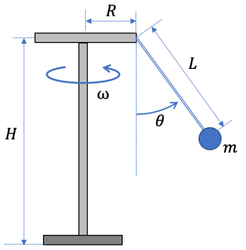
Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 31/1/2020

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (8 punti)



Un ragazzo ascolta la musica con gli auricolari bluetooth mentre sta girando sulla Star Flyer di Vienna, la giostra dei seggiolini volanti (calcinculo) più alta del mondo.

La giostra è alta $H = 117$ m, la catena dei seggiolini è lunga $L = 22$ m ed è agganciata alla struttura assimilabile a un cerchio orizzontale di raggio $R = 10$ m. La catena dei seggiolini mentre la giostra gira è inclinata di un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla verticale.

A un certo istante $t_0 = 0$ il telefonino (che trasmetteva la musica) sfugge di tasca al ragazzo. Il telefonino, oltre a procedere orizzontalmente, comincia a cadere, mentre il ragazzo prosegue nel moto circolare uniforme. A un certo istante t si accorge della perdita perché non sente più la musica. Sarà perché il telefonino si è schiantato a terra (istante t_1 o perché è arrivato ad una distanza superiore alla portata del bluetooth, che è di 100 metri (istante t_2)?

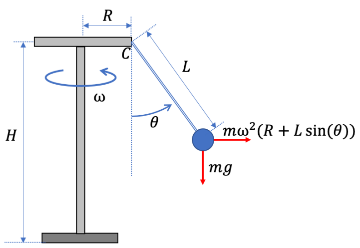
Calcolare:

(a) La velocità angolare ω della giostra.

(b) Il tempo t_1 che impiega il telefonino ad arrivare a terra, trascurando la resistenza dell'aria.

(c) La distanza D tra telefonino e ragazzo (in linea d'aria) all'istante t_1. Confrontando D con 100 m si vede se t_1 è maggiore o minore di t_2.

Soluzione:



Usiamo un sistema di riferimento solidale con il ragazzo, quindi accelerato. La catena che regge il seggiolino ed il ragazzo forma un angolo θ con la verticale in maniera tale che il momento rispetto a C della forza peso mg (diretta verso il basso) e della forza centrifuga $m\omega^2(R+L\sin(\theta))$ (orizzontale verso l'esterno) sia nullo, quindi

$$m\omega^2(R + L\sin(\theta))L\cos(\theta) - mgL\sin(\theta) = 0$$

da cui

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sin(\theta)}{(R + L\sin(\theta))\cos(\theta)}} \simeq 0.52 \text{ rad/s}$$

corrispondente ad una velocità $v = \omega(R + L\sin(\theta)) \simeq 10.90$ m/s.

Per fare un giro impiega un tempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 12.10 \text{ s.}$$

Il telefonino cade da un'altezza $H' = H - L\cos(\theta) \simeq 97.95$ m con velocità verticale iniziale nulla, e quindi per cadere impiega un tempo

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(H - L\cos(\theta))}{g}} \simeq 4.47 \text{ s}$$

Per calcolare D conviene mettersi nel sistema di riferimento fisso con il suolo, con la posizione at tempo t_0 sull'asse orizzontale.

Chiamiamo $R' = R+L\sin(\theta) \simeq 21.00$ m il raggio del cerchio percorso dal ragazzo. Le sue equazioni del moto sono

$$\begin{cases} X(t) = R'\cos(\omega t) \\ Y(t) = R'\sin(\omega t) \\ Z(t) = H - R\cos(\theta). \end{cases}$$

mentre quelle del telefonino sono

$$\begin{cases} x(t) = R' \\ y(t) = R'\omega t \\ z(t) = H - R\cos(\theta) - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

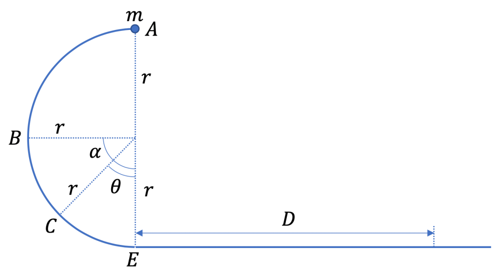
Ovviamente $z(t_1) = 0$.

