



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale Scienze e Tecnologie dell'Informazione

METODI MATEMATICI PER LA FINANZA

prof. Vincenzo Vespri

2007-2008

autore Ahadu Tsegaye

Indice

I	Teoria di Base delle Opzioni	1
1	Introduzione alla Opzioni e ai Mercati	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Cosa è un'Opzione?	4
1.2.1	Un semplice esempio: Un Opzione di Call	5
1.2.2	Le Opzione di Put	7
1.3	Leggere la Stampa Finanziaria	8
1.4	A cosa servono le opzioni?	11
1.5	Altri tipi di Opzioni	12
1.6	Contratti Forward e Futures	13
1.6.1	Tassi d'interesse e Valore Attuale	15
2	Cammini Casuali del prezzo dei beni	17
2.1	Introduzione	17
2.2	Un semplice modello per i prezzi di un bene	18
2.3	Lemma di Itô	24
2.3.1	L'eliminazione della casualità	27
3	Il modello di Black-Scholes	29
3.1	Arbitraggio	29
3.2	Valori di Opzioni, Ricompense e Strategie	31
3.3	Parità put-call	38
3.4	L'analisi Black-Scholes	39
3.5	L'equazione Black-Scholes	43
3.6	Condizioni di contorno e finali per Opzioni Europee	44
3.7	La formula Black-Scholes per Opzioni Europee	46
3.8	Manutenzione in pratica	49
3.9	Volatilità implicata	51

4	Equazioni Differenziali Parziali	55
4.1	Introduzione	55
4.2	L'Equazione di Diffusione	57
4.3	Condizioni di contorno iniziali	59
4.3.1	Il problema del valore iniziale su un intervallo finito	59
4.3.2	il problema del valore iniziale su un intervallo infinito	61
4.4	In avanti contro All'indietro	62
5	Le formule Black-Scholes	65
5.1	Introduzione	65
5.2	Soluzioni di Similarità	66
5.3	Un problema di valore iniziale per l'equazione di diffusione	69
5.4	Le derivazione delle formule Black-Scholes	70
5.5	Opzioni Binarie	75
5.6	Neuralità al rischio	77
6	Variazioni sul modello Black-Scholes	81
6.1	Introduzione	81
6.2	Opzioni su beni che pagano dividendi.	82
6.2.1	Strutture di dividendi	82
6.2.2	Rendita di un dividendo costante	82

Parte I

Teoria di Base delle Opzioni

Capitolo 1

Introduzione alla Opzioni e ai Mercati

1.1 Introduzione

Il libro tratta i modelli matematici per i mercati finanziari, i beni che vi sono scambiati e specialmente i prodotti finanziari derivati come le opzioni e i futures. Esistono molti tipi di mercati finanziari, ma i più importanti sono:

- **Mercato di Azioni (Stock market)**, come quelli a New York, Londra, Tokyo;
- **Mercato di Obbligazioni (Bond market)** che ha a che fare con obbligazioni governative e non;
- **Mercato monetario o Borsa (foreign exchange markets)** dove avviene la compravendita di valute;
- **Mercato dei Beni (Commodity markets)** dove avviene la compravendita di beni fisici come il petrolio, l'oro, il rame, la farina o l'elettricità;
- **Mercati di Futures e opzioni** dove avviene la compravendita di prodotti derivati che sono il soggetto principale del corso.

Verrà data, all'occorrenza, una spiegazione dettagliata delle varie categorie. Si suppone che lo studente conosca il motivo dell'esistenza delle borse e dei mercati dei beni ed anche sull'idea che sta dietro le azioni (noti anche come **share** o **equità**). Molto sinteticamente un'azienda che ha bisogno di soldi, ad esempio per fare una fabbrica o sviluppare un nuovo prodotto, può vendere parti di se stessa (azioni) a investitori. In questo modo l'azienda è di proprietà dei suoi azionisti (shareholders), quindi nel momento in cui questa ha dei guadagni una percentuale di questi potrebbero venire ripartiti tra i suoi azionisti e se l'azienda fallisce o viene rilevata (acquistata), il ricavato viene spartito fra gli azionisti. Quindi le azioni riflettono i punti di vista degli investitori sul probabile futuro delle quote di pagamento e della crescita del capitale dell'azienda; questo valore è quantificato dal prezzo di acquisto o vendita delle azioni.

Vi sono poi un insieme di mercati in cui vengono beni di vario tipo vengono comprati e venduti. Per adeguarsi ai mercati sempre più sofisticati, sono stati introdotti contratti molto più complessi del semplice compra/vendi. Le cosiddette **derivative finanziarie** o **sicurezze derivative**, **prodotti derivativi**, **richieste contingenti** o semplicemente **derivative**, forniscono agli investitori una grande gamma di opportunità di ritagliare le loro contrattazioni in base alle loro necessità di investimento. Questo libro spiega parte della teoria finanziaria ed i modelli che sono stati sviluppati per analizzare i derivativi, una teoria necessariamente di carattere matematico (gli specialisti impiegati ora dalle maggiori istituzioni finanziarie per lavorare in questo settore sono chiamati 'rocket sceintists'!). Il primo passo è familiarizzare con il gergo della finanza. Iniziamo con l'esempio di un'opzione, che è uno degli esempi più comuni di sicurezza derivativa.

1.2 Cosa è un'Opzione?

Il più semplice tipo di opzione in finanza, quella che viene definita tale dagli europei (**European call option**) è un contratto con le seguenti condizioni:

- Ad un momento prestabilito nel futuro, noto come **data di scadenza**

(**expiry date** o **expiration date**), il possessore dell' opzione *può*

- acquistare un bene prestabilito, noto come **bene sottostante** (**underlying asset**) o più brevemente **sottostante** (**underlying**), per un
- ammontare prestabilito, noto come il **przzo di esercizio** (**exercise price** o **strike price**).

Il termine 'può' in questa descrizione implica che il possessore dell'opzione, questo contratto è un *diritto* e non un'*obbligazione*. L'altro contrattuario noto come **scrittore** (**writer**), ha una potenziale obbligazione: *deve* vendere il bene, se il possessore decide di comprarlo. Dato che l'opzione conferisce a chi lo possiede un diritto senza obbligazioni ha un molto valore. In aggiunta deve essere pagato nel momento in cui il contratto viene aperto. Lo scrittore dell'opzione deve essere compensato per l'obbligazione che si è assunto.

Due dei nostri più importanti interessi in questo libro sono:

- Quanto si potrebbe pagare per questo diritto, cioè quanto vale un opzione?
- Come può lo scrittore minimizzare i rischi associati all'obbligazione?

1.2.1 Un semplice esempio: Un Opzione di Call

Quanto vale la seguente opzione ora? La data di oggi è 22 Agosto 1995.

- Il 14 Aprile 1996 il possessore dell'opzione *può*
- acquisire un'azione XYZ al prezzo di $250p$.

Per avere un'idea intuitiva del prezzo che può avere questa opzione immaginiamo due situazioni che potrebbero verificarsi alla data di scadenza 14 Aprile 1996, quasi otto mesi nel futuro.

Se il prezzo dell'azione XYZ è $270p$ il tale data, allora il possessore dell'opzione sarebbe in grado di acquisirla solo per $250p$. Quest'azione che è chiamata esercizio dell'opzione, ha un rendimento immediato di $20p$. Vale a dire che può acquisire l'azione per $250p$ e venderla immediatamente per $270p$:

$$270p - 250p = 20p \quad \text{guadagno}$$

D'altra parte, se il prezzo dell'azione XYZ è solo $230p$ alla scadenza, allora non sarebbe ragionevole esercitare l'opzione. Perché comprare un bene a $250p$ quando potrebbe essere comprato per $230p$ altrove?

Se l'azione assume valore $230p$ o $270p$ il 14 Aprile 1996, con la stessa probabilità, allora il profitto atteso è

$$\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 20 = 10p$$

Trascuriamo le rate d'interesse, per il momento, sembra ragionevole che l'ordine di grandezza del valore dell'opzione sia $10p$.

Sicuramente questa è una semplificazione della valutazione di un'opzione, ma supponiamo che il possessore abbia pagato veramente $10p$ per l'opzione. Se il prezzo dell'azione aumenta a $270p$, alla scadenza, ha un profitto che viene calcolato nel modo seguente:

guadagno all'esercizio	=	$20p$
costo opzione	=	$-10p$
profitto netto	=	$10p$

Il profitto netto di $10p$ è del 100% dell'anticipo PREMIUM investimento. L'inconveniente di questa speculazione è che se il valore dell'azione è minore di $250p$ alla scadenza, l'investitore ha una perdita del 100% sui $10p$ anticipati. Se l'investitore avesse acquisito l'azione a $250p$ il 25 Agosto del 1995, la corrispettivo guadagno o perdita di $20p$ sarebbe stato solo l' $\pm 8\%$ dell'investimento originale. Quindi i prezzi delle Opzioni sono molto sensibili alle variazioni di prezzo del bene di base. Questo fenomeno è noto come **rapporto di indebitamento (gearing)**.

Dall'esempio si nota che maggiore è il prezzo dell'azione di 14 Aprile del 1996, maggiore è il profitto. Sfortunatamente non si conosce il prezzo dell'azione in anticipo, ma sappiamo che più il prezzo attuale è alto più sarà verosimilmente alto il prezzo futuro. Quindi il prezzo di una call option oggi dipende dal prezzo attuale dell'azione. Similmente la dipendenza del valore della call option dal valore dell'esercizio è ovvia: più è basso il prezzo dell'esercizio, meno deve essere pagato a esercizio, quindi il valore dell'opzione

sarà maggiore.

Implicito in tutto ciò è che l'opzione deve scadere dopo un tempo significativo. Appena prima che l'opzione scada, c'è poco tempo prima che il prezzo del bene cambi. In quel caso il prezzo alla scadenza è noto con un grado di certezza abbastanza alto. Possiamo concludere che anche il prezzo della call option è funzione del tempo di scadenza.

Più tardi vedremo come il prezzo dell'opzione dipenda da una proprietà della 'casualità' del prezzo del bene detta volatilità. Più è alta la volatilità e più è seghettato il grafico del prezzo del bene in funzione del tempo. Questo influenza la distribuzione del prezzo del bene alla scadenza e quindi il ritorno atteso dall'opzione. Il valore di una call option deve quindi dipendere dalla volatilità. In fine il prezzo di un'opzione deve dipendere dalle rate d'interesse bancarie predominanti; le opzioni vengono pagate in anticipo, all'apertura del contratto, mentre il guadagno, se c'è, viene solo alla fine. Il prezzo dell'opzione deve riflettere il guadagno che si sarebbe potuto fare investendo in banca.


1.2.2 Le Opzione di Put

L'opzione per *comprare* un bene, discusso sopra, è chiamato **call** option.

Il diritto di *vendere* un bene è noto come **put** option ed ha proprietà di guadagno che sono opposte a quelle della call option. Una put option permette al possessore di vendere il bene in una certa data ad un prezzo prestabilito. Lo scrittore è quindi obbligato a comprare il bene. Il possessore della call option è interessato all'aumento del prezzo del bene, maggiore è il prezzo alla data di scadenza, maggiore è il suo guadagno. Il possessore di una put option, invece, è interessato all'abbassamento del prezzo del bene. Il valore di una put option aumenta con il prezzo dell'esercizio, dato che con un prezzo di esercizio maggiore viene ricevuto di più allo scadere del contratto.

1.3 Leggere la Stampa Finanziaria

Armati con il gergo finanziario, call, put, date di scadenza ecc, possiamo analizzare la pagina delle opzioni nei giornali finanziari. Gli esempi riportati sono stati ripresi dal *Finantial Press* del Giovedì 4 Febbraio 1993

Nella figura  è mostrata la sezione delle opzioni vendute del *Finantial Times*. La tabella mostra i prezzi di alcune opzioni scambiate nella London Ineternational Finantial Futures and Option Exchange (LIFFE). La tabella mette in lista i prezzi meno quotati nel giorno prima per un numero alto di opzioni, sia i call che i put, con una gamma di przzi di scambio e date di scdenza. La maggior parte di questi esempi sono esempi su singole azioni, ma alla fine della terza colonna, si possono vedere opzioni sull'indice FT-SE, che è una media aritmetica pesata di 100 azioni quotate nella borsa di Londra.

Vediamo prima sui prezzi delle quote delle opzioni della Rolls-Royce, che si trova nella terza colonna al numero 134 tra parentesi. Questo è il prezzo di chiusura, in penny, di azioni della Rolls-Royce nel giorno precedente. Alla destra della R.Royce/(134) vi sono due numeri 130 e 140: questi sono due prezzi di esercizio, sempre in penny. Notare che per le opzioni di azioni, il *Finantial Times* mostra solo quei prezzi di esercizio in ciascun lato del prezzo di chiusura. Esistono molti altri prezzi di esercizio (a intervalli di 10p in questo caso) ma non sono riportati nel *Finantial Times* per questioni di spazio.

Esaminiamo i sei numeri alla destra di 130. I primi tre (11,15,19) sono i prezzi delle opzioni di chiamata, con diverse date di scadenza, i successivi tre (9,14,17) sono i prezzi delle opzioni put. La data di scadenza di ciascun'opzione può essere trovata all'inizio delle rispettive colonne. Qui si vede che le opzioni della Rolls-Royce hanno date di scadenza a Maggio, Giugno e Settembre, ad un'ora precisa alle 18:00 del terzo Giovedì del mese corrispondente (le vendite terminano poco prima). I prezzi delle opzioni sono quotati solo su uno scambio per un piccolo numero di date di scadenza molto piccolo e solo per prezzi di esercizio a intervalli discreti (qui ..., 130, 140,...). Per le opzioni su azioni vendute da LIFFE le date di scadenza sono

fornite a intervalli di tre mesi. Quando è cerato l'opzione più datata ha una durata di vita di nove mesi. Successivamente nell'anno, vengono create le opzioni della serie di Dicembre della Rolls-Royce.

