Il principio fisico su cui si basa il funzionamento degli estensimetri é sinteticamente illustrato in Fig. 2.3: all'elemento di trave precedentemente considerato e caricato assialmente da una forza N, é incollato (pur rimanendone elettricamente isolato) un tratto conduttore che ne segue fedelmente le deformazioni (senza perturbarle in alcuna maniera).

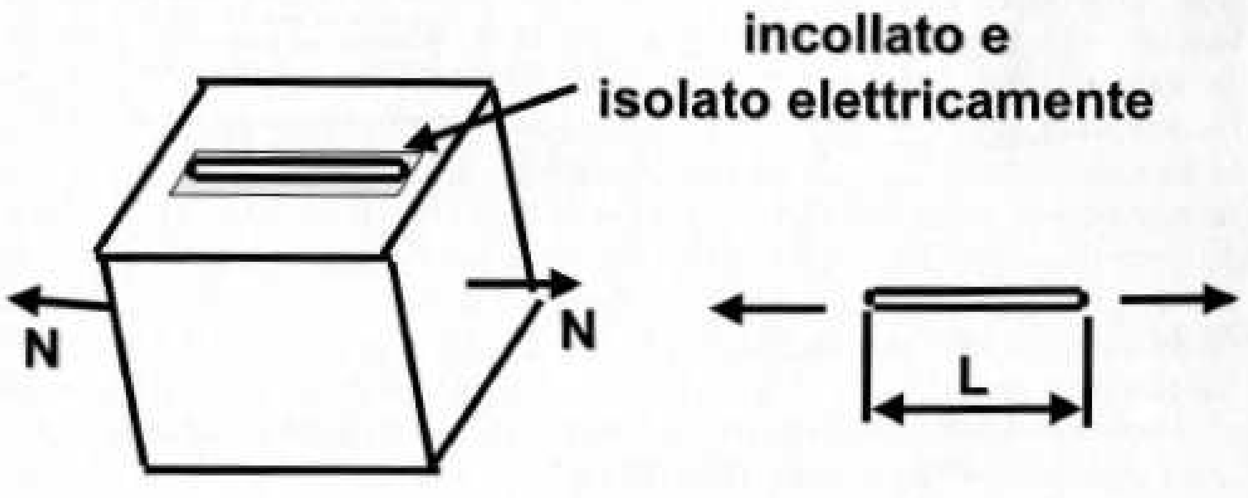

Fig. 2.3

Come noto dall'elettrotecnica, il valore della resistenza elettrica é:

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{2.1}$$

ove:

R= resistenza elettrica [Ω]

ρ = resistività del materiale [Ωm]
L = lunghezza del conduttore considerato [m]
A = area della sezione di conduttore [m^2]

L'effetto del carico produrrà sul conduttore effetti analoghi a quelli già visti in Fig. 2.1 per qualunque elemento che lavori sotto carico in campo elastico, ossia un allungamento ed una variazione di sezione. In più anche la resistività varia con il carico applicato. Se si é in grado di garantire la medesima deformazione per il pezzo ed il conduttore, si dispone allora di una legge (la (2.1) in grado di correlare la deformazione del conduttore (uguale a quella del pezzo) alla sua variazione di resistenza.

Al fine di rendere più compatto l'estensimetro si è pensato di ripiegare il conduttore a serpentina, giungendo alla configurazione più comune degli estensimetri, che é quella illustrata in Fig. 2.4. In questo modo non si è obbligati a disporre di una lunghezza iniziale di misura L eccessiva; ciò permette di ottenere il valore della deformazione come la media su un tratto superficiale più piccolo. L'idea che la sensibilità di un estensimetro dipenda dalla sua lunghezza è sbagliata. Il filamento é isolato elettricamente dal pezzo cui é incollato da un elemento, solitamente di materiale plastico (un tempo era carta), che funge da supporto e che viene incollato sul pezzo.

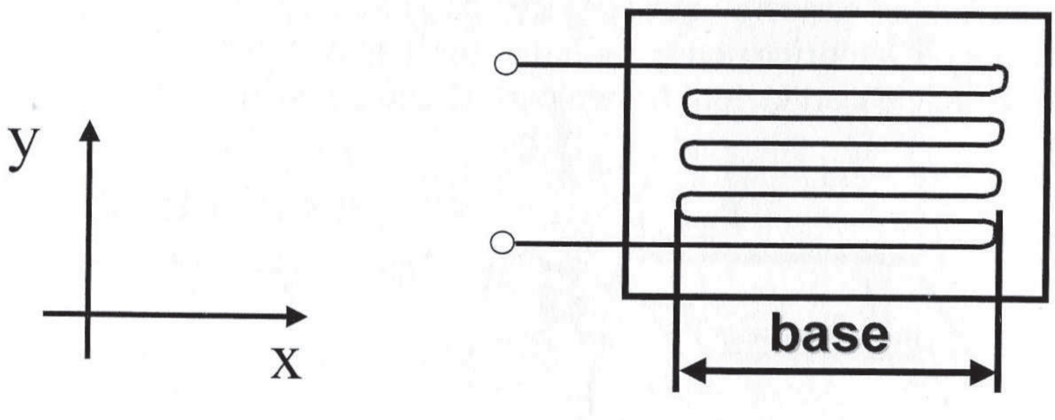

Fig. 2.4

I valori tipici di resistenza per un estensimetro a resistenza elettrica sono:

- R = 120 Ω con tolleranza di $\pm$1%
- R = 350 Ω con tolleranza $\pm$ 1%.

Nel momento in cui si sceglie un estensimetro su un catalogo, la prima grandezza di interesse é la **base**; non va confusa con la lunghezza del supporto, che é maggiore della base: la base é il tratto utile per la misura. I valori tipici delle basi degli estensimetri vanno da 0.6 a 200 mm. La scelta della base è un elemento importante perché se questa aumenta, la misura fornita sarà una media della variazione di lunghezza sul tratto identificato proprio dalla base. Ne viene che, se sono attesi forti gradienti di deformazione lungo la direzione di misura e si desidera conoscere la deformazione in un punto, sarà opportuno utilizzare basi piccole, viceversa se lo stato di deformazione è costante lungo la direzione di misura, si potranno utilizzare basi maggiori (che garantiscono un'accuratezza intrinseca maggiore).

