

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a **scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni**: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato **non svolto**.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma **non** attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “A”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $p \wedge \neg p \wedge (r \rightarrow s) \models (p \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow p)$;
- (ii) $(p \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow r) \models q \vee \neg q$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{h, y\}, \{t, z\}, \{k, t, x, \neg z\}, \{\neg w, \neg x\}, \{k, w\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg k, \neg t, \neg x, z\}, \\ \{\neg h, \neg k\}, \{\neg t, x\}, \{h, w, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 4 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (2 punti)

Sia \mathbb{Z}_{12901} l'anello delle classi di resto modulo 12901. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{12901} a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in \mathbb{Z}_{12901} :

$$[291] \cdot x = [489]; \quad [399] \cdot x = [931].$$

Esercizio 5 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{329} l'anello delle classi di resto modulo 329. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{329} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{329} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{329} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[94]; \quad [100].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello \mathbb{Z}_{23125} delle classi di resto modulo 23125, si dica, esprimendo ogni risposta in base *quindici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n è un numero dispari multiplo di 12 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 7;
- (ii) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b .

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di sette lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono tre o quattro, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “B”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $q \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow s) \models (r \rightarrow s) \wedge (\neg p \rightarrow q)$;
- (ii) $(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r) \models s \vee \neg s$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{k, y\}, \{t, z\}, \{h, t, x, \neg z\}, \{\neg h, \neg w\}, \{w, x\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg h, \neg t, \neg x, z\}, \\ \{\neg k, \neg x\}, \{h, \neg t\}, \{k, w, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 7 & 2 & 9 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (2 punti)

Sia $\mathbb{Z}_{10\,507}$ l'anello delle classi di resto modulo 10 507. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{10\,507}$ a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in $\mathbb{Z}_{10\,507}$:

$$[266] \cdot x = [931]; \quad [237] \cdot x = [396].$$

Esercizio 5 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{301} l'anello delle classi di resto modulo 301. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{301} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{301} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{301} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[86]; \quad [90].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello $\mathbb{Z}_{19\,375}$ delle classi di resto modulo 19 375, si dica, esprimendo ogni risposta in base *quindici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b ;
- (ii) se n è un numero dispari multiplo di 10 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 7.

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di sette lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono quattro o cinque, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a **scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni**: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato **non svolto**.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma **non** attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “C”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $s \wedge \neg s \wedge (p \rightarrow s) \models (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$;
- (ii) $(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r) \models r \vee \neg r$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{x, y\}, \{h, t\}, \{\neg h, k, t, z\}, \{\neg w, \neg z\}, \{k, w\}, \{\neg h, \neg y\}, \{h, \neg k, \neg t, \neg z\}, \\ \{\neg k, \neg x\}, \{\neg t, z\}, \{w, x, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 8 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 9 & 1 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (2 punti)

Sia $\mathbb{Z}_{11\,039}$ l'anello delle classi di resto modulo 11 039. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{11\,039}$ a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in $\mathbb{Z}_{11\,039}$:

$$[249] \cdot x = [419]; \quad [399] \cdot x = [798].$$

Esercizio 5 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{259} l'anello delle classi di resto modulo 259. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{259} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{259} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{259} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[74]; \quad [102].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello $\mathbb{Z}_{25\,625}$ delle classi di resto modulo 25 625, si dica, esprimendo ogni risposta in base *quindici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n è un numero dispari multiplo di 14 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 13;
- (ii) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b .

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di nove lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono quattro o cinque, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “D”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $q \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow s) \models (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow r)$;
- (ii) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg s \rightarrow r) \models p \vee \neg p$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{x, y\}, \{k, t\}, \{h, \neg k, t, z\}, \{\neg h, \neg w\}, \{w, z\}, \{\neg k, \neg y\}, \{\neg h, k, \neg t, \neg z\}, \\ \{\neg x, \neg z\}, \{h, \neg t\}, \{w, x, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 8 & 1 & 5 & 9 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (2 punti)

Sia \mathbb{Z}_{11837} l'anello delle classi di resto modulo 11 837. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{11837} a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in \mathbb{Z}_{11837} :

$$[267] \cdot x = [449]; \quad [532] \cdot x = [665].$$

Esercizio 5 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{287} l'anello delle classi di resto modulo 287. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{287} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{287} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{287} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[82]; \quad [100].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello \mathbb{Z}_{26875} delle classi di resto modulo 26 875, si dica, esprimendo ogni risposta in base *quindici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b ;
- (ii) se n è un numero dispari multiplo di 6 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 7.

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di otto lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono tre o quattro, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “E”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $q \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow s) \models (p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow p)$;
- (ii) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg s \rightarrow r) \models r \vee \neg r$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{h, x\}, \{t, z\}, \{k, t, y, \neg z\}, \{\neg w, \neg y\}, \{k, w\}, \{\neg h, \neg z\}, \{\neg k, \neg t, \neg y, z\}, \\ \{\neg k, \neg x\}, \{\neg t, y\}, \{\neg h, w, x\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 9 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{329} l'anello delle classi di resto modulo 329. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{329} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{329} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{329} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[94]; \quad [100].$$

Esercizio 5 (2 punti)

Sia \mathbb{Z}_{12901} l'anello delle classi di resto modulo 12901. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{12901} a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in \mathbb{Z}_{12901} :

$$[291] \cdot x = [489]; \quad [399] \cdot x = [931].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello \mathbb{Z}_{23125} delle classi di resto modulo 23125, si dica, esprimendo ogni risposta in base *tredici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n è un numero dispari multiplo di 18 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 11;
- (ii) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b .