Dato che un'opzione di call permette al possessore di pagare il prezzo dell'esercizio per avere il bene, si può dire che opzioni di call con prezzo di esercizio di $140p$ è meno costoso rispetto a quelli con prezzo di esercizio di $130p$. Questo è perché si deve pagare di più per l'esercizio sull'azione. Per i put vale il contrario: il possessore di un put da $140p$ può rilasciare di più vendendo la sua azione di un possessore con un put da $130p$, quindi il primo vale di più.

Vediamo le opzioni sull'indice delle opzioni call di *FE-SE*. (Anche se l'indice è solo un numero, al contratto viene dato un prezzo nominale in pound equivalente a 10 volte il valore *FE-SE*.) I prezzi degli esercizi sono quotati a intervalli di 50 da 2650 a 3000 e le date di scadenza a intervalli mensili. Dato che tali opzioni scadono il terzo venerdì del mese, le opzioni di Febbraio hanno sono 10 giorni rimasti. Nella figura [.....] i valori delle opzioni call di Febbraio in funzione dei prezzi di esercizio.

I valori di chiusura dell'indice *FT-SE* il 3 Febbraio del 1993 era 2872. Supponiamo che l'indice *FT-SE* abbia esattamente lo stesso valore alla scadenza il 3 Febbraio del 1993. Allora il valore di ciascun contratto di opzione di call alla scadenza sarebbe una funzione di 'rialzo' che aumenta i valori:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}10 \times (2872 - \text{exercise value}) & \text{per valori di esercizio} \leq 2872 \\ 0 & \text{per valori di esercizio} \geq 2872 \end{array}$$

Nella figura [.....] è rappresentata tale funzione di rialzo. Da notare che i punti rappresentanti i dati sono vicini, ma sopra la funzione di rialzo. La differenza tra i due è dovuto all'indeterminazione del valore futuro dell'indice: è molto improbabile che l'indice sia a 2872 alla scadenza delle opzioni di Febbraio. Torneremo all'esempio dell'indice delle opzioni call di *FE-SE* nel Capitolo 3.

Infine, notiamo che per ciascun tipo di opzione c'è solo un prezzo riportato

nella tabella. In realtà l'opzione non poteva essere comprato e venduto allo stesso prezzo dato che chi fa il mercato deve guadagnarsi da vivere. Quindi ci sono due prezzi per l'opzione. L'investitore paga il prezzo di offerta (ask price¹) e il venditore per il prezzo di domanda (bid price²). Il prezzo di domanda è minore del prezzo di offerta. I prezzi riportati nei giornali di solito sono una media tra i due. La differenza tra i due prezzi è nota come bid-ask spread.

Considerazione Tecnica: lo scambio di opzioni

Prima del 1973 tutte i contratti di opzioni erano ciò che ora viene chiamato 'over-the-counter' (OTC) (fuoriborsa). Vale a dire erano negoziati singolarmente mediante broker per conto di due clienti, l'acquirente e il venditore. Il mercato con gli scambi ufficiali ha avuto inizio nel 1973 nella Board of Options di Chicago (CBOE), con inizialmente scambi solo in opzioni di call di alcune delle azioni più scambiate. L'elencazione delle opzioni è stato seguito da una competizione sempre maggiore, il costo di impostare un contratto è sceso significativamente.

Ora le opzioni vengono scambiate in tutte le maggiori borse del mondo. Non sono più ristrette alle opzioni di azioni ma anche opzioni di indici, futures, obbligazioni governative, beni, valute ecc. Il mercato dell' OTC esiste ancora, e le opzioni sono scritte da istituzioni per venire incontro ai bisogni di clienti. Qui è dove vengono scritti contratti di opzioni esotici; vengono quotati in borsa molto raramente.

Quando viene iniziata la contrattazione di un'opzione, devono essere presenti due lati per l'accordo. Consideriamo un'opzione di call. Un lato della contrattazione è l'acquirente, colui che ha il diritto di esercitare l'opzione. L'altro lato c'è colui che deve, se necessario, recapitare il bene. L'ultimo è chiamato lo **scrittore** dell'opzione.

Molte opzioni vengono registrate e depositate tramite la camera di compensazione (**clearing house**). Questo corpo centrale è anche responsabile per la raccolta dei depositi di garanzia (**margin**) degli scrittori delle opzioni.

¹L'Ask price è il prezzo più basso che il venditore è disposto a accettare

²Il Bid price è il prezzo più alto che l'acquirente è disposto a spendere

Questi depositi sono un'ammontare di denaro (o equivalente) che è tenuto della camera per conto dello scrittore come garanzia della sua capacità di mantenere le sue obbligazioni nel caso in cui il prezzo del bene si muovesse a suo sfavore.

Lo scambio delle più semplici opzioni put e call (colloquialmente note come opzioni **vanilla**, perché sono onnipresenti) è ora così vasto che, in alcuni mercati, può avere un valore in eccesso rispetto allo scambio del bene sottostante. Per dare un'idea della grandezza³ mercati delle derivate (inclusi i futures), c'è una stima di 10,000 miliardi \$ di investimenti in derivate in tutto il mondo (Questa è un'approssimazione molto grossolana per eccesso). Nel tardo 1992, Citicorp aveva un rischio stimato equivalente a un contatto notazionale del valore di 1426 miliardi \$. Dato che il numero e i tipi di prodotti derivati sono aumentati, c'è stata una corrispondente crescita nell'interesse per pricing (determinazione del prezzo) come soggetto di studio per la ricerca sia accademica che aziendale. Questo è vero specialmente oggi giorno dato che vengono creati tipi di opzioni sempre più esotiche.

1.4 A cosa servono le opzioni?

Le opzioni hanno due usi principali: speculazione e manutenzione. Un investitore che crede che il prezzo di un bene XYZ sta per aumentare, può comprare alcune azioni di quella azienda. Se ha ragione, fa soldi, se non ha ragione perde soldi. L'investitore sta speculando. Come abbiamo notato prima, se il prezzo di un'azione sale da $250p$ a $270p$ ha un profitto di $20p$ o dell'8%. Se scende a $230p$ ha una perdita di $20p$ o dell'8%. Alternativamente, supponiamo che pensi che il prezzo dell'azione stia per aumentare nei successivi mesi e che compri una call con un prezzo di esercizio di $250p$ e data di scadenza di tre mesi. Abbiamo visto che se tale opzione costa $10p$ allora il profitto o perdita è amplificato al 100%. Le opzioni possono essere un modo facile di mettere a grande rischio un portafoglio.

D'altra parte se un investitore pensa che le azioni di XYZ si abbasseran-

³Questi valori sono presi da un'analisi del mercato delle derivate nel *Financial Times* del 8 Dicembre 1992

no, al contrario, può vendere azioni o comprare put. Se specula vendendo azioni che non gli appartengono (che per alcune circostanze è legale in molti mercati) si dice che sta vendendo **short** e guadagnerà se le azioni XYZ si abbassano. (L'opposto di una vendita short è una vendita **long**.) Si applicano le stesse argomentazioni per quanto riguarda le variazioni di prezzi sia ai put che ai call, e se vuole speculare può decidere di comprare put invece di vendere il bene. Comunque, supponiamo che l'investitore possiede le azioni del bene XYZ come un investimento a lungo termine. In questo caso vorrebbe potersi assicurare da cadute di prezzo temporanee del prezzo delle azioni, mentre è riluttante a vendere a liquidare le sue azioni XYZ, solo per ricomprarle a un prezzo più alto, se le sue valutazioni dei prezzi delle azioni erano errate, e avendo avuto delle spese di transazione nei due affari.

1.5 Altri tipi di Opzioni

Le opzioni Call e Put costituiscono solo una piccola parte dei prodotti derivati disponibili. La nostra descrizione precedente di un contratto di opzione riguardava un'opzione Europea, ma oggi giorno la maggior parte delle opzioni sono quelle note come opzioni Americane. La classificazione Europea/Americana non ha niente a che vedere con il continente di origine ma si riferisce a un particolare tecnico nel contratto opzione. Un'**opzione Americana** può essere esercitata in *qualunque momento* prima della scadenza. Le opzioni descritte sopra, che possono essere esercitate solo al momento della scadenza, sono dette **Europee**. Per il matematico, le opzioni Americane, sono più interessanti, dato che possono essere interpretate come un problema con condizioni al contorno - questo argomento verrà trattato nel capitolo 7 e 9. Una caratteristica peculiare della opzioni Americane è che non è sufficiente assegnare un valore alla stessa ma bisogna determinare *il miglior momento per esercitarla*. Vedremo che il 'miglior' momento per esercitare non è soggettivo, ma può essere determinato in modo naturale e sistematico.

Altri tipi di opzioni che descriviamo in questo libro includono le cosiddette

opzioni esotiche o dipendenti dal percorso. Queste opzioni hanno valori che dipendono dal prezzo di un bene, non solo del suo valore a esercizio. Un esempio è un'opzione per comprare un bene per la media aritmetica del valore del bene nel mese prima della scadenza. Un investitore potrebbe voler tale opzione per proteggere le vendite di un bene diciamo che avvengono in modo continuo durante tale mese. Un altro esempio potrebbe essere una raffineria di olio che compra olio al tasso di cambio a vista (spot rate), che può variare, ma vuole vendere il prodotto finito a un prezzo costante. Una volta che l'idea della dipendenza dalla storia è accettata è un piccolo passo immaginare prezzi di opzioni dipendenti dalla media geometrica del prezzo del bene, dal massimo o dal minimo prezzo del bene ecc. Questo ci porta alla questione di come calcolare la media aritmetica, diciamo di un bene che può essere quotato ogni 30 secondi; per un capitale molto liquido questo darebbe circa 250,000 prezzi all'anno. In pratica il contratto di opzione potrebbe specificare che la media aritmetica è la media dei prezzi di chiusura ogni giorno commerciale, di cui ce ne sono solo 250 all'anno. La discretizzazione dei dati altera i valori delle opzioni se il campionamento avviene in diversi momenti?

Mostriamo come mettere le seguenti opzioni in un quadro unico:

- opzioni barriera (l'opzione può essere creata o svalutarsi se il bene sottostante assume un valore stabilito prima che scada.)
- opzioni Asiatiche (il prezzo dipende da qualche tipo di media)
- opzioni lookback (il prezzo dipende dal massimo o minimo del prezzo del bene)

Tratteremo le versioni Europea e Americana delle suddette, come anche del campionamento continuo e discreto del fattore dipendente dalla storia.

1.6 Contratti Forward e Futures

A parte le opzioni ci occuperemo anche di altre richieste contingenti comuni, contratti Forward e Futures. Un **contratto Forward** è un accordo fra due

parti, uno dei quali contratta per comprare dall'alto un bene specificato ad un prezzo specificato, noto come **prezzo forward**, in una data specificata nel futuro, la **data di consegna o di maturazione**. Questo contratto ha delle somiglianze con un contratto opzione, se pensiamo al prezzo forward come equivalente del prezzo di esercizio. Comunque, ciò che manca è l'elemento di scelta: il bene *deve* essere consegnato e pagato. Un contratto forward differisce da un contratto opzione nel fatto che non vi sono cessioni di soldi finché avviene la consegna. Mentre il sovrapprezzo per un'opzione viene pagato in anticipo. Quindi non costa nulla sottoscrivere un contratto forward. Un'altra differenza con il contratto opzione è che il prezzo del contratto forward a uno dei tanti prezzi stabiliti da ogni contratto sullo stesso bene e con la stessa scadenza. Viene invece determinato all'inizio, individualmente per ogni contratto.

Un **contratto future** è un sostanza un contratto forward, ma con delle modifiche tecniche. Mentre un contratto forward può insediarsi tra due parti, i futures sono commerciati in uno scambio specifica certe caratteristiche standard del contratto, come la data di consegna e dimensione del contratto. Una complicazione ulteriore sono i requisiti marginali, un sistema designato a proteggere entrambe le parti. Mentre il guadagno o la perdita di un contratto forward viene effettuato solo alla fine dello stesso, il valore di un contratto futures è valutato ogni giorno, e lo scambio in valore viene pagato da una delle due parti all'altra, in modo tale che il guadagno netto o perdita viene pagato gradualmente durante il corso di vita del contratto. Nonostante queste differenze, si può far vedere che sotto alcune assunzioni non troppo restrittive il prezzo futures è quasi uguale al prezzo forward. Quando i tassi d'interesse sono prevedibili, i due coincidono esattamente.

Dato che ne i forward, ne i futures contengono elementi di scelta (esercitare o non esercitare) che è inerente a un'opzione, sono più facili di valutare. Comunque, dato che non sono importanti per lo sviluppo del nostro soggetto, pre il momento non li trattiamo.

1.6.1 Tassi d'interesse e Valore Attuale

Per quasi la totalità di questo libro assumeremo che i tassi d'interesse dei depositi bancari a breve termine siano note e che siano in funzione del tempo, non necessariamente costanti. Questa non è un'assunzione irraggiungibile nel valutare delle opzioni, dato che una tipica opzione di equità ha un periodo di vita di circa nove mesi. Durante tale relativamente breve periodo di tempo, i tassi d'interesse possono variare, ma di solito non abbastanza da influenzare i prezzi delle opzioni in modo significativo. (Una variazione del tasso d'interesse dall'8%p.a. al 10%p.a. tipicamente decrementa il valore di un'opzione di nove mesi di circa 2%.) Per prodotti con un periodo di vita elevato, come le obbligazioni, che possono durare anche 10 o 20 anni, l'assunzione di tassi d'interesse noti o costanti non sussiste.