Quindi la distanza D è data da

$$D = \left((R'\cos(\omega t_1) - R')^2 + (R'\sin(\omega t_1) - R'\omega t_1)^2 + (H - L\cos(\theta))^2\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 109.34 \text{ s}$$

ovvero prima smette la musica così che il ragazzo può apprezzare anche il rumore del telefonino che si spacca.

Problema 2 (7 punti)



Un anellino assimilabile a un punto materiale di massa $m = 30$ g può scorrere lungo una guida che si trova in un piano verticale solidale con il pavimento della stanza. Il primo tratto della guida ha la forma di una semicirconferenza di raggio $r = 20$ cm, e il secondo tratto (dal punto E in figura in poi) è rettilineo e orizzontale, e tangente alla semicirconferenza nel punto E di giunzione fra i due tratti.

Nel tratto di semicirconferenza l'attrito è trascurabile, mentre c'è attrito (con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.6$) nel tratto rettilineo. Inizialmente il punto materiale è fermo rispetto alla guida nel punto più alto (A in figura), e per effetto di una piccolissima spinta inizia a scivolare lungo il tratto di semicirconferenza.

Calcolare

(a) La distanza D percorsa dal punto materiale lungo il tratto rettilineo della guida prima di fermarsi.

(b) La forza vincolare N_B esercitata dalla guida sul punto materiale quando questo si trova a metà della semicirconferenza, cioè nel punto B in figura (angolo rispetto alla verticale $\alpha = \pi/2$).

(c) La forza vincolare N_C esercitata dalla guida sul punto materiale quando questo si trova a 3/4 della semicirconferenza, cioè nel punto C in figura (angolo rispetto alla verticale $\theta = \pi/4$).

(d) La forza vincolare N_E esercitata dalla guida sul punto materiale quando questo si trova nel punto più basso della semicirconferenza, cioè nel punto E in figura.

Soluzione: Usiamo un sistema di riferimento solidale con la guida, con l'asse x coincidente con la guida orizzontale, l'origine nel punto E e l'asse verticale y lungo l'alto.

Durante il moto lungo la circonferenza possiamo usare la conservazione dell'energia, per cui

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = 2mgr$$

da cui possiamo ricavare la velocità in B ($y_B = r$)

$$v_B^2 = 2gr$$

in C ($y_C = (2-\sqrt{2})r$)

$$v_C^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}gr.$$

e in E ($y_E = 0$)

$$v_E^2 = 4gr.$$

Nel tratto orizzontale si può utilizzare il teorema delle forze vive. Il lavoro W delle forze di attrito

$$W = \mu mgD$$

dev'essere uguale all'energia cinetica iniziale (l'energia potenziale è costante), da cui

$$W = \mu mgD = \frac{1}{2}mv_E^2 = 2mgr$$

e quindi

$$D = \frac{2r}{\mu} \simeq 0.67 \text{ m}.$$

Nel punto B la reazione normale N è l'origine dell'accelerazione centripeta v^2/r (dato che la forza peso è tangenziale alla traiettoria), per cui

$$N_B = \frac{mv_B^2}{r} = 2mg \simeq 0.59 \text{ N}.$$

Invece nel punto C l'accelerazione centripeta è data dalla differenza tra la reazione vincolare N_C e la componente della forza peso mg perpendicolare alla traiettoria, ovvero