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di otto lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono quattro o cinque, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “F”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $s \wedge \neg s \wedge (p \rightarrow r) \models (r \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow s)$;
- (ii) $(p \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow p) \models p \vee \neg p$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{h, x\}, \{t, z\}, \{k, t, y, \neg z\}, \{\neg w, \neg y\}, \{k, w\}, \{\neg h, \neg z\}, \{\neg k, \neg t, \neg y, z\}, \\ \{\neg k, \neg x\}, \{\neg t, y\}, \{\neg h, w, x\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 5 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{301} l'anello delle classi di resto modulo 301. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{301} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{301} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{301} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[86]; \quad [90].$$

Esercizio 5 (2 punti)

Sia \mathbb{Z}_{10507} l'anello delle classi di resto modulo 10507. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{10507} a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in \mathbb{Z}_{10507} :

$$[266] \cdot x = [931]; \quad [237] \cdot x = [396].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello \mathbb{Z}_{19375} delle classi di resto modulo 19375, si dica, esprimendo ogni risposta in base *tredici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b ;
- (ii) se n è un numero dispari multiplo di 24 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 17.

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di otto lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono cinque o sei, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “G”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $r \wedge \neg r \wedge (p \rightarrow q) \models (p \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow r)$;
- (ii) $(p \rightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow s) \models q \vee \neg q$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{x, y\}, \{h, z\}, \{h, k, t, \neg z\}, \{\neg t, \neg w\}, \{k, w\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg h, \neg k, \neg t, z\}, \\ \{\neg k, \neg x\}, \{\neg h, t\}, \{w, x, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & 9 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 9 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{259} l'anello delle classi di resto modulo 259. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{259} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{259} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{259} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[74];$$

$$[102].$$

Esercizio 5 (2 punti)

Sia $\mathbb{Z}_{11\,039}$ l'anello delle classi di resto modulo 11 039. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{11\,039}$ a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in $\mathbb{Z}_{11\,039}$:

$$[249] \cdot x = [419];$$

$$[399] \cdot x = [798].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello $\mathbb{Z}_{25\,625}$ delle classi di resto modulo 25 625, si dica, esprimendo ogni risposta in base *tredici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n è un numero dispari multiplo di 4 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 21;
- (ii) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b .

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di nove lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono tre o quattro, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA IN ITINERE DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA”

primo appello – 31.01.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la “fila” (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** oppure **H**) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a *scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni*: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato *non svolto*.

Nell'esercizio 1 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma *non* attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

FILA “H”

Esercizio 1 (3 punti)

Siano p, q, r, s variabili proposizionali. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica, motivando la risposta, se è vera o falsa:

- (i) $p \wedge \neg p \wedge (r \rightarrow s) \models (p \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow r)$;
- (ii) $(p \rightarrow s) \wedge (\neg r \rightarrow q) \models s \vee \neg s$.

Esercizio 2 (7 punti)

Siano h, k, t, w, x, y, z variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{x, y\}, \{k, z\}, \{h, k, t, \neg z\}, \{\neg h, \neg w\}, \{t, w\}, \{\neg y, \neg z\}, \{\neg h, \neg k, \neg t, z\}, \\ \{\neg t, \neg x\}, \{h, \neg k\}, \{w, x, \neg y\}\}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Siano α, β le permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ così definite:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 & 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

e sia σ la permutazione ottenuta applicando prima α e poi β .

Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e si dica, motivando la risposta, se σ è una permutazione pari oppure una permutazione dispari.

(gli altri esercizi sono sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (4 punti)

Sia \mathbb{Z}_{287} l'anello delle classi di resto modulo 287. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{287} a cui z appartiene.

Per ciascuno dei seguenti elementi di \mathbb{Z}_{287} si stabilisca, motivando la risposta, se è invertibile in \mathbb{Z}_{287} e, se è invertibile, se ne trovi l'inverso:

$$[82];$$

$$[100].$$

Esercizio 4 (2 punti)

Sia \mathbb{Z}_{11837} l'anello delle classi di resto modulo 11 837. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di \mathbb{Z}_{11837} a cui z appartiene.

Per ciascuna delle seguenti equazioni nell'incognita x si dica quante soluzioni ha in \mathbb{Z}_{11837} :

$$[267] \cdot x = [449];$$

$$[532] \cdot x = [665].$$

Esercizio 6 (4 punti)

Con riferimento all'anello \mathbb{Z}_{26875} delle classi di resto modulo 26 875, si dica, esprimendo ogni risposta in base *tredici*:

- (i) quanti sono gli elementi invertibili;
- (ii) quanti sono i divisori dello zero.

Esercizio 7 (2 punti)

Per ciascuna delle due seguenti affermazioni si dica se è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (richiamando esplicitamente il motivo per cui lo è) oppure è falsa per qualche $n \in \mathbb{N}$ (presentando in questo caso un controesempio):

- (i) se n divide un prodotto ab (con $a, b \in \mathbb{N}$), allora n divide a oppure n divide b ;
- (ii) se n è un numero dispari multiplo di 12 allora $n^2 - 1$ è multiplo di 13.

Esercizio 8 (5 punti)

La password di accesso a una banca dati è una sequenza ordinata di nove lettere dell'alfabeto italiano (21 caratteri) che soddisfa tutte le seguenti condizioni:

- le consonanti sono quattro o cinque, tutte diverse fra loro e disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico;
- le vocali possono essere anche ripetute ma anch'esse devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine alfabetico.

Si dica, motivando la risposta, quante sono in tutto le possibili password.