Per valutare opzioni il concetto più importante riguardante i tassi d'interesse è il **valore attuale o lo sconto**. Uno si deve chiedere:

- Quanto pagherei *ora* per ricevere un ammontare garantito E in un tempo futuro T ?

Se assumiamo che i tassi d'interesse siano costanti, la soluzione si trova scontando il valore futuro, E , usando un interesse composto in modo continuo. Con un tasso d'interesse costante, r , ammontare di danaro in banca $M(t)$ cresce in modo esponenziale secondo

$$\frac{dM}{M} = r dt \quad (1.1)$$

La soluzione è semplicemente

$$M = ce^{rt} \quad (1.2)$$

dove c è la costante di integrazione. Dato che $M = E$ a $t = T$ il valore di un certo guadagno è

$$M = Ee^{-r(T-t)} \quad (1.3)$$

Se i tassi d'interesse sono una nota funzione del tempo $r(t)$ allora [?] può essere banalmente modificata in

$$M = Ee^{-\int_t^T r(s)ds} \quad (1.4)$$

Capitolo 2

Cammini Casuali del prezzo dei beni

2.1 Introduzione

Dalla metà degli anni 80 per i lettori di giornali o per i telespettatori è diventato impossibile non conoscere la natura del financial time series. Il valore dei maggiori indici (Financial Times Stock Exchange 100 FT-SE, nel Regno Unito, l'S&P 500 e il Dow Jones negli Stati Uniti, il Nikkei Dow in Giappone) sono citati frequentemente. Grafici di questi indici appaiono nei telegiornali durante la giornata. Come esempio estremo del financial time series, la figura mostra i prezzi di chiusura giornalieri del FE-SE nell'arco di sei mesi prima e dopo il crollo della borsa del 1987. Per molti questi 'mountain range' che mostrano le variazioni del valore di un bene o indice al variare del tempo sono eccellenti esempi di 'cammini casuali'.

Bisogna sottolineare il fatto che questo libro non tratta la predizione dei prezzi di beni. La storia passata del valore di un bene come financial time series, serve per essere esaminato, ma non può permettere di prevedere la prossima mossa che farà il bene. Ciò non significa che non ci dice nulla. Sappiamo dalle nostre esaminazioni della storia del bene, quali sono i probabili salti, la media e la varianza ed in generale qual'è la distribuzione



Figura 2.1: FE-SE prezzi di chiusura dall'Aprile del 1987 all'Aprile del 1988

probabile dei futuri prezzi del bene. Queste qualità devono essere determinate da un'analisi statistica dei dati storici. Dato che questo non è un testo statistico, li assumiamo per noti, anche se è fornita una breve descrizione alla fine della prossima sezione.

Quasi tutti i modelli di opzioni sono fondati su un modello semplice per i movimenti del prezzo del bene, con i parametri derivati, per esempio, dai dati storici o di mercato. Questo capitolo è dedicato alla discussione di tale modello.

2.2 Un semplice modello per i prezzi di un bene

Spesso si afferma che i prezzi di un bene devono variare casualmente come conseguenza delle **efficienti ipotesi di mercato**. L'ipotesi può essere presentata in diverse forme, con diverse assunzioni restrittive, ma in sostanza tutte si basano sui seguenti due punti:

- La storia passata si riflette totalmente sul prezzo attuale, che non

contiene nessuna informazione aggiuntiva;

- I mercati rispondono immediatamente a qualsiasi nuova informazione su di un bene.

Quindi modellare il prezzo di un bene significa modellare l'arrivo di una nuova informazione che influenza il prezzo di un bene. Con le due assunzioni, cambiamenti inaspettati nel prezzo di un bene sono un **Processo di Markov**.

Prima di tutto notiamo che il cambiamento *assoluto* nel prezzo di un bene non è di per se una quantità utile: un cambiamento di 1p è molto più significativo quando il prezzo del bene è 20p che quando è 200p. Invece con ciascun cambiamento nel prezzo viene associato un valore di ritorno, definito come la variazione di prezzo diviso per il valore originario. Questa misura relativa del cambiamento è chiaramente un indice migliore delle sue proporzioni.

Ora supponiamo che al tempo t il prezzo del bene sia S e consideriamo un piccolo intervallo successivo dt durante il quale S varia di $S + dS$ come abbozzato in figura. Come possiamo modellare il valore di ritorno corrispondente, dS/S ? Il modello più comune decompone il ritorno in due parti. Una è predicibile, un ritorno deterministico e anticipato, equivalente al ritorno di soldi investiti in una banca senza rischio. Il suo contributo al ritorno dS/S è

$$\mu dt \quad (2.1)$$

dove μ è una misura della media del tasso di crescita del prezzo del bene, noto anche come derivato. In modelli semplici μ è considerato costante. In modelli più complessi, per tassi di scambio, ad esempio, μ può essere funzione di S e t .

Il secondo contributo a dS/S modella il cambiamento casuale nel prezzo del bene in risposta a cause esterne con una notizia inaspettata. Ciò è rappresentato da un campione casuale ottenuto da una distribuzione normale con media zero, al quale viene sommato il termine

$$\sigma dX \quad (2.2)$$

a dS/S . Qui σ è un numero chiamato **volatilità**, che significa la deviazione standard del ritorno. La quantità dX è il campione preso dalla distribuzione normale, che verrà discusso più avanti.

Mettendo queste componenti insieme otteniamo un'**equazione differenziale stocastica**

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \quad (2.3)$$

che è la rappresentazione matematica per il nostro piccolo modello per rappresentare i prezzi di beni.

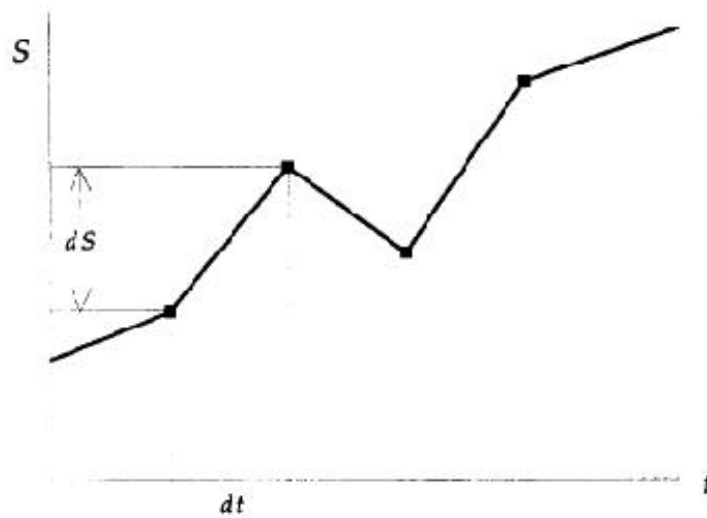


Figura 2.2: Dettaglio di un cammino discrteto

L'unico simbolo in [?] il cui ruolo non è ancora stato chiarificato è dX . Se dovessimo eliminare tutti i termini che hanno a che fare con dX , assegnando $\sigma = 0$ avremo l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \quad (2.4)$$

oppure

$$\frac{dS}{S} = \mu S \quad (2.5)$$

Quando μ è costante si risolve l'equazione esattamente: produce una crescita esponenziale del valore del bene i.e.

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}, \quad (2.6)$$

dove S_0 è il valore del bene a tempo $t = t_0$. Quindi se $\sigma = 0$ il prezzo del bene è totalmente deterministico e possiamo predire il prezzo futuro con certezza.

Il termine dX , che contiene la casualità che è certamente una caratteristica dei prezzi del bene, noto come un **Processo di Weiner**. Ha le seguenti proprietà:

- dX è una variabile casuale estratta da una distribuzione normale;
- la media di dX è zero;
- la varianza di dX è dt

Un modo per scrivere ciò è

$$dX = \phi \sqrt{dt} \quad (2.7)$$

dove ϕ è la variabile casuale scelta di una distribuzione normale. La distribuzione normale standardizzata ha media zero, varianza unitaria e una probability density function data da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \quad (2.8)$$

per $-\infty < \phi < \infty$. Se definiamo l'operatore di aspettativa ϵ come

$$\epsilon[F(.)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi) e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi \quad (2.9)$$

per una funzione F , allora

$$\epsilon[\phi] = 0 \quad (2.10)$$

e

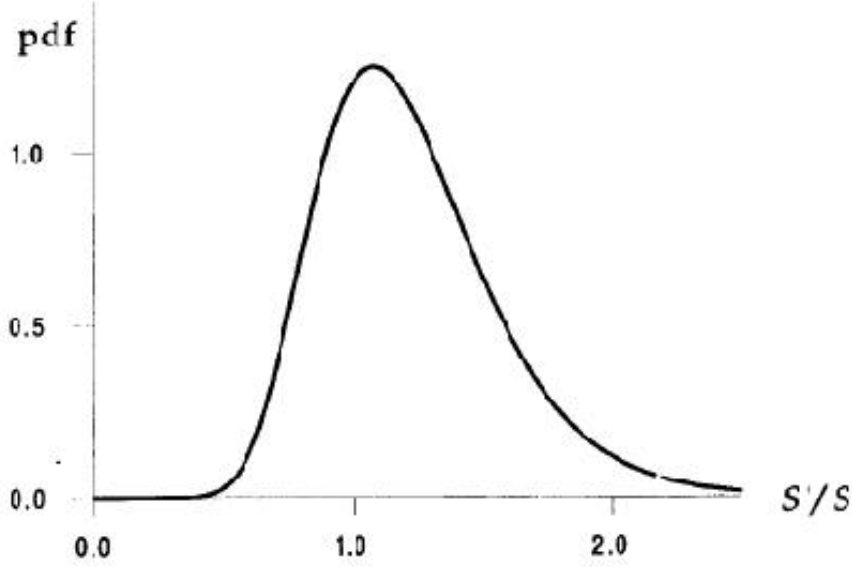
$$\epsilon[\phi^2] = 1 \quad (2.11)$$

La ragione per cui dX è scalato con \sqrt{dt} è che qualunque altra scelta della magnitudine di dX condurrebbe a un problema che è o senza senso o banale, quando consideriamo cosa succede al limite $dt \rightarrow 0$ dove siamo interessati. Abbiamo dato una giustificazione economica del modello [?]. Una giustificazione più pratica è che va bene con la serie di dati a tempo reale, almeno con le equità e gli indici. (Non è molto concordante con le valute, specialmente a lungo termine.) Queste sono alcune discrepanze; per esempio dati reali sembrerebbero avere una maggior probabilità di più grandi variazioni rispetto alle predizioni del modello. Complessivamente, però ha superato in modo eccellente la prova del tempo e può essere usato come punto di partenza per modelli più sofisticati.

L'equazione [?] è un modello particolare di **cammino casuale**. Non può essere risolto per ottenere un percorso deterministico del prezzo di un'azione, ma può dare informazioni importanti e interessanti riguardanti il comportamento di S nel senso probabilistico. Supponiamo che la data di oggi sia t_0 e che il prezzo di oggi del bene sia S_0 . Se il prezzo in una data successiva t' , diciamo dopo sei mesi, è S' , allora S' sarà distribuito intorno a S_0 con una p.d.f. della forma della figura.

Il prezzo futuro del bene S' è più probabilmente vicino a S_0 e meno probabilmente lontano. Più t' è lontano da t_0 e più è ampia la distribuzione. Se S segue il cammino casuale dato da [?] allora la p.d.f. è rappresentata da questa curva a forma di campana distorta che è la distribuzione lognormale e il cammino casuale [?] è dato cammino casuale lognormale.

Possiamo pensare a [?] come una ricetta per generare serie temporali- ogni volta che la serie viene iniziata il cammino risultante è diverso. Ogni cammino è chiamato **realizzazione** del cammino casuale. La ricetta funziona nel seguente modo. Supponiamo, come esempio, che il prezzo sia \$1 e abbiamo $\mu = 1, \sigma = 0.2$ con $dt = 1/250$ (un giorno come proporzione di 250 giorni commerciali all'anno). Scegliamo ora un numero a caso un numero a caso dalla distribuzione normale con media zero e varianza $1/250$; questo è dX . Supponiamo di scegliere $dX = 0.08352....$ Ora svolgiamo i calcoli in [?] per ottenere dS

Figura 2.3: La probability density function di S/S'

$$dS = 0.2 \times \$1.0 \times 0.08352... + 1.0 \times \$1.0 \times \frac{1}{250} = \$0.020704...$$

Aggiungi questo valore di dS al valore originale di S per ottenere il nuovo valore di S dopo un passo $S + dS = \$1.020704...$. Iterando i passi suddetti con la nuova S e un nuovo numero casuale. Tale processo genera una serie temporale di numeri casuali che somiglia a serie prese dalla borsa, come quella in figura [?].

Prima cosa consideriamo brevemente alcune proprietà di [?]. Questa non si riferisce a storia passata del prezzo del bene. Questa indipendenza del passato è detta **Proprietà di Markov**. Seconda cosa, se consideriamo la media di dS :

$$\epsilon[dS] = \epsilon[\sigma S dX + \mu S dt] = \mu S dt \quad (2.12)$$

dato che $\epsilon[\sigma dX] = 0$. In media, il prossimo valore di S è maggiore del vecchio di una quantità di $\mu S dt$.

Terzo, la varianza di dS è

$$\text{Var}[dS] = \epsilon[dS^2] - \epsilon[dS]^2 = \epsilon[\sigma^2 S^2 dX^2] = \sigma^2 S^2 dt. \quad (2.13)$$

La radice della varianza è la deviazione standard, che è quindi proporzionale a σ .