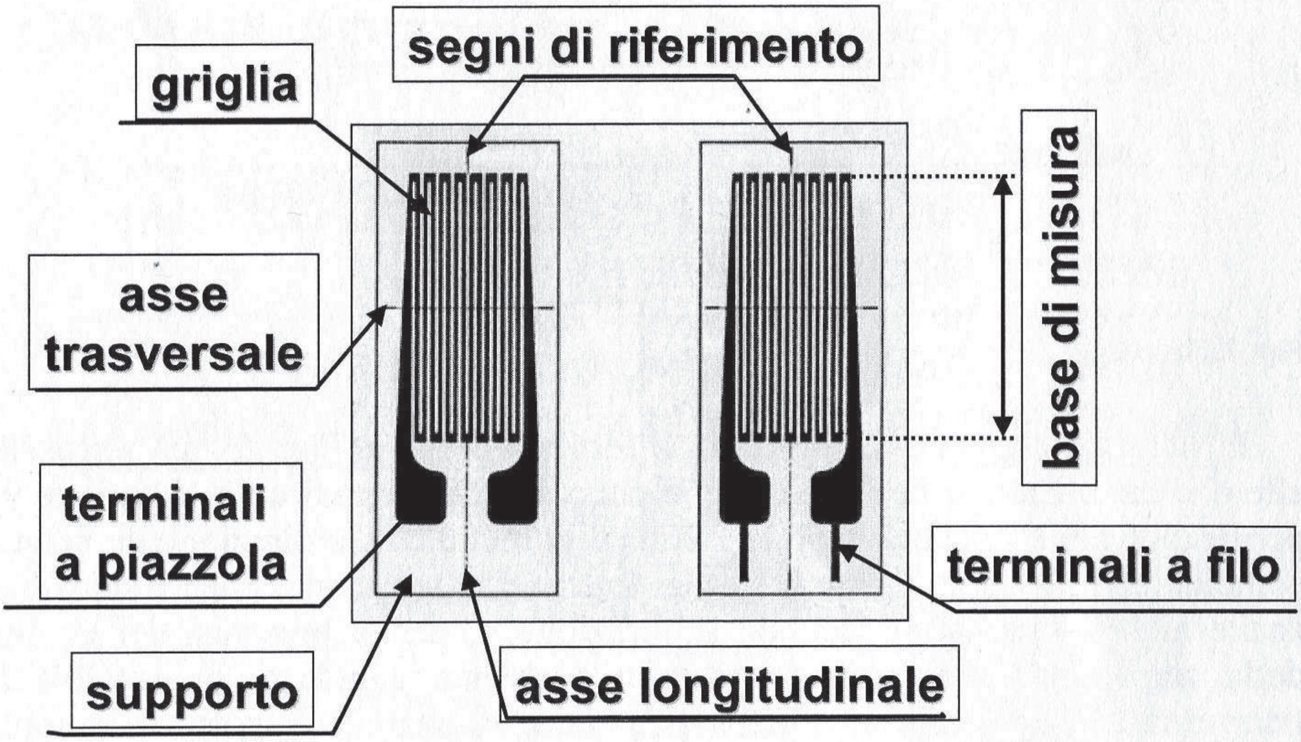

Fig. 2.5a

Esiste una norma UNI [10] che propone per le varie parti costituenti l'estensimetro i nomi indicati in Fig. 2.5a. E' possibile notare la presenza, sul supporto, di segni di riferimento per il corretto posizionamento dell'estensimetro sul punto di misura e per l'individuazione della direzione. Si noti inoltre la presenza di due diversi tipi di terminali per il collegamento al circuito di misura: la soluzione con terminali a filo direttamente collegati al circuito di misura é da considerarsi più 'pericolosa', in quanto uno strappo accidentale dei fili di collegamento rischia di danneggiare anche l'estensimetro. L'adozione dei terminali a piazzola prevede solitamente la presenza di altre piazzole (Fig. 2.5b) subito a valle dell'estensimetro: un primo collegamento elettrico si ha tra le piazzole dell'estensimetro e le piazzole ausiliarie, da cui partono i cavi di collegamento al circuito di misura. In tal caso un eventuale strappo dei fili di collegamento danneggerebbe solo le piazzole ausiliarie e non l'estensimetro. E' da notarsi che la soluzione con terminali a filo non preclude la possibilità di utilizzare le piazzole ausiliarie.

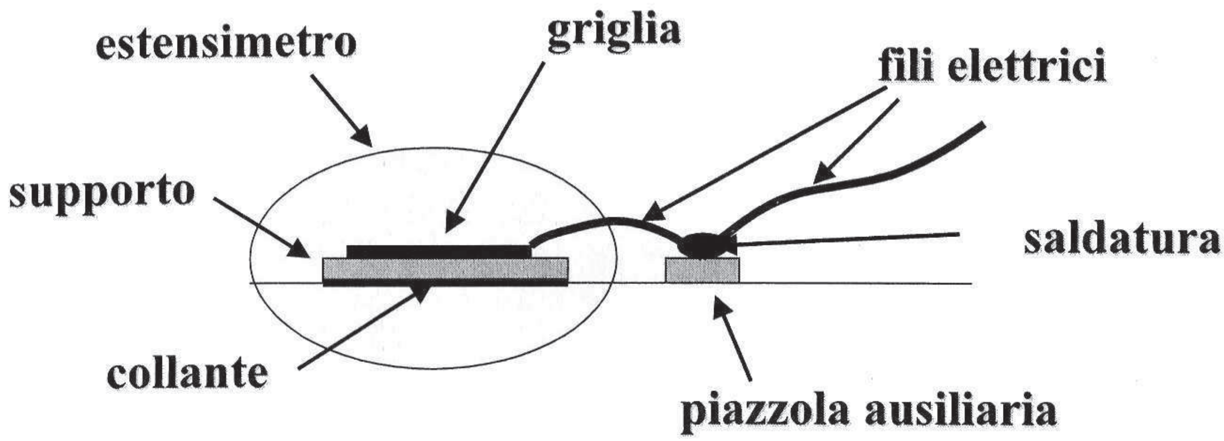

Fig. 2.5b

E' naturale che un estensimetro conformato come in Fig. 2.4 sia sensibile alle dilatazioni lungo la direzione x e poco alle dilatazioni nella direzione y, perpendicolare a x: andrà dunque incollato in modo che la direzione di misura coincida con l'asse x. Tuttavia l'estensimetro risulterà parzialmente sensibile anche alle deformazioni secondo la direzione y, per la presenza dei gomiti della serpentina. Per ridimensionare il problema e ridurre la **sensibilità trasversale**, si costruiscono estensimetri con i raccordi a sezione maggiore, come mostrato in Fig. 2.5a. Questo problema verrà ripreso in maniera dettagliata nel seguito.