$$N_C - \frac{\sqrt{2}}{2}mg = \frac{mv_C^2}{r}$$

da cui

$$N_C = (1+\sqrt{2})mg \simeq 1.21 \text{ N}.$$

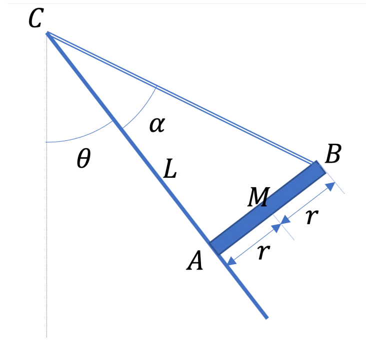
Infine nel punto E il calcolo è simile

$$N_E - mg = \frac{mv_E^2}{r}$$

da cui

$$N_E = 5mg \simeq 1.47 \text{ N}.$$

Problema 3 (7 punti) Un'asta di massa $M = 0.5$ kg e lunga $2r$, $r = 10$ cm è collegata con una corda attaccata al suo estremo superiore B a un punto distante (rispetto alla base) $L = 50$ cm su un piano inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale. Tra piano e asta nel punto A c'è un coefficiente di attrito statico $\mu = 0.5$.



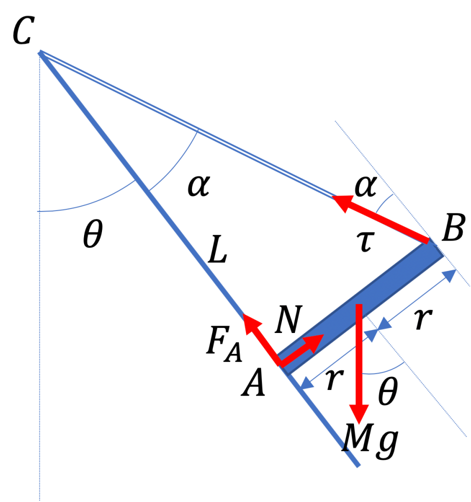
(a) Calcolare L'angolo minimo θ_c per cui l'asta sta in equilibrio.

(b) Eliminiamo l'attrito e incliniamo il piano di un angolo $\theta = \pi/4$ (45°). Si lascia andare l'asta (sempre attaccata alla corda). Calcolare con quale accelerazione angolare a si muove inizialmente l'asta.

Soluzione: Chiamiamo α l'angolo tra la corda e il piano, con $\tan(\alpha) = 2r/L$.

Sull'asta agiscono le seguenti forze:

- La forza peso Mg diretta verso il basso, inclinata di un angolo θ rispetto alla perpendicolare alla sbarra;
- La tensione τ della corda, inclinata di un angolo α rispetto alla perpendicolare alla sbarra;
- La reazione normale N;
- La forza tangenziale di attrito F_A.



Usiamo un sistema di riferimento centrato in A con l'asse x diretto lungo il piano e l'asse y lungo la sbarra.

La prima cardinale lungo la x dà

$$Mgcos(\theta) - \tau\cos(\alpha) - F_A = 0,$$

e lungo la y

$$N - Mg\sin(\theta) - \tau\sin(\alpha) = 0.$$

La seconda cardinale con polo in A dà

$$2r\tau\cos(\alpha) - Mgr\cos(\theta) = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{Mg\cos(\theta)}{2\cos(\alpha)},\\ F_A &= \frac{1}{2}Mg\cos(\theta),\\ N &= Mg\sin(\theta) + \frac{1}{2}Mg\cos(\theta)\tan(\alpha).\end{aligned}$$

La condizione di non slittamento è

$$F_A \leq \mu N$$

da cui

$$\tan(\theta) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \tan(\alpha)\right) = \frac{1}{2\mu} - \frac{r}{L} \simeq 0.80$$

e

$$\theta_c \simeq 0.67 = 38.66^\circ.$$

Se non c'è il coefficiente di attrito, conviene scrivere la seconda cardinale con polo in B

$$Mgr\cos(\pi/4) = I_B a$$

con $I_B = 4Mr^2/3$ e quindi

$$a = \frac{Mgr\cos(\pi/4)}{I_B} = \frac{3\sqrt{2}g}{8r} \simeq 51.97 \text{ rad/s}^2.$$

Problema 4 (7 punti) Due moli di gas ideale, inizialmente nello stato denominato 1, vengono messi a contatto termico con un serbatoio a temperatura $T = 700$ K e raggiungono mediante una trasformazione isocora irreversibile uno stato termodinamico 2 ($T_2 = 700$ K). Tramite una espansione isoterma reversibile il gas raggiunge lo stato 3 tale che $V_3 = rV_2$ con $r = 5$. Successivamente, il gas viene riportato allo stato 1 mediante una trasformazione isobara reversibile. Il calore specifico del gas è $c_P = 2R$.