Se confrontiamo due cammini casuali con diversi valori per i parametri μ e σ , vediamo che quello con il valore maggiore di μ , solitamente aumenta più rapidamente e quello con un maggiore valore di σ appare più variato. Tipicamente, per borse e indici il valore di σ è in un intervallo di $[0.05 - 0.4]$ (le unità di σ^2 sono annui). Le azioni governative sono esempi di beni con bassa volatilità, mentre i ‘penny share’ e le azioni di aziende di alta tecnologia sono molto volatili. La volatilità è spesso quotata come una percentuale, in modo che $\sigma = 0.2$ è detta volatilità 20%.

Nella prossima sezione impareremo come manipolare funzioni di variabili casuali.

2.3 Lemma di Itô

Nella vita reale i prezzi dei beni sono quotati a intervalli discreti di tempo. Quindi vi è un limite inferiore per il passo temporale base dt del nostro cammino casuale [?]. Se nella pratica usassimo questo passo temporale base per valutare i beni, ci troveremo sommersi da un’immane quantità di dati. Invece, impostiamo il nostro modello matematico in un limite temporale *continuo* $dt \rightarrow 0$; è molto più efficiente risolvere le equazioni differenziali risultanti che valutare opzioni con simulazioni dirette di un cammino casuale su una scala temporale del mondo reale. Per realizzare ciò, serve un marchingegno tecnico che ci permetta di maneggiare il termine casuale dX come $dt \rightarrow 0$, questo è il contenuto di questa sezione.

Il lemma di Itô è il risultato più importante, che ci serve, per quanto riguarda le manipolazioni di valori casuali. Il lemma sta alle funzioni di variabili casuali come il teorema di Taylor sta alle funzioni di variabili deterministiche. Il nostro approccio euristico al lemma di Itô è basato sull’espansione delle serie di Taylor.

Prima di giungere al lemma di Itô, abbiamo bisogno di un risultato che non

dimostreremo. Il risultato è che con probabilità 1,

$$dX^2 \rightarrow dt \text{ è come } dt \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Quindi il più piccolo diventa dt più dX^2 si avvicina a dt . Supponiamo che $f(S)$ sia una funzione smooth di S e dimentichiamo per un attimo che S è stocastica. Se variamo S di una quantità piccola dS allora chiaramente varia anche f di un piccolo ammontare, se non siamo troppo vicini a singolarità di f . Dall'espansione della serie di Taylor possiamo scrivere

$$df = \frac{df}{dS}dS + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dS^2}dS^2 + \dots, \quad (2.15)$$

dove i puntini denotano un resto che è minore dei termini precedenti. Ricordiamoci che dS è dato dall'equazione [?]. Qui dS è semplicemente un numero, anche se casuale, quindi quadruplicandolo otteniamo:

$$\begin{aligned} dS^2 &= (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 dX^2 + 2\sigma\mu S^2 dt dX + \mu^2 S^2 dt^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esaminiamo ora l'ordine di grandezza di ciascun termine in [?]. Dato che

$$dX = O(\sqrt{dt}) \quad (2.17)$$

il primo termine cresce al decrescere di dt e domina gli altri due. Quindi

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX^2 + \dots, \quad (2.18)$$

Dato che $dX^2 \rightarrow dt$

$$dS^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt. \quad (2.19)$$

Sostituiamo questo in [?] e otteniamo quei termini che sono grandi almeno quanto $O(dt)$. Usando anche la definizione di dS da [?], troviamo

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \mu S \frac{df}{dS} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Questo è il lemma di Itô che mette in relazione il piccolo cambiamento nella funzione di una variabile casuale in un piccolo cambiamento della stessa variabile.

Dato che l'ordine di grandezza di dX è $O(\sqrt{dt})$, la derivata seconda di f rispetto a S appare nell'espressione per df all'ordine dt . I termini di ordine dt giocano un ruolo importante nella nostra successiva analisi e qualunque altra scelta per l'ordine dX non porterebbe a nessun risultato interessante. Si può dimostrare che nessun altro ordine di grandezza per dX porta a delle proprietà non realistiche per il cammino casuale al limite $dt \rightarrow 0$; se $dX \gg \sqrt{dt}$ la variabile casuale va subito a 0 o ∞ e se $dX \ll \sqrt{dt}$ la componente casuale del cammino sparisce nel limite $dt \rightarrow 0$.

Osserviamo che [?] ha una componente casuale proporzionale a dX e una componente deterministica proporzionale a dt . In ciò si vede una somiglianza con l'equazione [?]. L'equazione [?] è anche una ricetta per determinare il comportamento di f , e f segue il cammino casuale.

Il risultato [?] può essere ulteriormente generalizzato considerando una funzione di un termine variabile S e del tempo, $f(S, t)$. Questo lega l'uso della derivata parziale dato che ora sono due variabili indipendenti, S e t . Possiamo espandere $f(S + dS, t + dt)$ con una serie di Taylor di (S, t) per ottenere

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \dots \quad (2.21)$$

Usando l'espressione [?] per dS e [?] per dX^2 si ottiene una nuova espressione per df

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) dt \quad (2.22)$$

Come un semplice esempio di questa teoria, consideriamo la funzione $f(S) = \log S$. Differenziando abbiamo

$$\frac{df}{dS} = \frac{1}{S} \text{ e } \frac{d^2f}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Usando [?] arriviamo a

$$df = \sigma dX + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt$$

Questa è un'equazione differenziale a coefficiente costante stocastico, che indica il salto df è normalmente distribuito. Ora consideriamo f : è dato dalla somma dei salti df (nel limite, la diventa un integrale). Dato che la somma di variabili normali è una normale, $f - f_0$ ha una distribuzione normale, con media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ e varianza $\sigma^2 t$. La pdf di $f(S)$ è quindi

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}e^{-(f - f_0 - (\mu - 1/2\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t}} \quad (2.23)$$

per $-\infty < f < \infty$.

Ora che abbiamo la pdf di $f(S) = \log S$, non è difficile mostrare che la pdf di S è

$$\frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi t}}e^{-(\log(S/S_0) - (\mu - 1/2\sigma^2)t)^2/2\sigma^2 t} \quad (2.24)$$

per $0 < S < \infty$ l'ultima equazione è nota come *distribuzione lognormale* e il cammino che ne dà origine è noto come cammino casuale normale.

2.3.1 L'eliminazione della casualità

I due cammini casuali in S (nell'equazione [?]) e in f (nell'equazione eq:risultatoPerIto) sono entrambe guidate da una singola variabile casuale dX . Possiamo sfruttare questo fatto per costruire una terza variabile g la cui variazione dg è del tutto deterministica durante un breve periodo di tempo dt . Per il momento ciò appare un semplice trucchetto, ma sarà di grande importanza quando giungeremo alle opzioni valore.

Sia Δ un numero a nostra disposizione e sia

$$g = f - \Delta S$$

dove Δ è mantenuto costante durante il periodo dt . Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} dg &= df - \Delta S \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} + (\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial S}) dt - \Delta (\sigma S dX + \mu S dt) \\ &= \sigma S (\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta) dX + (\mu S (\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial S}) dt. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Capitolo 3

Il modello di Black-Scholes

Iniziamo questo capitolo con il concetto di arbitraggio, un concetto che in certe circostanze ci permette di stabilire una relazione precisa tra prezzi e pertanto di determinarli. Successivamente discuteremo le strategie per le opzioni, in generale e useremo l'arbitraggio, con il modello per movimenti dei prezzi di beni che abbiamo discusso nel capitolo precedente, per derivare la famosa equazione differenziale Black-Scholes per i prezzi delle più semplici opzioni. Discuteremo anche le condizioni di contorno che devono essere soddisfatte da diversi tipi di opzioni, e impostiamo la scena per derivare diverse soluzioni esplicite. Questo capitolo è fondamentale per tutto l'argomento della determinazione del prezzo delle opzioni e dovrebbe essere letto con cura.

3.1 Arbitraggio

Uno dei concetti fondamentali sottostanti la teoria dei derivati finanziari e del mantenimento è quello dell'**arbitraggio**. Ciò può essere più colloquialmente spiegato con la frase: 'non esistono i pranzi gratuiti'. Più formalmente, in termini finanziari, si può dire che non esistono opportunità di fare un profitto immediato, che non abbiano rischi. (Più correttamente, tali opportunità non possono esistere per un significativo periodo di tempo, prima che i prezzi si spostino per eliminarli.) L'applicazione finanziaria di questo prin-

cipio conduce a dei modelli molto eleganti. Quasi tutte le teorie finanziarie, incluso questo libro, assumono l'esistenza di un investimento senza rischio che ha un guadagno sicuro senza nessuna possibilità di perdere. Una buona approssimazione di tale investimento è un titolo di stato in una banca sicura. Il più grande guadagno senza rischio che uno possa avere su un portfolio di beni è lo stesso che farebbe se un ammontare equivalente fosse messo in banca.

Le parole chiave nella definizione di un arbitraggio sono 'istantaneo' e 'senza rischio'; investendo in equità, diciamo, che uno può *probabilmente* sconfiggere la banca, ma questo non è *sicuro*. Se qualcuno vuole un guadagno maggiore deve accettare un rischio maggiore. Perché questo? Supponiamo che esista una simile opportunità, che senza rischi garantisca un guadagno maggiore di quello dovuto a un deposito in banca. Supponiamo anche che la maggior parte degli investitori si comportano in modo sensato. Esisterebbe un investitore sensato che metterebbe soldi in banca quando esiste un guadagno migliore da qualche altra parte? Ovviamente no. Maggiormente, se potesse prendere dei soldi in prestito a meno del guadagno dell'altro investimento, allora prenderebbe più soldi possibile per investirli nell'opportunità più remunerativa. In risposta alla pressione di domanda e offerta ci aspettiamo che la banca alzi l'interesse per attirare più soldi e/o che il guadagno nell'altro investimento si abbassi. La questione è abbastanza variabile, a causa della presenza di fattori di pressione, come i costi di trasmissione, differenze tra i tassi di interesse sui prestiti concessi e ricevuti, problemi con le liquidità, leggi sulle tasse ecc..., ma in totale il principio è solido, dato che il mercato è inibito dall'arbitraggio, il cui lavoro (molto ben pagato) è cercare e sfruttare le irregolarità o prezzi errati, come quello che abbiamo appena illustrato.

Punto Tecnico: Rischio.

Rischio: è comunemente descritto come fatto di due tipi: specifico e non specifico. (Il secondo è anche chiamato rischio di mercato o sistematico.) Il rischio specifico è la componente del rischio associato con un singolo bene (o un settore del mercato, ad esempio le sostanze chimiche), mentre un rischio non specifico è associato con fattori che influenzano l'intero mercato. Una

direzione non stabile avrebbe delle ripercussioni su una singola azienda, ma non il mercato; tale azienda mostrerebbe segni di rischi specifici, i prezzi delle azioni potrebbe diventare altamente volatile. D'altro canto la possibilità di un cambiamento nei tassi di interesse sarebbe un rischio non specifico, come tale un cambiamento influenzerebbe l'intero mercato.

Spesso è importante distinguere tra i due tipi di rischi, per i loro comportamenti nell'ambito di un vasto portfolio (**portfolio** è un termine usato per indicare una collezione di investimenti). Data una definizione sensata di rischio, è possibile allontanare rischi specifici avendo un portfolio con un cospicuo numero di beni da differenti settori del mercato; però non è possibile diversificando dei rischi non specifici. (Il rischio di mercato può essere eliminato dal portfolio prendendo posizioni opposte in due beni che sono altamente negativamente correlate - al crescere del valore di uno l'altro si svaluta. Questo non è diversificazione ma copertura, che è di estrema importanza nell'analisi dei derivativi.) Di solito si dice che il rischio specifico non è premiato, e che il rischio che premia maggiormente è quello non specifico e grande.

Una definizione famosa del rischio di portfolio è varianza del guadagno. Un conto bancario che ha un ritorno garantito, almeno nel breve periodo, non ha varianza ed è quindi visto come senza rischio. D'altra parte una borsa altamente volatile, con un ritorno molto insicuro, e quindi una grande varianza è un bene rischioso. Quest è la più semplice e comune definizione di rischio, ma non prende in considerazione la distribuzione del ritorno, ma solo le sue proprietà, la varianza. Quindi viene attribuita tanta importanza alla possibilità di un ritorno maggior del previsto, quanto alla possibilità di un ritorno minore del previsto. Altre definizioni, più sofisticate di rischio evitano questa proprietà e attribuiscono diversi pesi a diversi ritorni.

3.2 Valori di Opzioni, Ricompense e Strategie

Torniamo alle valutazioni delle opzioni. Introduciamo un po'di notazione che useremo consistentemente nel libro.

- Denotiamo con V il valore di un'opzione; quando la distinzione è più importante usiamo $C(S, t)$ e $P(S, t)$ per denotare una call e una put rispettivamente. Questo valore è una funzione del valore corrente e del bene sottostante, S , e del tempo t : $V = V(S, t)$. Il valore di un'opzione dipende anche dei seguenti parametri:
- σ , la volatilità dei beni sottostanti;
- E , l'esercizio del prezzo;
- T , la scadenza;
- r , il tasso d'interesse.

Prima, consideriamo cosa succede solo al momento della data di scadenza dell'opzione, cioè, al tempo $t = T$. Un semplice argomento di arbitraggio ci dice il suo valore a un tempo speciale.

$S > E$ alla scadenza, ha un senso finanziario esercitare l'opzione call, che trasmette una somma E , per ottenere un bene di valore S . Il guadagno da tale transazione è quindi $S - E$. D'altra parte se $S < E$ alla scadenza, non dovremo esercitare l'opzione perché perderemo di $E - S$.