La tecnica oggigiorno più diffusa per la produzione di estensimetri é quella della fotoincisione, che tra l'altro consente agevolmente la realizzazione di raccordi a sezione maggiore per ridurre la sensibilità trasversale.

La tecnica della fotoincisione consiste nel predisporre un disegno dell'estensimetro di dimensioni notevoli rispetto a quelle dell'estensimetro reale; tale disegno viene proiettato su di una lastra fotosensibile che ricopre uno strato metallico depositato sopra un supporto isolante: le dimensioni della figura proiettata sono ora quelle reali: la luce ha come effetto quello di fissare il disegno, analogamente a quanto avviene nello sviluppo delle fotografie. Un successivo lavaggio mette a nudo il metallo da asportare, ed infine l'immersione in un bagno acido asporta il metallo in eccesso, lasciando sullo strato isolante l'estensimetro pronto da utilizzare.

Le figure 2.6 a,b,c,d,e illustrano diversi tipi di estensimetro, per varie applicazioni: le figure sono tratte da cataloghi: sono specificati il valore della base, della resistenza nominale e il materiale su cui di preferenza vanno incollati gli estensimetri in questione: il motivo di questa specificazione risulterà chiaro nel seguito, quando si illustreranno gli effetti della temperatura sulle misure.

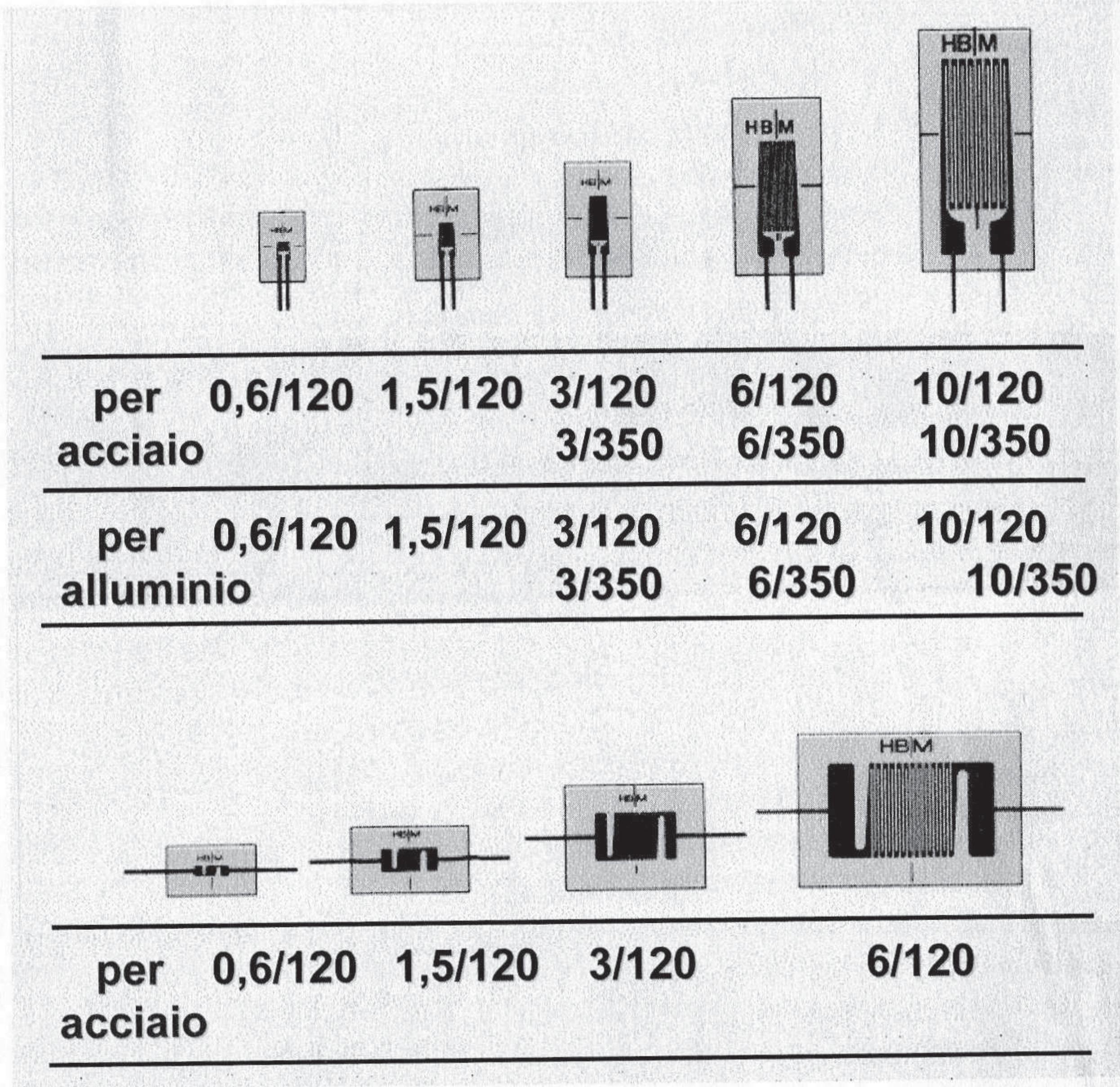

Fig. 2.6a (fonte HBM)

Nella scelta di un estensimetro, oltre al già citato valore della base, é di fondamentale importanza la sensibilità, espressa attraverso il **fattore di taratura** dell'estensimetro, più noto con il termine anglosassone di **gauge factor** o **k** dell'estensimetro.

Tale coefficiente é, per definizione:

$$k = \frac{\Delta R / R}{\Delta L / L} = \frac{\Delta R / R}{\varepsilon}$$

ossia il rapporto tra variazione di resistenza e suo valore iniziale, rapportata alla deformazione. Tale coefficiente è adimensionale.

Si desidera un trasduttore dal comportamento lineare, ossia con sensibilità costante.

