero illlimitato a sua disposizione che si distinguono fra loro perché sono di tredici differenti dimensioni; unica regola da rispettare per la costruzione: in ciascun segnaposto, nessun dischetto può essere sovrapposto a un dischetto più piccolo.

Quanti diversi segnaposto può costruire Pierino?

Soluzione – I diversi segnaposto che si possono costruire con questa regola sono tanti quante le $12-$ combinazioni con ripetizione di 13 oggetti; dunque il numero cercato è

$$\binom{13+12-1}{12}=\binom{24}{12}=\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=23\cdot 19\cdot 17\cdot 14\cdot 13\cdot 2=2\,704\,156\,.$$

Esercizio 12.41

Si dica, motivando brevemente la risposta, quante soluzioni in $\mathbb{N}^6$ ha l'equazione

$$x + y + z + t + u + w = 75\,.$$

Soluzione – Se immaginiamo di avere a disposizione una quantità illimitata di palline di sei tipi diversi, ciascuna contrassegnata con una delle lettere x, y, z, t, u, w, è lecito pensare a ogni soluzione in $\mathbb{N}^6$ dell'equazione proposta come a un diverso modo di scegliere 75 tali palline.

Il numero di soluzioni in $\mathbb{N}^6$ dell'equazione proposta è pertanto uguale al numero dei modi diversi in cui si possono scegliere 75 oggetti di sei tipi diversi, cioè al numero delle $75 -$ *combinazioni con ripetizione* di 6 oggetti, ossia

$$\binom{6+75-1}{75} = \binom{80}{75} = \frac{80!}{75!\cdot 5!} = 24\,040\,016\,.$$

Esercizio 12.42

Si stabilisca quanti diversi numeri di 7 cifre si possono formare con le cifre 0, 1, 3, 5, 8, 9

(i) senza ulteriori condizioni (ma le cifre devono essere sette nell'usuale scrittura dei numeri, quindi la prima cifra a sinistra non può essere 0);

(ii) con la condizione che nessuna cifra sia strettamente minore della successiva (leggendole da sinistra a destra);

(iii) con la condizione di cui al punto (ii) e l'ulteriore condizione che il numero formato, interpretato in base dieci, sia divisibile per cinque.

Soluzione – (i) Per la prima posizione a sinistra abbiamo 5 possibili scelte (va escluso lo zero), per ciascuna delle successive 6; in tutto, $5 \cdot 6^6 (= 233\,280)$.

(ii) La condizione comporta che la scelta delle cifre ne determini l'ordine: si tratta dunque di valutare il numero delle combinazioni con ripetizione delle 6 cifre date a 7 a 7 e poi sottrarre 1 (infatti la combinazione con tutti "0" non dà luogo a un numero di sette cifre). Il numero richiesto è dunque

$$\binom{6+7-1}{7} - 1 = \binom{12}{7} - 1 = \frac{12!}{7!\cdot 5!} - 1 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 = 11\cdot 9\cdot 8 - 1 = 792 - 1 = 791\,.$$

(iii) Bisogna distinguere il caso in cui il numero finisce con "0" dal caso in cui il numero finisce con 5. Nel primo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre (escludendo la possibilità che siano tutte uguali a zero); nel secondo caso, il numero formato dalle prime 6 cifre resta individuato dalla scelta di tali cifre fra le cifre 5, 8 e 9. Il numero cercato è dunque (ricordando quanto osservato al punto (ii)

$$\binom{6+6-1}{6} - 1 + \binom{3+6-1}{6} = \binom{11}{6} - 1 + \binom{8}{6} = \frac{11!}{6!\cdot 5!} - 1 + \frac{8!}{6!\cdot 2!} =$$

$$= \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} - 1 + \frac{8\cdot 7}{2} =$$

$$11\cdot 3\cdot 2\cdot 7 - 1 + 4\cdot 7 = 462 - 1 + 28 = 489\,.$$

Esercizio 12.43

Si dica quante password distinte formate da 7 caratteri alfanumerici (cioè quante $7-$ple ordinate di caratteri scelti fra le 26 lettere dell’alfabeto inglese e le cifre da 0 a 9) si possono ottenere

(i) se i primi 4 caratteri devono essere alfabetici, gli ultimi 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;
(ii) se esattamente 4 caratteri devono essere alfabetici, gli altri 3 caratteri devono essere numerici e non sono ammesse ripetizioni di caratteri;
(iii) se deve comparire esattamente due volte la cifra “2”, esattamente tre volte la cifra “3” e gli altri caratteri sono arbitrari (quindi possono essere ripetuti);
(iv) se i caratteri devono essere tutti alfabetici, a due a due distinti (quindi non sono ammesse ripetizioni) e comparire rigorosamente in ordine alfabetico.