In questo caso l'opzione scade svalutata. Quindi il valore dell'opzione di call alla scadenza può essere scritto come

$$C(S, T) = \max(S - E, 0) \quad (3.1)$$

Come ci avviciniamo alla data di scadenza possiamo aspettarci che il valore della nostra opzione di call sia [?]. Per confermare questo fatto riproduciamo in figura [?] dal capitolo 1 che confronta i veri indici delle opzioni di call $FT-SE$ con i valori delle opzioni alla scadenza per un fissato S . In questa figura mostriamo $\max(S - E, 0)$ come una funzione di E per un fissato $S (= 2872)$ e sovrapponiamo il dato reale per V preso dalla serie di opzioni call di Febbraio. Osserviamo che il dato reale è appena sopra la linea predetta. Questo mostra il fatto che vi è ancora del tempo rimante prima della

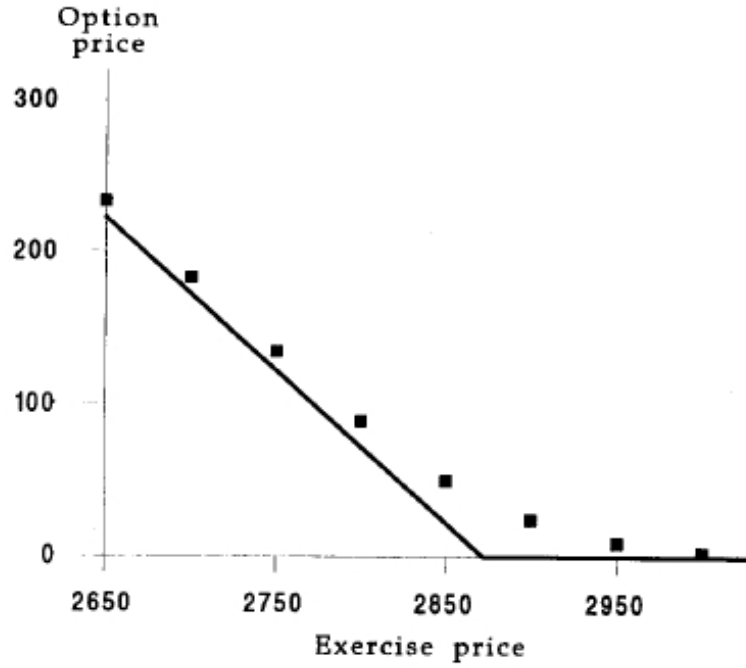


Figura 3.1: Il valore di una opzione call prima e dopo la scadenza al variare del prezzo di esercizio; I valori delle opzioni sono presi dall'indice FT-SE option data.

scadenza dell'opzione. C'è un margine di potenziale di crescita del prezzo del bene, che conferisce all'opzione un valore ancora maggiore. Tale differenza tra il valore dell'opzione prima della scadenza e alla scadenza sono noti come **valore temporale** e **valore intrinseco**.

Se si possiede un'opzione con un prezzo di esercizio preciso, allora si è meno interessati a come varia il valore dell'opzione con il prezzo di esercizio che con il prezzo del bene, S . Nella figura [?] disegniamo

$$\max(S - E, 0) \quad (3.2)$$

come una funzione di S (la linea in grassetto) e anche il valore di un'opzione in un determinato tempo prima della scadenza. La seconda curva è solo uno

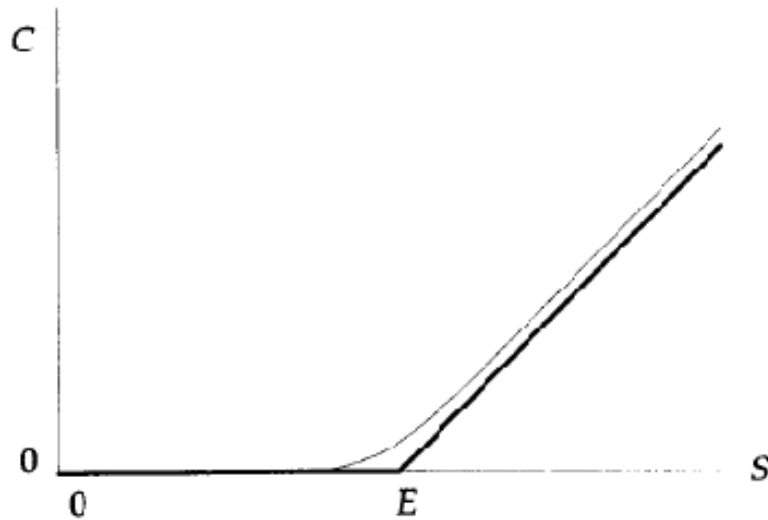


Figura 3.2: Il diagramma della rendita per la call $C(S, T)$ e il valore dell'opzione, $C(S, t)$, prima della scadenza, come funzione di S .

schizzo di una forma plausibile per il valore dell'opzione. Per il momento il lettore deve credere che il valore dell'opzione prima della scadenza è di questa forma. Successivamente in questo capitolo vedremo come derivare equazioni e avvolte anche formule per tali curve.

La linea in grassetto, essendo la rendita per l'opzione alla scadenza, è chiamata diagramma della rendita. Il lettore dovrebbe essere a conoscenza del fatto che alcuni autori usano, 'diagramma di rendita' o 'diagramma di profitto' per indicare la differenza tra il valore terminale del contratto (la nostra rendita) e il sovrapprezzo originale. Scegliamo di non usare questa definizione per due ragioni. Primo il sovrapprezzo è pagato alla stipulazione del contratto dell'opzione e il ritorno, se ce n'è alcuno, sarà disponibile solo alla scadenza. Secondo, il diagramma di rendita ha un'interpretazione naturale, come vediamo, come la condizione finale di un'equazione di diffusione.

Dovrebbe essere ora chiaro che ogni opzione e portfolio di opzioni ha la propria rendita alla scadenza. Delle argomentazioni simili a quelle sopra per il valore delle call alla scadenza dirigono alla rendita per un'opzione put. Alla

scadenza è senza valore se $S > E$, ma ha il valore $E - S$ per $S < E$. Dunque la rendita alla scadenza di un opzione put è

$$\max(E - S, 0) \quad (3.3)$$

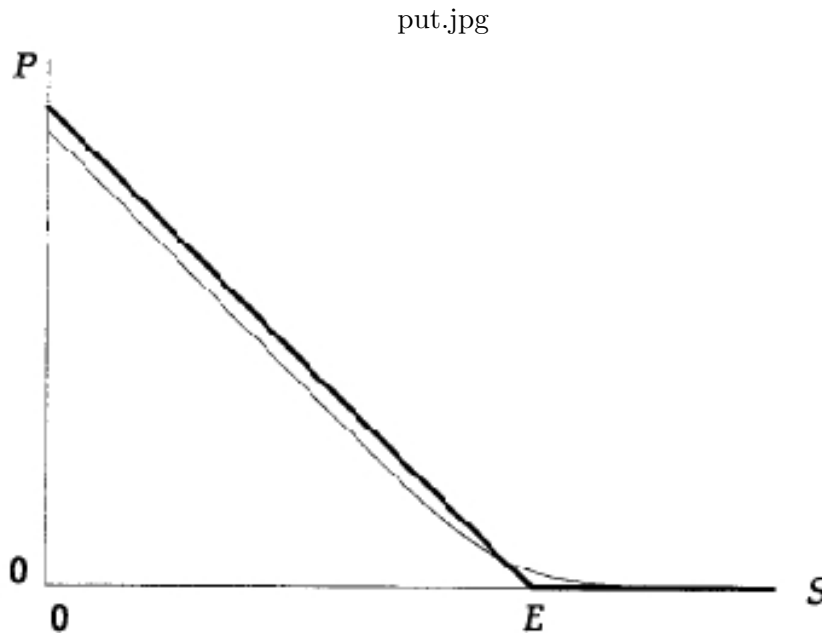


Figura 3.3: Il diagramma del ricavo per un put, $P(S, T)$, e il valore dell'opzione $P(S, t)$, prima della scadenza, come funzione di S .

Il diagramma per un put Europeo è mostrato in figura [?], dove la linea in grassetto mostra la funzione $\max(E - S, 0)$. L'altra curva è ancora uno schizzo del valore di un'opzione prima della scadenza. Anche se il valore del tempo dell'opzione call di figura [?] è sempre positivo, per il put, il valore del tempo è negativo per un S sufficientemente piccolo, dove il valore dell'opzione scende sotto il ricavo. Ritorniamo a questo punto successivamente.

Anche se le strutture più semplici per il ricavo sono il call e put, in principio non c'è nessun motivo che il contratto di un'opzione non possa essere preso con un ricavo più generale. Un esempio di un altro ricavo è mostrato in

figura Questo ricavo può essere scritto come

$$BH(S - E) \quad (3.4)$$

dove $H(\cdot)$ è la **funzione di Heaviside** che ha valore 0 quando il suo argomento è negativo altrimenti vale 1.

cash.jpg

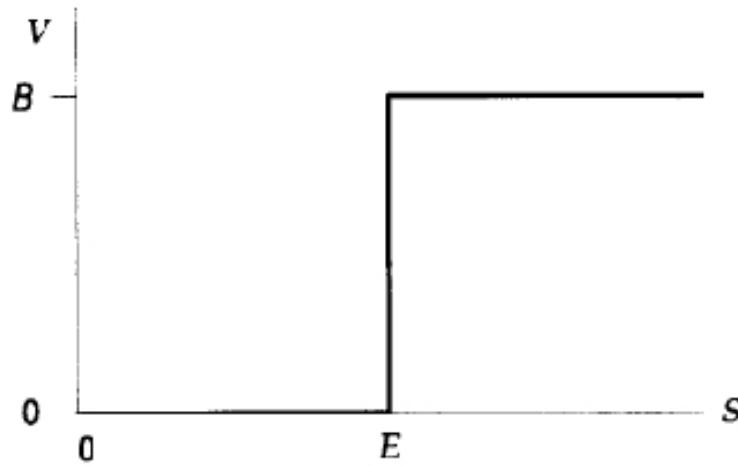


Figura 3.4: Il diagramma del ricavo per una call di tipo cash-or-nothing, equivalente a una scommessa sul prezzo di un bene.

Quest'opzione potrebbe essere interpretata come una scommessa sul prezzo di un bene chiamato **cash-or-nothing call**. Le opzioni con ricavo generale sono tipicamente chiamate **binari** o **digitali**.

Combinando call e put con diversi prezzi di esercizio si può costruire dei portfolio con una grande varietà di rendite. Per esempio, mostriamo in figura [?] la rendita per un 'bullish vertical spread', che è costruito comprando un'opzione di call e scrivendo una opzione call con la stessa data di scadenza ma con un prezzo di esercizio maggiore. Questo portfolio è detto 'bullish' (in rialzo, ottimistico), perché l'investitore beneficia da un rialzo nel prezzo del bene, 'vertical' (verticale), perché vi sono due prezzi di esercizio coinvolti, e

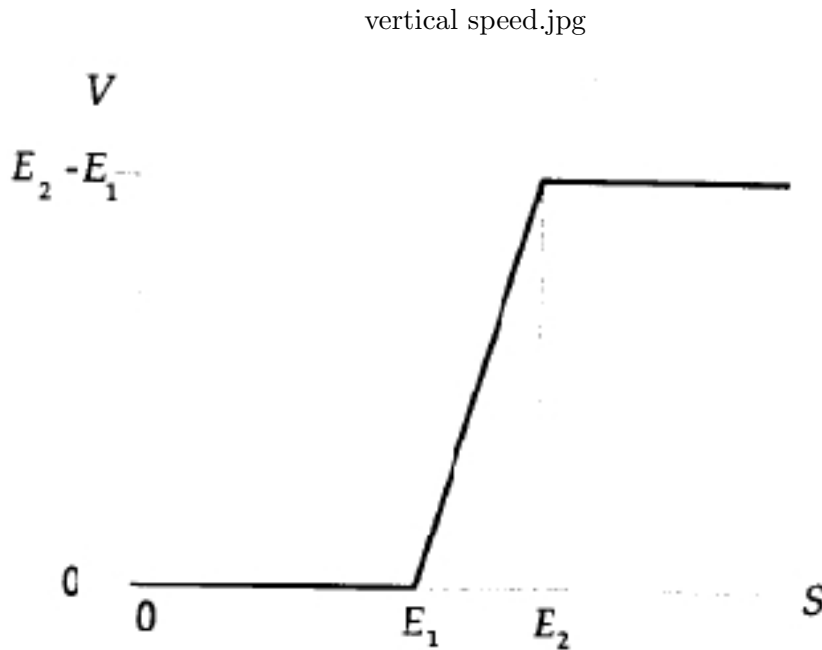


Figura 3.5: Il diagramma di rendita per il rialzo di un vertical spread

‘spread’ (spalmato, distribuito) perché è fatto dello stesso tipo di opzione, in questo caso di call. La funzione del ricavo per questo portfolio può essere scritta come

$$\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0) \quad (3.5)$$

con $E_2 > E_1$.

Molti altri portfolio possono essere costruiti. Alcuni esempi sono ‘combinazioni’, contenenti entrambe call e put e spread ‘orizzontali’ o ‘a calendario’ contenenti opzioni con diverse date di scadenza.

L’interesse per tali strategie nella loro abilità di deviare il rischio. In cambio di un sovrapprezzo, che è la massima perdita possibile noto dall’inizio - si può costruire portfolio per trarre vantaggio virtualmente da ogni spostamento del prezzo del bene sottostante. Se si ha una visuale del mercato e quindi e questa si dimostra essere corretta, allora come abbiamo visto, avere dei grossi profitti da movimenti relativamente piccoli del bene sottostante.