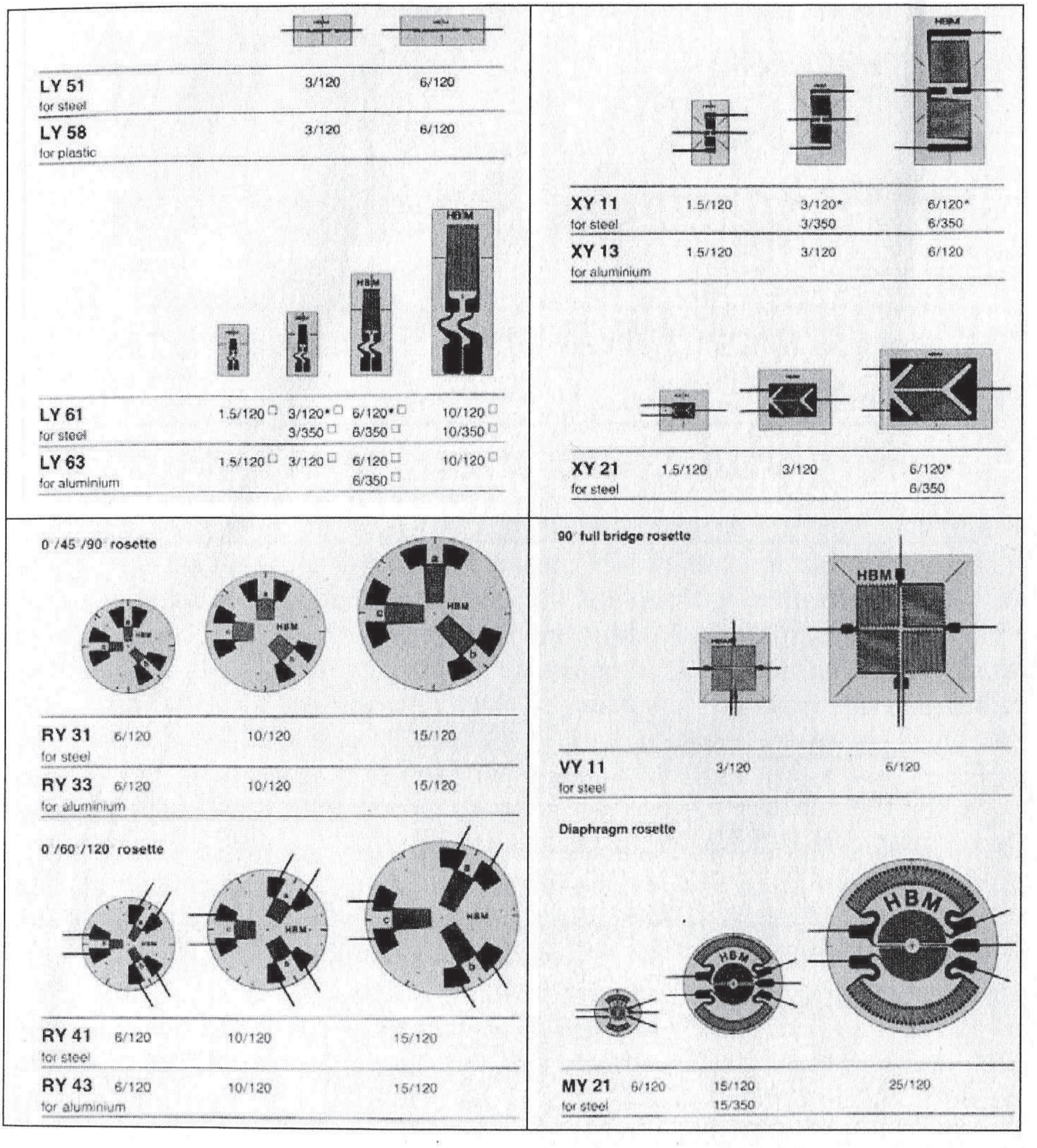

Fig. 2.6 b,c,d,e (fonte HBM)

Partendo dalla relazione che esprime la resistenza dell'estensimetro:

$R = \rho \dfrac{L}{A}$, passando ai logaritmi e differenziando, si ha:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A}$$

Volendo esplicitare la sensibilità k:

$$k = \frac{\Delta R / R}{\Delta L / L} = 1 + 2\upsilon + \frac{\Delta\rho / \rho}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

Riguardo il secondo termine a secondo membro si ricorda che $\upsilon = \frac{1}{m}$ dove m é il *modulo di Poisson*, che é il reciproco del *coefficiente di Poisson ν*.

Si può giustificare la presenza del secondo termine a secondo membro (2υ), facendo ancora riferimento alla Fig. 2.1 ove, definito L_t il lato della base quadrata del prisma considerato, il termine dA/A può scriversi:

$$\frac{(L_t + \varepsilon_t L_t)^2 - L_t^2}{L_t^2} = 1 + 2\varepsilon_t + \varepsilon_t^2 - 1$$

Poiché il termine ε_t^2 é trascurabile ed é $\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_a$ si ha che

$$\frac{dA / A}{\varepsilon_a} = \frac{-2\nu\varepsilon_a}{\varepsilon_a} = -2\nu$$, che giustifica la (2.2).

Se si considera un materiale metallico come l'acciaio, che ha ν=0.3, i primi due termini danno un valore di circa 1.6: se la resistività non fosse influenzata dalla deformazione il terzo termine non conterebbe; invece il terzo termine spesso non é trascurabile. In conseguenza di questo fatto si ha che valori tipici della k degli estensimetri, nel caso di estensimetri metallici, sono: $k \approx 2$, con tolleranze del 1 % ÷ 2 %. I materiali più comuni sono la costantana (lega rame nichel), o diverse leghe nichel-cromo (nicromo V), con l'aggiunta di piccole percentuali di ferro, alluminio o molibdeno.

Vale la pena di fornire a questo punto qualche indicazione sugli estensimetri a semiconduttore, dal momento che nel seguito verranno considerati unitamente agli estensimetri a resistenza elettrica, pur presentando, rispetto a questi, qualche differenza:

Innanzi tutto presentano valori di k assai variabili; si va da k = - 125 fino a k = 100, con tolleranze analoghe a quelle degli estensimetri a resistenza elettrica. La variazione di resistenza, dunque la sensibilità, è cento volte maggiore rispetto agli estensimetri a resistenza elettrica (ed inoltre la k può anche essere negativa). Una seconda importante differenza riguarda la resistività che può anche essere 1000 volte maggiore per gli estensimetri a semiconduttore rispetto a quelli metallici. Ne viene che, a pari k e pari lunghezza e sezione dell'estensimetro, anche le variazioni ΔR attese per una assegnata deformazione sono 1000 volte maggiori. Per questo motivo gli estensimetri a semiconduttore non hanno griglia, ma sono in genere costituiti da piattine con due terminali. Il loro maggiore difetto rispetto agli estensimetri metallici è la loro maggiore difficoltà a conservare un valore di k proprio costante perché la loro resistività, quindi anche la sensibilità, è maggiormente influenzata sia dallo stato di sforzo sia dalle variazioni di temperatura. Ulteriore svantaggio è la loro fragilità, che impone una particolare cura nell'incollaggio.