Soluzione –
(i) Il primo carattere si può scegliere in 26 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico); per ognuno di questi 26 modi diversi, il secondo carattere si può scegliere in 25 modi diversi (dovendo essere un carattere alfabetico diverso dal precedente); per il principio di moltiplicazione, ci sono $26 \cdot 25$ possibilità di scelta per i primi due caratteri. Per ciascuna di queste possibilità, ce ne sono 24 per il terzo; per ogni scelta dei primi tre caratteri ci sono 23 possibilità per il quarto. Applicando di nuovo ripetutamente il principio di moltiplicazione, in tutto ci sono $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ diverse possibilità per i primi 4 caratteri, quelli alfabetici.

Allo stesso modo si vede che ci sono $10 \cdot 9 \cdot 8$ diverse possibilità per gli ultimi 3 caratteri, quelli numerici. Applicando ancora il principio di moltiplicazione, si può concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$(26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23) \cdot (10 \cdot 9 \cdot 8) = 258\,336\,000\,.$$

(ii) Come si è visto nel punto (i), quattro distinte lettere si possono scegliere in $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$ modi diversi, e tre distinte cifre si possono scegliere in $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ modi diversi; le possibili diverse posizioni delle quattro lettere nei sette posti a disposizione sono tante quanti i diversi sottoinsiemi di 4 elementi in un insieme di 7 elementi, cioè $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$. Ancora il principio di moltiplicazione ci permette di concludere che le password soddisfacenti la condizione (i) sono in tutto

$$358\,800 \cdot 720 \cdot 35 = 9\,041\,760\,000\,.$$

(iii) Scegliamo subito i posti che deve occupare la cifra “2”: ci sono $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ possibilità; fra i rimanenti cinque posti, scegliamo i tre posti che deve occupare la cifra “3”: ci sono $\binom{5}{3} = 10$ possibilità; in ciascuno dei due posti rimanenti possiamo inserire un qualsiasi carattere alfanumerico diverso dal “2” e dal “3”, quindi per ciascuno di tali posti abbiamo 34 diverse possibilità. Il principio di moltiplicazione ci permette questa volta di concludere che le password soddisfacenti la condizione (iii) sono in tutto $21 \cdot 10 \cdot 34 \cdot 34 = 242\,760\,.$

(iv) Le password che soddisfano la condizione (iv) sono tante quante le possibili scelte di 7 lettere fra le 26 disponibili (infatti una volta scelte le lettere la condizione di dover rcomparire in ordine alfabetico ne determina l’ordine), quindi sono $\binom{26}{7} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 2}{} = 26 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 2 = 657\,800\,.$

Esercizio 12.44

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri che in base dieci si scrivono con nove cifre delle quali esattamente quattro sono dispari e le restanti cinque, da sinistra a destra, risultano in ordine non crescente (cioè, ciascuna cifra pari è maggiore o uguale della successiva cifra pari).

Soluzione – Conviene distinguere tra il caso in cui la prima cifra a sinistra è dispari e il caso in cui la prima cifra a sinistra è pari: poiché si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità, poi basterà applicare il principio di addizione.

Se la prima cifra a sinistra è dispari, le altre tre si possono disporre nelle restanti otto posizioni in $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ modi diversi (che determinano automaticamente i posti delle cifre pari); le cifre dispari si possono scegliere in $5^4 = 625$ modi diversi, quelle pari in $\binom{5+5-1}{5} = \binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$ modi diversi. In tutto, in questo primo caso ci sono

$$56 \cdot 625 \cdot 126 = 4\,410\,000$$

possibilità.

Se la prima cifra a sinistra è pari, le cifre dispari si possono disporre nelle restanti otto posizioni in $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$ modi diversi (che determinano automaticamente i posti delle rimanenti cifre pari); le cifre dispari si possono scegliere in $5^4 = 625$ modi diversi, quelle pari in $\binom{5+5-1}{5} - 1 = \binom{9}{5} - 1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} - 1 = 125$ modi diversi (perché bisogna escludere che la prima cifra sia 0). In tutto, in questo primo caso ci sono

$$70 \cdot 625 \cdot 125 = 5\,468\,758$$

possibilità.

Complessivamente, ci sono

$$4\,410\,000 + 5\,468\,758 = 9\,878\,750$$

numeri che verificano le condizioni richieste.