3.3 Parità put-call

Anche se le opzioni call e put sono superficialmente differenti, in realtà possono essere combinati in modo da essere perfettamente correlate. Questo ha dimostrato dalle seguenti argomentazioni.

Supponiamo di avere un bene in più, un put in più ed una call in meno. La call e la put hanno entrambe la stessa data di scadenza, T e lo stesso prezzo di esercizio, E . Denotiamo con Π il valore di questo portfolio. Avremo quindi

$$\Pi = S + P - C \quad (3.6)$$

dove P e C sono valori di put e call rispettivamente. La rendita per questo portfolio alla scadenza è

$$S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0). \quad (3.7)$$

Questo può essere scritto come

$$S + (E - S) - 0 = E \text{ se } S \leq E \quad (3.8)$$

oppure

$$S + 0 - (S - E) = E \text{ se } S \geq E \quad (3.9)$$

Sia che S sia maggiore o minore di E alla scadenza il ricavo è sempre E . Ora poniamoci la domanda • Quanto pagherei per un portfolio che mi garantisce sempre E a $t = T$?

Questa è certamente la domanda che ci siamo posti nel capitolo 1, e la quale risposta è arrivata scontando il valore finale del portfolio. (Notiamo che qui non assumiamo l'esistenza di un noto tasso d'interesse senza rischio sulla vita dell'opzione.) Quindi il portfolio vale ora $Ee^{-r(T-t)}$. Questo uguaglia il ricavo dal portfolio con il ricavato dal deposito bancario. Se non fosse questo il caso, allora gli arbitraggi potrebbero (e lo farebbero) avere dei profitti istantanei senza rischi: comprando e vendendo opzioni e azioni e allo stesso momento prendendo in prestito e prestando danaro nelle proporzioni corrette, potrebbero avere un profitto oggi e non avere un ricavo nel futuro.

Quindi concludiamo che

$$S + P - C = Ee^{-r(T-t)} \quad (3.10)$$

Questa relazione tra il bene sottostante e le sue opzioni è chiamata **parità put-call**. Si tratta di un esempio di eliminazione di rischio, ottenuta mediante una transizione nel bene e in ogni opzione. Nella prossima sezione, vedremo versioni più sofisticate di questo concetto, che include un continuo bilanciamento, al posto delle transizioni singole, che ci permetterà di valutare le call Europee e le opzioni put indipendentemente.

3.4 L'analisi Black-Scholes

Prima di descrivere l'analisi Black Scholes, che porta verso il valore di un'opzione elenchiamo le assunzioni che facciamo per la maggior parte del libro.

- Il prezzo del bene segue il cammino casuale lognormale. Esistono altri modelli, e in molti casi è possibile eseguire l'analisi Black-Scholes per derivare un'equazione differenziale per il valore dell'opzione. Formule esplicite esistono ma sono molto rare per tali modelli. Comunque, questo dovrebbe scoraggiarci il loro uso, dato che un metodo numerico accurato è abbastanza diretto.
- L'interesse senza rischio a tasso r e la volatilità σ del bene sono note funzioni di tempo sull'arco di vita dell'opzione.
- Non vi sono costi di transizione associati con la manutenzione del portfolio.
- Il bene sottostante non paga dividendi durante la vita dell'opzione, a meno che non siano noti a priori. Possono essere pagati sia a intervalli discreti che continuamente per tutta la durata di vita dell'opzione.

- Non esistono possibilità di arbitraggio.
L'assenza di opportunità di arbitraggio significa che tutti i portfolio senza rischio hanno lo stesso guadagno.
- Lo scambio del bene sottostante può avvenire continuamente.
Questa è chiaramente un'idealizzazione.
- La vendita parziale è permessa e i beni sono suddivisibili.
Assumiamo che possiamo comprare e vendere qualunque numero (non necessariamente intero) di un bene sottostante, e che possiamo vendere beni che non possediamo.

Supponiamo di avere un'opzione il cui valore $V(S, t)$ dipende solo da S e t . Non è necessario che a questo livello si specifichi se V è call o put; chiaramente V può essere il valore di un intero portfolio di opzioni diverse, però per semplicità il lettore può pensare a una semplice call o put. Usando il lemma di Itô possiamo scrivere

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.11)$$

Questo dà al cammino casuale seguito da V . Notare che questo richiede che V abbia almeno t derivate e S due derivate.

Ora consideriamo un portfolio che consiste di un'opzione e un numero Δ di beni sottostanti. Questo numero è ancora non specificato. Il valore di un portfolio è

$$\Pi = V - \Delta S \quad (3.12)$$

Il salto nel valore di questo portfolio in un'unità di tempo è

$$d\Pi = dV - \Delta dS. \quad (3.13)$$

Quindi Δ è tenuto fisso durante l'unità di tempo; se non esistesse allora $d\Pi$ conterrebbe dei termini $d\Delta$. Mettendo insieme (2.1), (3.3) e (3.4), troviamo

che Π segue un cammino casuale.

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dX + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.14)$$

Come abbiamo dimostrato nella sezione (2.4), possiamo eliminare la componente casuale in questo cammino casuale scegliendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (3.15)$$

Notiamo che Δ è il valore di $\partial V / \partial S$ all'inizio del *passo temporale* dt . Questo risulta in un portfolio il quale incremento è totalmente deterministico:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.16)$$

Ci appelliamo ora ai concetti di arbitraggio, offerta e domanda, con l'assunzione dell'assenza di costi di transizione. Il ritorno di un ammontare Π investito su un bene senza rischio, vedrebbe una crescita di $d\Pi dt$ in un tempo dt . Se la parte destra dell'equazione (3.7) fosse maggiore di questa quantità, un arbitraggiatore potrebbe fare un profitto garantito e senza rischio, prendendo un prestito di Π da investire in un portfolio. Il ritorno per la strategia senza rischio sarebbe maggiore del costo di prestito. Inversamente, se il lato destro della (3.7) fosse minore di $r\Pi dt$ allora un arbitraggiatore diminuirebbe il portfolio e investirebbe Π in banca. In ogni caso l'arbitraggiatore avrebbe un profitto immediato e senza costo e rischio. Quindi l'esistenza di tali arbitraggiatori con l'abilità di commerciare a basso costo assicura che il ritorno sul portfolio e sul conto senza rischio sia uguale. Quindi abbiamo

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.17)$$

Sostituendo (3.4) e (3.6) in (3.8) e dividendo il tutto per dt abbiamo

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (3.18)$$

Questa è l'**equazione parziale differenziale di Black-Scholes**. Con le sue estensioni e varianti, gioca un ruolo fondamentale nel resto del libro. Non si può sottolineare abbastanza il fatto che, con le assunzioni fatte, qualunque sicurezza derivata, il quale prezzo dipende solo dal valore attuale di S e su t , e il quale è pagato all'inizio del contratto, deve soddisfare l'equazione di Black-Scholes (o una variante che incorpora i dividendi o parametri dipendenti dal tempo). Molti problemi di valutazione di opzioni apparentemente complicati, come ad esempio le opzioni esotiche, diventano semplici quando le si vedono da questa prospettiva. Si deve anche notare che molte opzioni, ad esempio quelle Americane, hanno valori che dipendono sulla storia del prezzo del bene, quanto dal valore presente dello stesso. Vedremo più tardi come questi vengono combinati e inserite nella struttura Black-Scholes. Prima di passare oltre facciamo tre osservazioni sulla derivazione che abbiamo appena visto. Prima il delta dato da

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (3.19)$$

è il tasso di cambiamento del valore della nostra opzione o portfolio di opzioni rispetto a S . In entrambe le teorie e pratiche è di fondamentale importanza, è una misura di correlazione tra i movimenti delle opzioni o altri prodotti derivati e i beni sottostanti.

Secondo, l'operatore lineare differenziale L_{BS} dato da

$$L_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r \quad (3.20)$$

ed ha un'interpretazione finanziaria come una misura della differenza tra il ritorno di un'opzione di copertura di un portfolio (i primi due termini) ed il ritorno di un deposito bancario (gli ultimi due termini). Anche se tale differenza deve essere identicamente zero per un'opzione Europea, per evitare l'arbitraggio, vederemo più tardi che questo non è necessariamente vero per un'opzione americana.

Terzo, notiamo che l'equazione Black-Scholes non contiene il parametro di crescita μ . In altre parole, il valore di un'opzione è indipendente sulla ve-

locità di crescita del bene. L'unico parametro dall'equazione differenziale stocastica (2.1) per il prezzo del bene è che si ripercuote sul prezzo del bene è la volatilità σ . Una conseguenza di ciò è che due persone potrebbero differire nella loro stima di μ ma concordare sul valore di un'opzione.

3.5 L'equazione Black-Scholes

L'equazione (3.9) è la prima equazione differenziale parziale che abbiamo derivato in questo libro. La teoria e i metodi di risoluzione per le equazioni differenziali parziali sono mostrati nei capitoli 4 e 5; comunque introdurremo ora alcuni aspetti base della teoria in modo tale che il lettore sia a conoscenza del nostro obbiettivo.

Derivando un'equazione differenziale parziale per una quantità, come il prezzo di un'opzione, abbiamo fatto un grosso passo verso il suo valore.

Vogliamo trovare un'espressione per questo valore per risolvere l'equazione. Qualche volta questo include metodi numerici, se non possono essere trovate formule precise. Comunque una equazione differenziale pratica nella sua generalità ha molte soluzioni; per esempio il valore di put e call e S soddisfano tutte l'equazione Black-Scholes. Il valore di un'opzione dovrebbe essere unico (altrimenti, le possibilità di arbitraggio salirebbero), quindi per avere una soluzione dobbiamo imporre delle condizioni di contorno. Una condizione di contorno specifica il comportamento della soluzione necessaria in una parte del dominio.

Il tipo più frequente di equazione differenziale nei problemi finanziari è un'equazione parabolica. Un'equazione parabolica per una funzione $V(S, t)$ è una relazione specifica tra V e le sue derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti S e t . Nel caso più semplice la derivata di grado maggiore rispetto a S è una derivata seconda e quella rispetto a t è una derivata prima. Quindi (3.9) cade in questa categoria. Se l'equazione è lineare e il segno di queste derivate particolari è lo stesso, quando appaiono dalla stessa parte dell'equazione, quindi l'equazione è detta parabolica all'indietro.

Una volta che abbiamo deciso che le nostre equazione differenziale parziale è di questo tipo parabolico, possiamo fare affermazioni generali riguardo al

tipo di condizioni di contorno in S , che ha una seconda derivata associata con essa, ma solo una in t . Per esempio potremo specificare che

$$V(S, t) = V_a(t) \text{ su } S = a \quad (3.21)$$

e

$$V(S, t) = V_b(t) \text{ su } S = b \quad (3.22)$$

dove V_a e V_b sono funzioni date di t .

Se l'equazione è di tipo all'indietro dobbiamo anche imporre una condizione finale come

$$V(S, t) = V_T(S) \text{ su } t = T \quad (3.23)$$

dove V_T è una funzione nota. Risolviamo poi per V nella regione $t < T$. Cioè risolviamo 'all'indietro nel tempo', da cui deriva il nome. Se l'equazione è di tipo in avanti imponiamo una condizione 'iniziale' su $t = 0$, diciamo, e risolviamo per $t > 0$ in avanti. Sicuramente possiamo cambiare direzione facendo uno scambio di variabili $t' = -t$. In questo modo entrambi i tipi di equazioni sono matematicamente equivalenti ed è comune trasformare equazioni all'indietro in equazioni in avanti prima di qualunque analisi. Comunque è importante ricordare che l'equazione parabolica non può essere risolta nella direzione errata; cioè non dovremo impostare condizioni iniziali su un'equazione all'indietro.

3.6 Condizioni di contorno e finali per Opzioni Europee

Avendo derivato l'equazione Black-Scholes per il valore di un'opzione, dovremo considerare condizioni di contorno e finali, altrimenti l'equazione differenziale parziale non avrà un'unica soluzione. Per il momento restringiamo la nostra attenzione alla call Europea, con valore ora denotato con $C(S, t)$, con prezzo di esercizio E e data di scadenza T .

La condizione finale, da applicare a $t = T$, viene dalle argomentazioni discusse nella sezione 3.3 sull'arbitraggio. A tempo $t = T$, il valore di una call

3.6. CONDIZIONI DI CONTORNO E FINALI PER OPZIONI EUROPEE⁴⁵

è noto con la sicurezza che sia il ricavo:

$$C(S, T) = \max(S - E, 0) \quad (3.24)$$

Questa è la condizione finale per la nostra equazione differenziale parziale. La nostra condizione di contorno ‘spaziale’ o del prezzo del bene sono applicate nel momento in cui il prezzo del bene è nullo $S = 0$ e a $S \rightarrow \infty$. Possiamo vedere da (2.1) che se S assume mai valore zero, allora dS è anche zero, e quindi S non può mai cambiare. Questo è l’unico caso deterministico dell’equazione differenziale stocastica (2.1). Se $S = 0$ alla scadenza la rendita è zero. Quindi l’opzione call è inutile ad $S = 0$ anche se ha un tempo di scadenza molto lungo. Quindi ad $S = 0$ abbiamo

$$C(0, t) = 0. \quad (3.25)$$

Al crescere, senza contenimento, del prezzo del bene diventa anche più probabile che l’opzione sia esercitata e che la grandezza del prezzo di esercizio sia minore di quella del bene e scriviamo

$$C(S, t) \sim S \text{ come } S \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

Per una call Europea, senza alcuna possibilità di esercitare il prezzo anticipatamente, (3.9)-(3.12) è possibile risolvere l’equazione di Black-Scholes e darne un valore esatto per un’opzione call.