Anche se il problema della taratura sarà trattato in capitoli successivi, s ricorda che le tolleranze sia sui valori di resistenza sia di sensibilità (k dell'estensimetro) sono fissate dal costruttore che le determina su base statistica analizzando alcuni campioni di uno stesso lotto di produzione.

Il motivo va ricercato nel fatto che l'estensimetro, per essere utilizzato (e quindi anche quando va tarato), va incollato al pezzo da misurare e quindi non é più riutilizzabile: é come se si volesse verificare il funzionamento di un lotto di fiammiferi: per verificare che tutti funzionino, andrebbero accesi tutti, con una produzione per il consumo nulla.

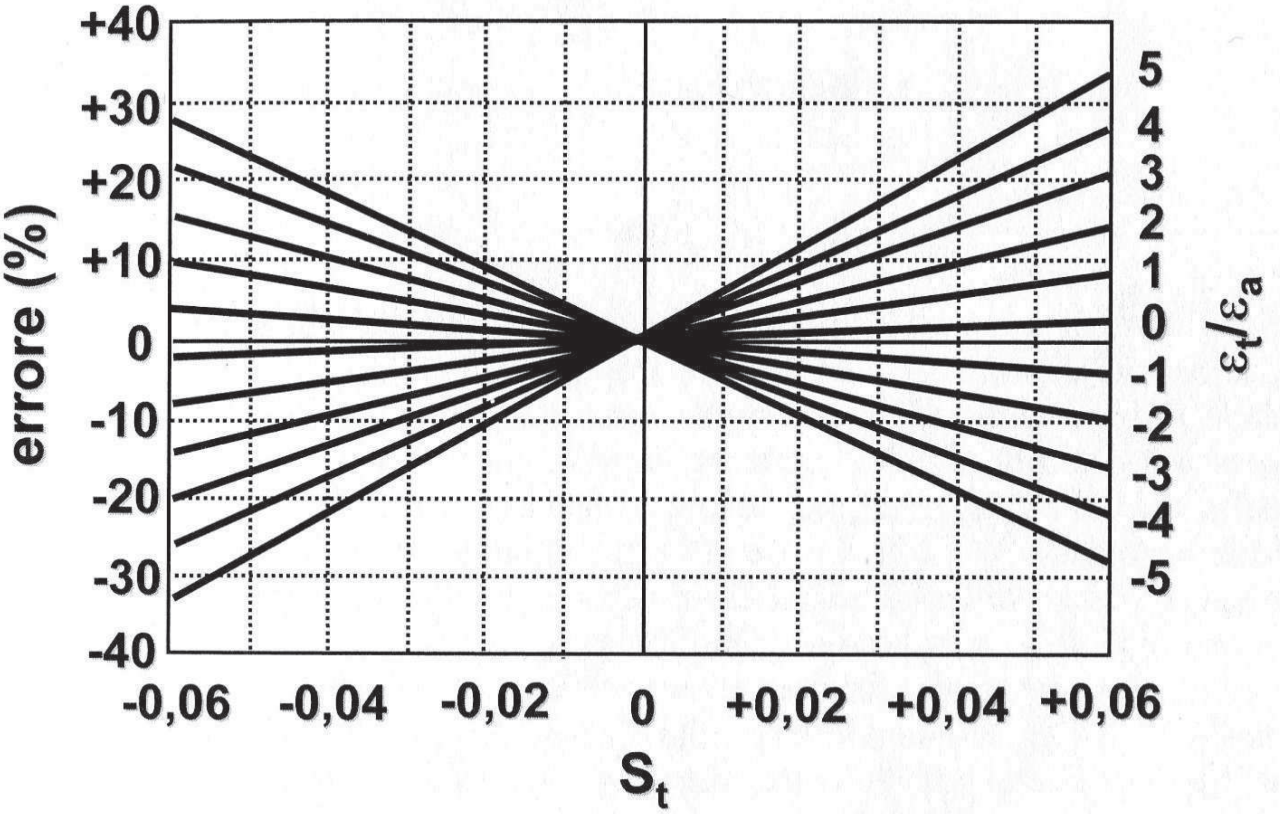

Fig. 2.7

In realtà la formula scritta per la k dell'estensimetro é più complessa della (2.2), in quanto, volendo essere rigorosi, bisognerebbe scrivere:

$$\frac{\Delta R}{R} = k_a \varepsilon_a + k_t \varepsilon_t + k_s \gamma_{at}$$

Nella realtà $k_s \approx 0$, mentre altrettanto non si può dire per k_t.

Si definisce la sensibilità trasversale S_t come:

$$S_t = \frac{k_t}{k_a}, \text{ da cui } \frac{\Delta R}{R} = k_a\left(\varepsilon_a + S_t \varepsilon_t\right)$$

Il coefficiente S_t viene generalmente espresso in funzione del rapporto $\dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a}$ stimato a priori (così come mostrato in Fig. 2.7) e valori tipici sono

S_t = 0.1-0.9 % (ossia minori della prima divisione sull'asse delle ascisse di Fig. 2.7 e quindi assai piccoli). La Fig. 2.7 va letta entrando sulla destra del diagramma con un valore del rapporto $\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a}$ che individua una delle rette nella famiglia disegnata. All'intersezione di tale retta con il valore di S_t corrisponde, sulla sinistra del diagramma, un valore di errore percentuale. Con i valori tipici di S_t che sono stati segnalati, l'errore percentuale é decisamente contenuto, inferiore al 5%, anche con grandi rapporti tra deformazione trasversale ε_t e longitudinale ε_a.

Circuiti di Misura

La stima della variazione di resistenza dovuta alla deformazione non avviene con misura diretta; si sfrutta la legge di Ohm. E' tuttavia importante sviluppare sensibilità agli ordini di grandezza delle variazioni attese per le grandezze elettriche a causa delle deformazioni; interessa innanzi tutto conoscere l'entità della variazione di resistenza.

Un esempio servirà a chiarire i termini del problema.