Determinare:

(a) Il calore ΔQ_{12} scambiato nella trasformazione 1-2.

(b) Il lavoro W fatto nel ciclo.

(c) Il rendimento η del ciclo.

Soluzione: Il calore specifico a volume costante c_V si ottiene da $c_P - c_V = R$, quindi

$$c_V = R \simeq 8.31 \text{ J/mol}.$$

Dalla legge dei gas perfetti lungo l'isoterma abbiamo ($V_2 = V_1$ e $P_3 = P_1$)

$$P_2V_2 = P_3V_3 \leftrightarrow P_2V_1 = P_1V_3$$

e dato che $V_3 = rV_2 = rV_1$

$$P_2 = rP_1.$$

A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned}P_1V_1 &= nRT_1\\ P_2V_2 &= nRT_2\end{aligned}$$

da cui

$$T_2 = rT_1$$

Il lavoro W è l'area del ciclo, ovvero il lavoro dell'isoterma più il lavoro (negativo) dell'isobara

$$W_{23} = nRT_2\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = nRT_2\ln(r) \simeq 18724.20 \text{ J};$$

$$W_{31} = P_1(V_1 - V_3) = P_3V_3\left(\frac{1}{r} - 1\right) = nRT_2\left(\frac{1}{r} - 1\right) \simeq -9307.20 \text{ J}$$

e quindi

$$\begin{aligned}W &= nRT_2\left(\ln(r) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right)\\ &\simeq 9417.00 \text{ J}.\end{aligned}$$

Bisogna adesso calcolare i calori scambiati

Nella trasformazione 1-2 non c'è lavoro, dato che è una isocora, quindi

$$\Delta Q_{12} = U_2 - U_1 = nc_V(T_2 - T_1) = nc_VT_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \simeq 9307.20 \text{ J}.$$

Nell'isoterma il calore è uguale al lavoro

$$\Delta Q_{23} = W_{23} = nRT_2\ln(r) \simeq 18724.20 \text{ J};$$

nell'isobara il calore è dato dalla variazione dell'energia interna (negativa) + il lavoro (negativo) o anche dq

$$\Delta Q_{31} = nc_P(T_1 - T_2) = nc_P\left(\frac{1}{r} - 1\right) \simeq -18614.40 \text{ J}.$$

Il rendimento η è $W/(\Delta Q_{12} + \Delta Q_{23})$

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{nRT_2\left(\ln(r) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right)}{nc_VT_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) + nRT_2\ln(r)}\\ &= \frac{\ln(r) - \left(1 - \frac{1}{r}\right)}{\frac{c_V}{R}\ln(r) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)} \simeq 0.34.\end{aligned}$$

Problema 5 (7 punti) Wile E. Coyote vuole ordinare una ventosa circolare da ACME$^{\text{TM}}$ per appendersi ad un lastrone di pietra, in modo da sorprendere Beep Beep. Dato che lui ha una massa $m = 50$ kg, che raggio r dovrà avere al minimo la ventosa?

Soluzione: La forza peso di Wile E. Coyote dev'essere compensata dalla pressione atmosferica $p = 10^5$ pa moltiplicata la superficie della ventosa, per cui

$$mg = \pi r^2 p,$$

e quindi

$$r = \sqrt{\frac{mg}{\pi p}} \simeq 3.95 \text{ cm}$$

NOTE

Istruzioni.

Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca).

Marcare chiaramente (con un colore o con un cerchio) il numero della domanda che viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà considerato nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).