Per un’opzione put con valore $P(S, t)$, la condizione finale è la rendita

$$P(S, T) = \max(E - S, 0). \quad (3.27)$$

Abbiamo già menzionato che se S è zero allora deve rimanere zero. In questo caso la rendita finale per un put è nota con certezza ed è E . Per determinare $P(0, t)$ dobbiamo solo calcolare il valore attuale di una quantità E ricevuta a tempo T . Assumendo che i tassi di interesse siano costanti

troviamo che le condizioni di contorno a $S = 0$ sono

$$P(0, t) = Ee^{-T-t} \quad (3.28)$$

Più generalmente, per un interesse dipendente dal tempo abbiamo

$$P(0, t) = Ee^{\int_t^T r(r)dr} \quad (3.29)$$

Come $S \rightarrow \infty$ l'opzione è improbabilmente esercitata e quindi

$$P(S, t) \rightarrow 0 \text{ come } S \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

3.7 La formula Black-Scholes per Opzioni Europee

Qui riportiamo l'esatta soluzione per un problema di un'opzione call Europea (3.9)-(3.12) dove i tassi di interesse e la volatilità sono costanti.

Quando r e σ sono costanti, la soluzione, esatta ed esplicita per una call Europea è

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (3.31)$$

dove $N(\cdot)$ è il valore della funzione di distribuzione cumulativa per una variabile aleatoria normale standardizzata, data da

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (3.32)$$

qui

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.33)$$

e

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.34)$$

Per un put, cioè (3.9), (3.13), (3.14) e (3.15) e la soluzione è

$$P(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (3.35)$$

Si può semplicemente mostrare la parità put-call (3.2).

Il delta per una call Europea è

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1), \quad (3.36)$$

e per una put è

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1, \quad (3.37)$$

l'ultima segue dalla prima per la parità put-call. Altre derivative del valore di opzioni (rispetto a S, t, r e σ) possono giocare un ruolo importante nella manutenzione e sono discusse brevemente in questo capitolo.

Le figure [?] e [?] mostriamo tracciati dei valori di put e call Europei per

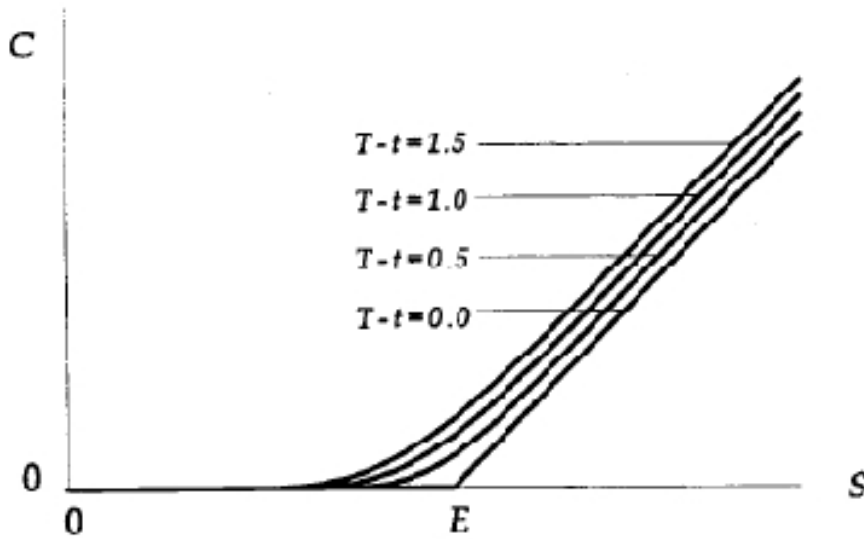


Figura 3.6: Il valore di una Call Europea $C(S, t)$ come una funzione di S per diversi valori alla scadenza; $r = 0.1, \sigma = 0.2, E = 1$ e $T - t = 0, 0.5, 1.0$ e 1.5

diversi tempi fino alla scadenza. Notare come le curve si avvicinano alla funzione di rendita per $t \rightarrow T$. In figura 3.8 mostriamo il call delta Europeo come una funzione di S , ancora per molte volte prima della scadenza. Il delta è sempre tra zero e uno, e si avvicina a una funzione a passi per $t \rightarrow T$.

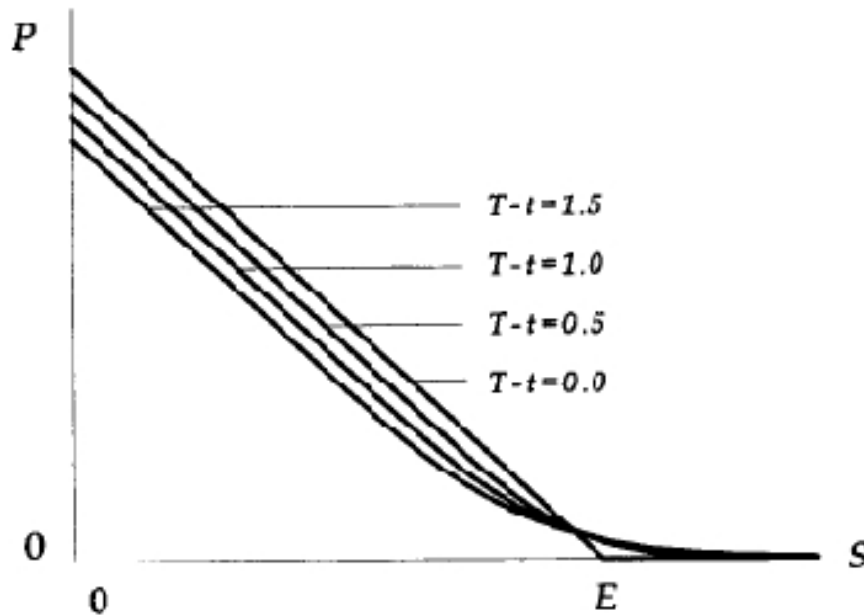


Figura 3.7: Il valore di una Put Europea $C(S, t)$ come una funzione di S per diversi valori alla scadenza; $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $E = 1$ e $T - t = 0, 0.5, 1.0$ e 1.5

Si ricordi che lo scrittore di un'opzione call dovrà consegnare il bene se $S > E$ alla scadenza e non viceversa. Se segue la strategia di delta-manutenzione, con un portfolio $C - \Delta S$, avrà automaticamente in suo possesso il corretto ammontare (uno o zero) del bene allo scadere. Ci possiamo immaginare ciò dato che la delta-manutenzione è senza rischio fino alla scadenza. Se l'opzione scade in-the-money il bene previsto sarà stato comprato nel decorso della vita dell'opzione, primo nell'impostazione della manutenzione iniziale, secondo in una serie di transazioni al variare di S . Il costo di tali acquisti e o vendite, meno il prezzo di esercizio E , è esattamente bilanciato dal sovrapprezzo iniziale e dall'interesse bancario. Al contrario, se l'opzione scade out-of-the-money, la manutenzione iniziale è venduta gradualmente. (Si dovrebbe anche notare che i valori del bene appena prima della scadenza del bene sono vicini a E , la manutenzione potrebbe cambiare da zero fino quasi a uno tante volte. Ciò è strano dato che ciascuna transazione ha dei costi.)

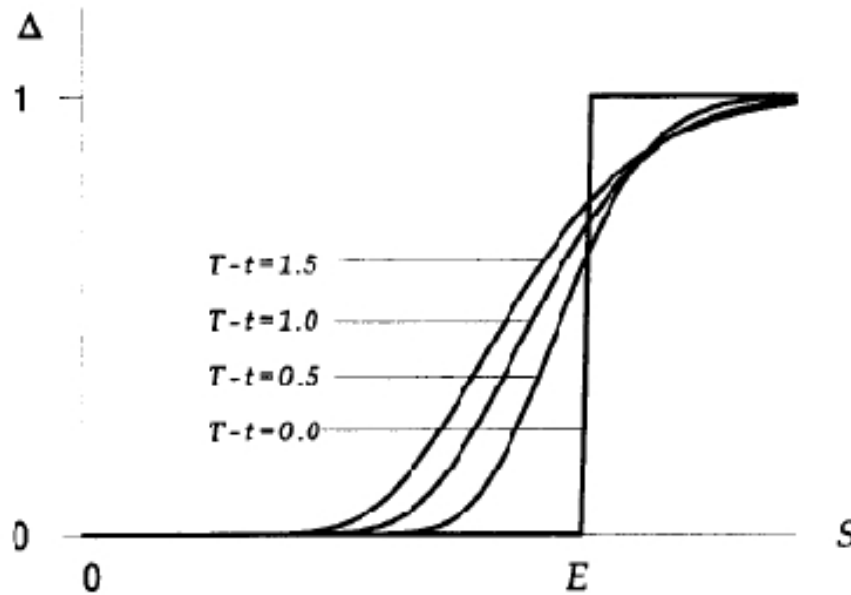


Figura 3.8: Il valore di una call Delta Europea di S per vari per diversi valori alla scadenza; $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $E = 1$ e $T - t = 0, 0.5, 1.0$ e 1.5

Le equazioni (3.17) e (3.18) per i valori di un'opzione call e put Europee sono interessanti nel senso che contengono la funzione per la distribuzione cumulativa normale di $N(x)$. Quindi il valore di un'opzione è correlato alla pdf della variabile casuale $\log S$. Questo può essere mostrato e discuteremo più avanti sul fatto che il valore di un'opzione ha un'interpretazione naturale come il valore atteso scontato della rendita alla scadenza. Questo porta al soggetto della valutazione 'valutazione neutra da rischi' di richieste contigue.

3.8 Manutenzione in pratica

Manutenzione è la riduzione della sensibilità del portfolio ai movimenti del bene sottostante, che viene fatta prendendo posizioni opposte in diversi strumenti finanziari. Due casi estremi sono stati introdotti sopra; in entrambi i casi la sensibilità del portfolio è stata ridotta a zero. Il primo esempio era la dimostrazione della parità put-call per opzioni Europee e la seconda

era l'analisi Black-Scholes con la delta-manutenzione. Queste sono, comunque, due strategie di manutenzione fondamentalmente diverse. La prima necessita di una transazione one-off in tre prodotti (una call, una put ed il sottostante); non vi è poi bisogno di sorvegliare il portfolio risultante, perché si avrà un ritorno senza rischio. Nel secondo caso si tratta di una strategia dinamica; la delta-manutenzione è senza rischio solo istantaneamente, e necessita di un bilanciamento continuo del portfolio e del rapporto dei possessi nel bene e dei prodotti derivati. La posizione della delta-manutenzione deve essere monitorata continuamente, e il pratica può avere delle perdite dovute a delle transazioni del bene.

La delta-manutenzione può anche essere usata da chi scrive un'opzione, che vuole anch'esso coprire la sua posizione. Se lo scrittore può avere un sovrapprezzo leggermente sopra il giusto valore dell'opzione, allora può scambiare il bene (o un contratto futures sul sottostante, dato che di solito questi è meno costoso perché i costi di transazione sono inferiori) per mantenere le posizioni neutrali al delta fino alla scadenza. Dato che fa pagare l'opzione più di quanto valesse teoricamente, ha un profitto netto senza alcun rischio, in teoria. Questa è solo una politica pratica per coloro che hanno un accesso al mercato a costi di contrattazione bassi, come coloro che fautori dei mercati. Se i costi di transazione sono significativi allora è necessaria una continua manutenzione per mantenere la posizione neutrale del delta.

La funzione delta per un intero portfolio è il tasso di cambiamento del valore del portfolio rispetto alla variazione nel bene sottostante. Scrivendo Π per il valore del portfolio

$$\Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S} \quad (3.38)$$

Quindi, chiamiamo manutenzione delta tra un'opzione e un bene, la posizione presa è detta 'delta-neutrale' dato che la sensibilità del portfolio dopo la manutenzione alle variazioni del prezzo del bene è istantaneamente zero. Per un portfolio generale la manutenzione di una posizione delta-neutrale potrebbe richiedere una posizione bassa nel bene sottostante. Questo assicura la vendita di beni che non sono posseduti, le cosiddette vendite basse. Un broker potrebbe richiedere un margine per coprire qualunque movimento

contro il venditore basso ma il questo margine tipicamente riceve degli interessi con un tasso di banca.

Vi sono strategie di vendita più sofisticate del semplice delta-manutenzione, e qui menzioniamo solo quelle di base. Nella delta-manutenzione il componente maggiore del portfolio viene eliminato. Si potrebbe essere più astuti ed eliminare con una manutenzione effetti di ordine minore dovuti, ad esempio alla curvatura (la seconda derivata) del valore del portfolio rispetto al bene sottostante. Questo eredita la conoscenza di **gamma** del portfolio, definito da

$$\Gamma = \frac{\partial \Pi}{\partial S^2}. \quad (3.39)$$

Il decadimento del valore temporale in un portfolio è rappresentato dal **theta**, dato da

$$\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} \quad (3.40)$$

Finalmente la sensibilità alla volatilità è solitamente nota con il nome **vega** ed è data da

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} \quad (3.41)$$

e la sensibilità ai tassi di interesse ρ nota come **rho**, dove

$$\rho = \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad (3.42)$$

La manutenzione contro qualunque di queste dipendenze necessita dell'uso di un'altra opzione come dello stesso bene. Con un bilanciamento adeguato del bene sottostante e di altri derivati, la manutenzione può eliminare la dipendenza a breve termine dei movimenti nel tempo di un bene, volatilità e tassi d'interesse.