ESEMPIO 3.1

Si consideri una barretta di acciaio (E=206000 MPa) che, per effetto di uno stato di trazione monoassiale, si trovi soggetta ad un carico di trazione $\sigma_a = 100$ MPa ($=100\ \mathrm{N/mm^2}$) la resistenza dell'estensimetro sia quella più comune, ossia 120 Ω, così come il fattore di taratura, che si supponga pari a 2.

INCOGNITA: Variazione di resistenza.

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} = 4.762\mathrm{E}-4 \text{ m / m} = 476\ \mu\text{m / m}$$

Dunque sarà:

$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon_a = 9.5\mathrm{E}-4$, con una variazione di resistenza pari a $\Delta R = 0.114\,\Omega$.

Si tratta di variazioni molto piccole ben difficili da misurare con un livello di accuratezza sufficiente ad esempio con un tester.

Come esempio se si desidera effettuare la misura per via indiretta, utilizzando un sistema voltamperometrico, si può alimentare l'estensimetro con la tensione di 1V; supponendo una resistenza iniziale di 120 Ω, la corrente che percorre l'estensimetro è di 8.33 mA. Se la variazione di resistenza dovuta alla deformazione è dello stesso ordine di grandezza di quella appena vista (0.1 Ω), che porta la resistenza a 119.9 Ω, la corrente che percorre l'estensimetro è 8.34 mA. Bisogna dunque avere un galvanometro in grado di risolvere 10 μA, con un'accuratezza dello stesso ordine di grandezza. Bisogna inoltre garantire che la tensione di alimentazione sia particolarmente stabile, che le resistenze dei contatti non varino nel tempo, con un'accuratezza ed un controllo sui valori di resistenza dell'ordine del centesimo di ohm almeno.

Per questo motivo sarebbe meglio disporre di uno strumento che misuri a partire da condizioni iniziali nulle, anche solo per gestire meglio il valore del fondo scala in funzione della risoluzione disponibile.

Se si desidera realizzare misure accurate bisogna passare a circuiti di misura più complessi: solitamente per gli estensimetri il condizionamento del segnale avviene attraverso il **ponte di Wheatstone**.

Riassumendo, il percorso che porta dalla deformazione alla lettura di una tensione si può così schematizzare:

$$F \longrightarrow \sigma \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow \Delta R \longrightarrow \Delta V$$

Se si vuole associare ad ogni passaggio un coefficiente si avrà:

$$F \longrightarrow \sigma \longrightarrow \varepsilon \longrightarrow \Delta R \longrightarrow \Delta V$$

Teoria dell'elasticità	k	?????

Dunque il passaggio dalle forze agenti su un corpo allo stato di sforzo e allo stato di deformazione viene dalle equazioni della Meccanica e dalla Scienza delle Costruzioni, il passaggio dalle deformazioni alla variazione di resistenza è dato dalla k dell'estensimetro; nel prossimo paragrafo ci si occuperà del passaggio dalla variazione di resistenza alla lettura di un segnale elettrico.

La misura consiste nel processo inverso a quello mostrato, ossia si parte dal valore di tensione ΔV per arrivare alla deformazione ε e poi allo stato di sforzo e alle forze agenti su una generica struttura.

$$\boxed{\Delta V} \longrightarrow \boxed{\varepsilon} \longrightarrow \boxed{\sigma} \longrightarrow \boxed{F}$$

3.1 Ponte di Wheatstone

Il circuito a ponte è un tipo di circuito assai comune, le cui proprietà, ben note dall'elettrotecnica, saranno qui brevemente richiamate, mettendo soprattutto in luce le informazioni sintetiche necessarie per poterlo sfruttare nelle misure estensimetriche.

Il tipico circuito a ponte è illustrato nella Fig. 3.1.

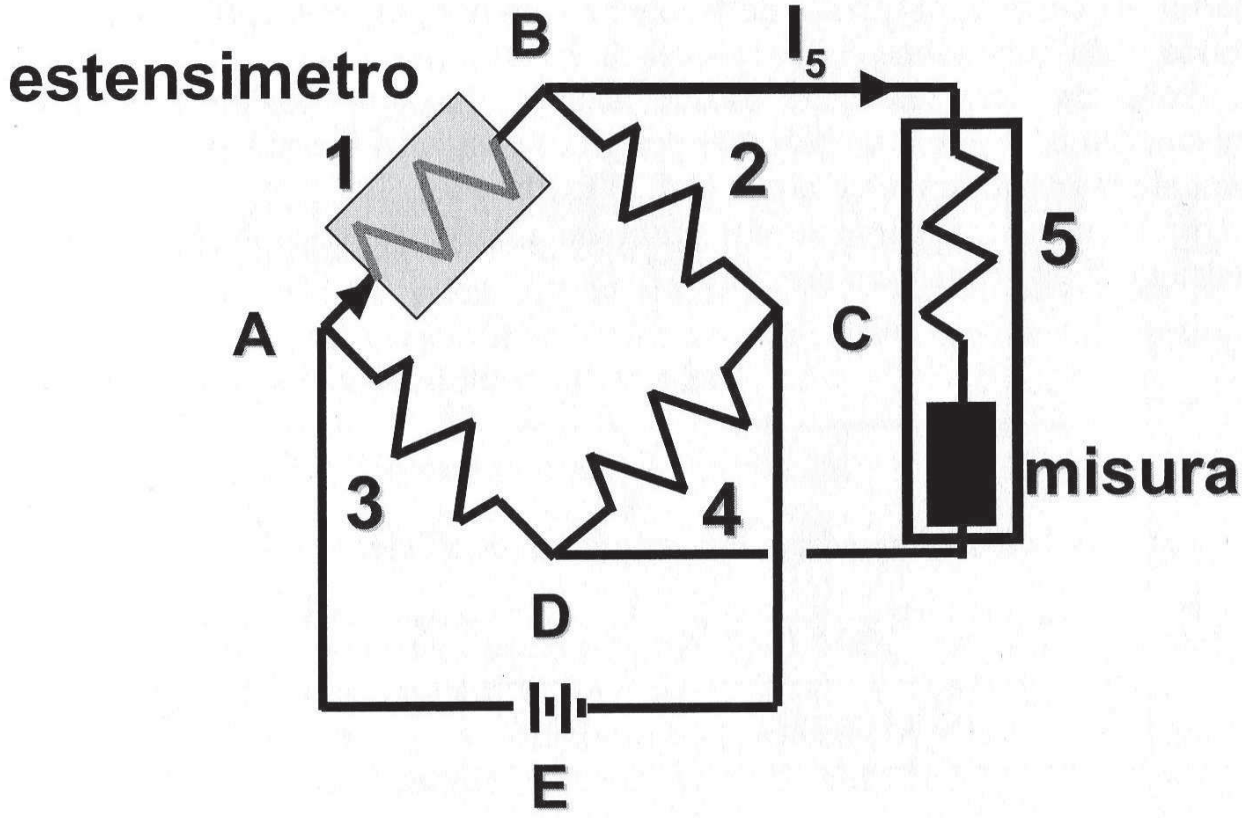

Fig. 3.1

Quando un solo dei quattro lati del ponte è costituito da un estensimetro si parlerà di circuito ad un quarto di ponte (Fig. 3.2a), quando i lati attivi sono due (solitamente contigui) si parlerà di mezzo ponte (Fig. 3.2b), quando tutti e quattro i lati del ponte di Wheatstone sono costituiti da estensimetri si avrà il collegamento a ponte intero (Fig. 3.2c). La scrittura rigorosa delle equazioni del ponte prevede la soluzione della rete di Fig. 3.1 attraverso le leggi di Kirchoff ai nodi e alle maglie. Per la soluzione rigorosa del problema si rimanda a [6]; si illustra una soluzione più semplice ed approssimata valida nel caso in cui sulla diagonale di misura si trovi uno strumento ad alta impedenza, quale ad esempio un voltmetro (che è il caso più frequente quando si misura con estensimetri): sotto tale ipotesi I_5=0.

Se interessa la caduta di tensione a cavallo della resistenza R_1 del lato AB

(Fig. 3.1) si ha:

$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

e similmente:

$$V_{AD} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} E$$

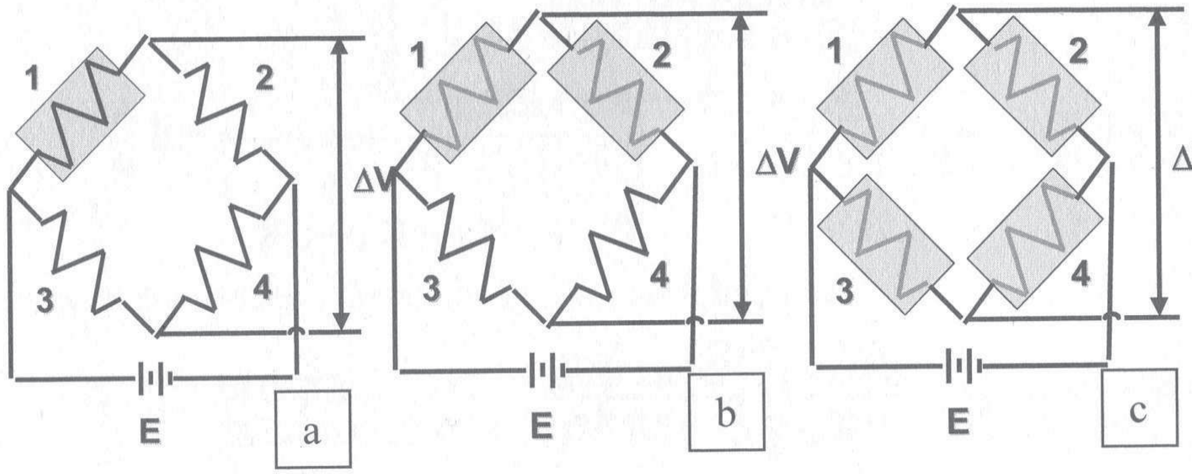

Fig. 3.2

La tensione misurata ai capi della diagonale di misura sarà:
$V=V_{BD}=V_{AB}-V_{AD}$.
Sostituendo si ricava:

$$V = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E \tag{3.1}$$

La tensione misurata sarà <u>nulla</u> ed il ponte sarà detto **bilanciato** qualora si abbia: $R_1R_4=R_2R_3$, ossia quando sono uguali i prodotti di resistenze che si trovano su lati opposti del ponte. Questa condizione è sicuramente rispettata quando $R_1=R_2=R_3=R_4$, ossia quando i quattro lati del ponte sono estensimetri uguali. Questa affermazione vale in teoria, in quanto è vera solo trascurando le tolleranze sulle resistenze dei singoli estensimetri.

Osservando la relazione scritta si nota che, nella definizione della condizione di ponte bilanciato contano solo i valori delle resistenze poste sui lati del ponte e non la tensione di alimentazione del ponte stesso. Un'ulteriore osservazione è che, nella (3.1) la relazione tra V ed E è lineare, mentre la relazione tra E e i valori di resistenza R_1, R_2, R_3, R_4 è non lineare.

Qualora si desideri bilanciare il ponte, partendo da condizioni di ponte sbilanciato, questa operazione è possibile variando una delle quattro resistenze (che quindi sarà un potenziometro), il cui valore di resistenza ha tolleranze strettissime (almeno 0.1%); in questo modo è possibile, in un certo campo di valori, riportarsi alla condizione $R_2R_3=R_1R_4$ che garantisce corrente nulla sulla diagonale di misura. Le misure vengono sempre eseguite a partire da condizioni iniziali di ponte bilanciato.

Si supponga che le quattro resistenze varino di una quantità $\Delta R_1..\Delta R_4$ (Fig. 3.3). La tensione letta sulla diagonale di misura ΔE è ottenibile risolvendo un semplice sistema lineare la cui scrittura si può dedurre dalla (3.1):

$$\Delta V = E\frac{\begin{vmatrix} R_1+\Delta R_1 & R_2+\Delta R_2 \\ R_3+\Delta R_3 & R_4+\Delta R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+\Delta R_1+R_2+\Delta R_2 & 0 \\ 0 & R_4+\Delta R_4+R_3+\Delta R_3 \end{vmatrix}} = E\frac{A}{B}$$

$$A = R_1R_4\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_4}{R_4}-\frac{\Delta R_3}{R_3}\right)$$

$$B = \frac{R_1R_4(R_1+R_2)^2}{R_1R_2}$$

che si ottengono svolgendo i determinanti, trascurando i termini di ordine superiore e ricordando che si parte da condizioni di ponte bilanciato ($R_1R_4-R_2R_3=0$).

In definitiva si ha:

$$\Delta V = E\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_4}{R_4}-\frac{\Delta R_3}{R_3}\right) \tag{3.2}$$

In tal caso la relazione tra ΔV e ΔR_i (i=1,2,3,4) è lineare. Se con il termine r si indica il rapporto R_2/R_1, si ottiene, trascurando tutti i termini di ordine superiore:

$$\Delta V = E\frac{r}{(1+r)^2}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}-\frac{\Delta R_2}{R_2}+\frac{\Delta R_4}{R_4}-\frac{\Delta R_3}{R_3}\right) \tag{3.3}$$

Questa equazione è fondamentale e governa le misure effettuate con il ponte di Wheatstone.

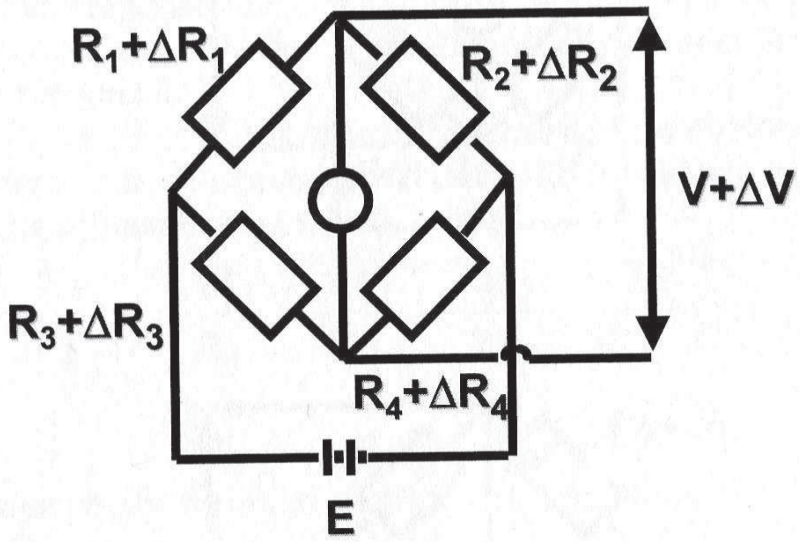

Fig. 3.3

Si possono subito osservare due casi assai importanti:

- **variazioni di resistenze relative a lati contigui si sottraggono**
- **variazioni di resistenze relative a lati opposti si sommano**

Gli esempi di Fig. 3.4 servono a chiarire le due affermazioni appena fatte. Nel caso di Fig. 3.4a si hanno variazioni di resistenza uguali (sia in modulo sia in segno) su lati opposti: poiché tali variazioni si sommano, il ΔV misurato risulterà dalla somma degli effetti di ΔR_1 e ΔR_4. L'esempio di Fig. 3.4b riguarda variazioni di resistenza uguali sia in modulo sia in segno su lati contigui: la variazione di tensione misurata ai capi della diagonale di misura sarà nulla. Nella Fig. 3.4c le variazioni di resistenza su lati contigui sono uguali in modulo ma di segno opposto: dal momento che i loro effetti si sottraggono, la variazione di tensione letta sulla diagonale di misura è doppia rispetto al caso di un solo estensimetro attivo.

La tensione di sbilanciamento del ponte (vedi formula 3.2) è direttamente correlata alla tensione di alimentazione del ponte stesso.

E' a questo punto possibile tentare qualche valutazione relativa alla sensibilità del circuito a ponte.

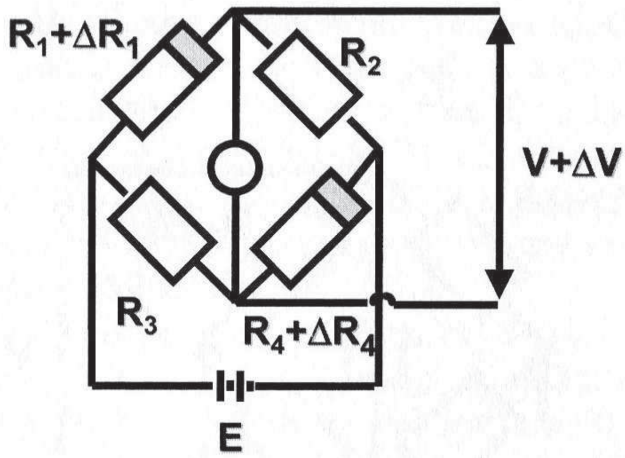

Fig. 3.4a

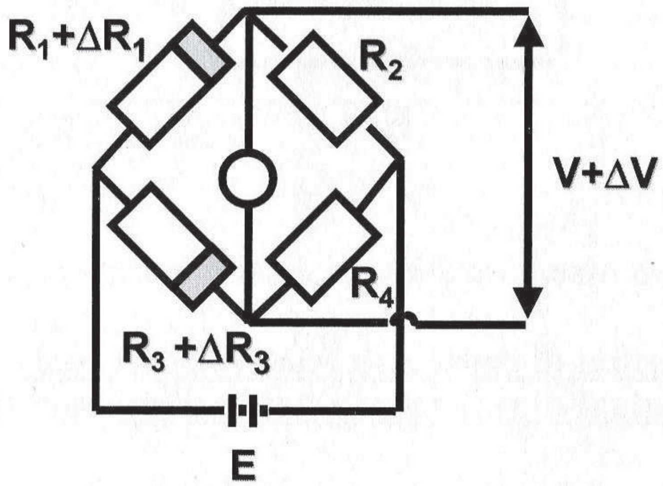

Fig. 3.4b

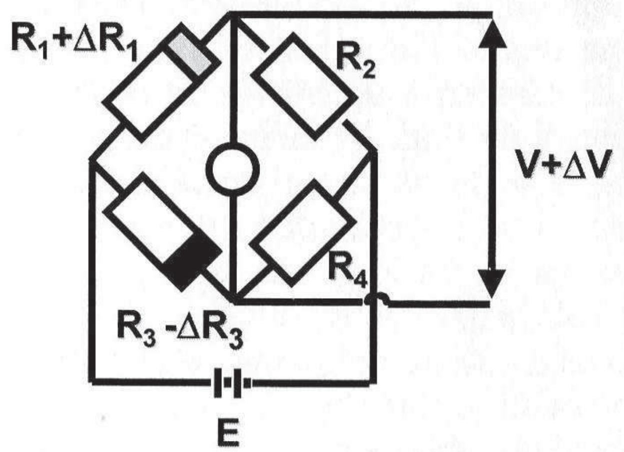

Fig. 3.4c