3.9 Volatilità implicita

Nella modellazione e analisi mostrata sopra abbiamo suggerito che il modo di usare il modello Black-Scholes e altri modelli ρ di prendere valori di parametri stimati da dati storici, sostituirli in una formula e (o forse risolvere

un'equazione numericamente,) e quindi derivare il valore per un prodotto derivato. Ciò non è più l'uso più comune di modelli di opzioni, almeno non per le opzioni più semplici. Questo è in parte a causa della difficoltà di misurare la volatilità di beni sottostanti. Nonostante la nostra assunzione del contrario, non sembra che la volatilità sia costante per un periodo di tempo lungo. In più, non è ovvio che la volatilità storica è indipendente della serie temporale da cui è calcolato, né che predica accuratamente la volatilità futura di cui abbiamo bisogno, nella durata di vita dell'opzione.

Una misura diretta della volatilità è quindi difficile in pratica. Comunque, nonostante queste difficoltà è vero che i prezzi delle opzioni sono quotati in borsa. Questo ci suggerisce che, anche se non sappiamo la volatilità, il mercato lo 'conosce'. Prendiamo la formula Black-Scholes per una call, per esempio, e sostituiamola in un tasso d'interesse, il prezzo di un sottostante, il prezzo di esercizio e la scadenza. Tutti questi sono misure molto semplici e sono quotate costantemente o sono definite come parte del contratto dell'opzione. Tutto ciò che rimane da specificare è la volatilità e il prezzo dell'opzione come segue. Dato che il prezzo di un'opzione call aumenta monotonamente con volatilità (facile da mostrare dalla formula esplicita, e come abbiamo menzionato, è chiaro finanziariamente) vi è una corrispondenza biunivoca tra volatilità e prezzo di un'opzione. Quindi potremo prendere il prezzo di un'opzione quotata nel mercato e, lavorando all'indietro, dedurre l'opinione del mercato a riguardo della volatilità sulla restante vita dell'opzione. Questa volatilità derivata dal prezzo quotato per il singolo prezzo di un'opzione è chiamato **volatilità implicita**.

Vi sono modi più avanzati per calcolare il punto di vista del mercato sulla volatilità usando più di un prezzo di opzione. In particolare usando prezzi d'opzioni per una varietà di date di scadenza, si può, in principio, dedurre l'opinione del mercato sul futuro dei valori per la volatilità di un bene sottostante (il **term structure della volatilità**).

Un'aspetto inusuale della volatilità implicita è che la volatilità non sembra costante attraverso i prezzi di esercizio. Cioè il valore del sottostante, il tasso d'interesse e la scadenza sono fissati, i prezzi delle opzioni attraverso prezzi di esercizio dovrebbero riflettere un valore uniforme di volatilità. In pratica,

questo non è il nostro caso e questo sottolinea un difetto in una parte del modello. (Anche put e call tendono a dare diverse volatilità implicate.) La ricerca accademica sta cercando di trovare la parte imprecisa del modello. Illustriamo questo effetto nella figura Si osservi quanto la volatilità delle opzioni profondamente in-the-money è maggiore rispetto a quelle at-the-money. Questa curva è tradizionalmente chiamata 'smile', anche se in base alle condizioni del mercato può pendere come in figura o anche 'aggrottarsi'.

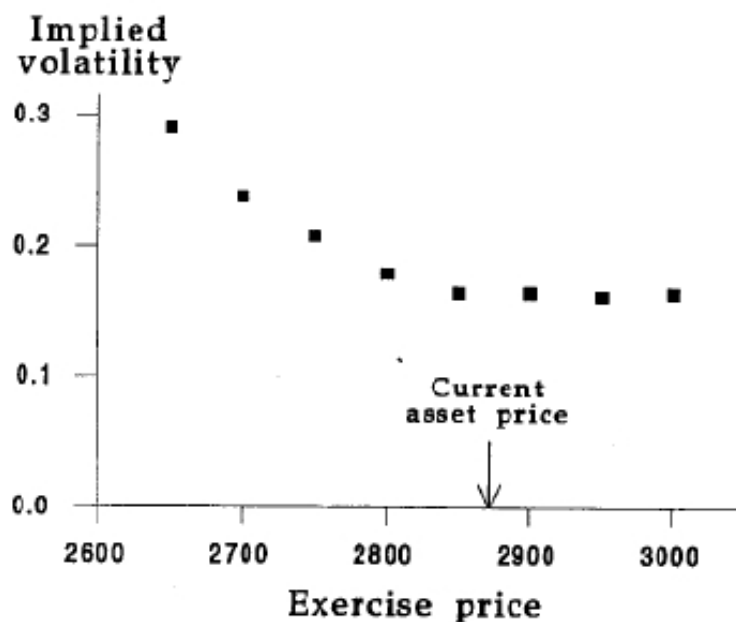


Figura 3.9: Volatilità implicata come una funzione del prezzo di esercizio. I dati sono stati presi dall'indice dei prezzi delle opzioni *FT-SE*

Capitolo 4

Equazioni Differenziali Parziali

4.1 Introduzione

La modellazione del capitolo 3 culmina in formulazioni del problema del prezzaggio per un prodotto derivativo come un'equazione differenziale parziale. Prendiamoci una pausa dalla modellazione finanziaria per discutere, in questo e nel prossimo capitolo, una parte della teoria dietro le equazioni.

In questo capitolo descriviamo la teoria elementare della natura delle condizioni iniziali. Nel capitolo 5 deriviamo alcune soluzioni esplicite, includenti la formula originale di Black-Scholes. Successivamente nel capitolo 7 descriveremo in modo dettagliato i problemi speciali che scaturiscono nel momento con i contorni liberi. Questo capitolo è di fondamentale importanza nel considerare la valutazione di opzioni Americane.

Lo studio delle equazioni differenziali parziali incontrato nelle applicazioni finanziarie appartiene a un assai più maneggevole sottoinsieme: equazioni paraboliche lineari di secondo ordine. Iniziamo questo capitolo con una revisione delle equazioni paraboliche lineari di secondo ordine: l'interpretazione fisica, proprietà matematiche, le loro soluzioni, le tecniche per ottenere soluzioni esplicite per problemi espliciti. Poi sfruttiamo questa conoscenza per nel contesto della modellazione finanziaria per derivare soluzioni esplicite a

qualche problema di valutazione di opzioni, e impostiamo lo scenario per i metodi numerici dei capitoli 8 e 9.

Prima di fare ciò, è utile fare un passo indietro e considerare la domanda in termini generali le domande che ci dovremo porre quando consideriamo equazioni differenziali parziali. Tali domande di solito includono alcune o tutte le seguenti:

- L'equazione ha un senso matematico? Se deve essere risolta in una regione, cosa si deve dire della soluzione sui confini di tale regione in modo da avere un problema **ben posto**, cioè uno la cui soluzione esiste, è unica ed è, ed in un certo senso si 'comporta bene'? Tali specifiche della soluzione sui confini sono chiamate **condizioni di contorno**. La frase 'si comporta bene' qui usato qui è di solito usato per implicare che la soluzione dipende continuamente delle condizioni iniziali di contorno, in modo tale che piccoli cambiamenti degli stessi non possono indurre grossi cambiamenti nella stessa soluzione. Oltre a questo vogliamo anche sapere quali proprietà matematiche può o deve avere la condizione. Per esempio, è garantito essere continuo o può essere discontinua?
- Possiamo sviluppare tool analitici per risolvere l'equazione? Soluzioni esplicite sono necessarie sia per illustrare il comportamento generale dell'equazione che per la loro applicazione pratica. Notiamo che, anche se, avere così tante soluzioni può essere scomodo per la praticità, rispetto a una ben progettata approssimazione numerica.
- Come dovremo risolvere l'equazione numericamente? Quali implementazioni di proprietà numeriche scegliamo? Esistono formule alternative, come lo scambio di variabili o un formulazione meno rigida del problema (vedi il capitolo 7), che porta a un migliore (semplice, più adattabile, più accurato, più robusto, più veloce) schema numerico?

Ci facciamo guidare dai suddetti schemi.

4.2 L'Equazione di Diffusione

L'equazione del **calore** o della **diffusione**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

è stata studiata per circa due secoli come un modello dello scorrimento (o diffusione) di calore in un mezzo continuo. Sicuramente è uno dei modelli più usati e con più successo di tutta la matematica applicata ed è disponibile un rilevante corpo teorico sulle sue proprietà e sulla sua soluzione. Spesso è utile come una guida per l'intuizione avere in mente lo stato fisico che ha condotto a questa equazione. Quindi, ricordiamo che l'equazione [?] modella la diffusione del calore in uno spazio monodimensionale, dove $u(x, \tau)$ rappresenta la temperatura in un barra di metallo lunga, sottile e uniforme i quali lati sono perfettamente isolati in modo tale che la temperatura vari solo con la distanza x lungo la barra e certamente nel tempo τ .

Iniziamo con una lista di alcune proprietà elementari dell'equazione di diffusione.

- è un'equazione **lineare**. Cioè, se u_1 e u_2 sono soluzioni, allora lo è anche $c_1 u_1 + c_2 u_2$ per qualunque costante c_1 e c_2 .
- è un'equazione di **secondo ordine**, dato che la derivata di ordine massimo che occorre è la seconda, nel termine $\partial^2 u / \partial x^2$.
- è un'equazione **probabilistica**. Le sue caratteristiche sono date da $\tau = \text{costante}$. Quindi, l'informazione si propaga lungo le linee (x, τ) nello spazio, e se un viene fatto un cambiamento a u in un particolare punto, per esempio sul confine della regione di soluzione, il suo effetto si ripercuote istantaneamente ovunque.
- Parlando generalmente, le sue soluzioni sono funzioni **analitiche** di x . Ciò significa che ciascun valore di τ maggiore del tempo iniziale, $u(x, \tau)$ visto come una funzione di x ha una serie di potenze convergente nei termini $x - x_0$ per ogni x_0 allontanandosi dai confini. Per

ragioni di praticità, per $\tau > 0$ possiamo pensare della soluzione di un'equazione di diffusione come una funzione x continua quanto ci serve, ma potrebbero essere indotte alcune discontinuità nel tempo mediante le condizioni di contorno. Questa è ancora una conseguenza del fatto che l'informazione si propaga a velocità infinita lungo la caratteristica $\tau = \text{costante}$.

Dal punto di vista fisico, la diffusione è un processo di spianamento: il calore si diffonde dal caldo al freddo e quindi attenua le differenze di temperatura. Le proprietà suddette fanno vedere che le soluzioni dell'equazione di diffusione, che è un modello matematico di un processo fisico, hanno la stessa tendenza. Anticipando alcuni dei risultati dalla sezione 4.3, si può in oltre mostrare che anche se i valori iniziali di u possono essere abbastanza irregolari o frastagliati, per ogni $\tau > 0$ la soluzione del **problema di valore iniziale**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty \quad (4.2)$$

con dati iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4.3)$$

e

$$u \rightarrow 0 \text{ come } x \rightarrow \pm\infty \quad (4.4)$$

è analitico per tutti i $\tau > 0$. Questa continuità, che è caratteristica di tutte le (in avanti) le equazioni lineari paraboliche, è molto utile quando si tratta di soluzioni numeriche. Un'illustrazione di tutti questi punti è nella seguente soluzione speciale, derivata nella sezione 5.2:

$$u_\delta(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-x^2/4\tau} \quad -\infty < x < \infty, \tau > 0. \quad (4.5)$$

Per $\tau > 0$ è una curva gaussiana continua, ma a $\tau = 0$ è uguale alla funzione delta (da cui la nostra notazione):

$$u_\delta(x, 0) = \delta(x). \quad (4.6)$$

A tempo $\tau = 0$, $u_\delta(x, 0)$ sparisce per $x \neq 0$; a $x = 0$ è infinito, ma il suo integrale è ancora 1. (Questo deve essere interpretato come segue: dato che per tutti $r > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} u_\delta(x, \tau) dx = 1$, il limite per τ che tende a zero da sopra l'integrale è ancora 1.) Mostriamo che $u_{delta}(x, \tau)$ in figura [?] per diversi valori di τ ; notiamo come le curve diventano alte e sottili al diminuire di τ . Il valore iniziale della funzione delta per $u_\delta(x, \tau)$ dice che il calore è inizialmente concentrato in $x = 0$. Questa funzione modella l'evoluzione di un 'punto caldo' idealizzato, un'unità una quantità di calore inizialmente concentrata in un singolo punto, ed è anche noto come **soluzione fondamentale** dell'equazione di diffusione. Illustra anche la velocità di propagazione infinita menzionata sopra. A $\tau = 0$, la soluzione [?] è zero per ogni $x \neq 0$, ma per ogni $\tau > 0$, comunque piccolo, e ogni x , per quanto grande, $u_\delta(x, \tau) > 0$: il calore inizialmente concentrato in $x = 0$ si diffonde immediatamente in tutti i valori di x . Notiamo che attraverso il lato destro dell'equazione [?] è solo la distribuzione normale della teoria delle probabilità, con media zero e varianza 2τ . La soluzione di questa equazione di diffusione può essere interpretata come la pdf di una posizione futura di una particella che segue un coefficiente costante di un cammino casuale lungo l'asse x . La condizione iniziale della funzione delta dice semplicemente che la particella è nota essere all'origine all'inizio.

4.3 Condizioni di contorno iniziali

Consideriamo ora le condizioni di contorno appropriate per le soluzioni dell'equazione di diffusione, prima in una regione finita, poi in una regione infinita.

4.3.1 Il problema del valore iniziale su un intervallo finito

Supponiamo di voler risolvere $\partial u / \partial \tau = \partial^2 u / \partial x^2$ in un intervallo finito $-L < x < L$ e per $\tau > 0$ rappresentante il flusso di calore in una barra di lunghezza finita $2L$.

Ovviamente dovremo specificare la temperatura iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ per

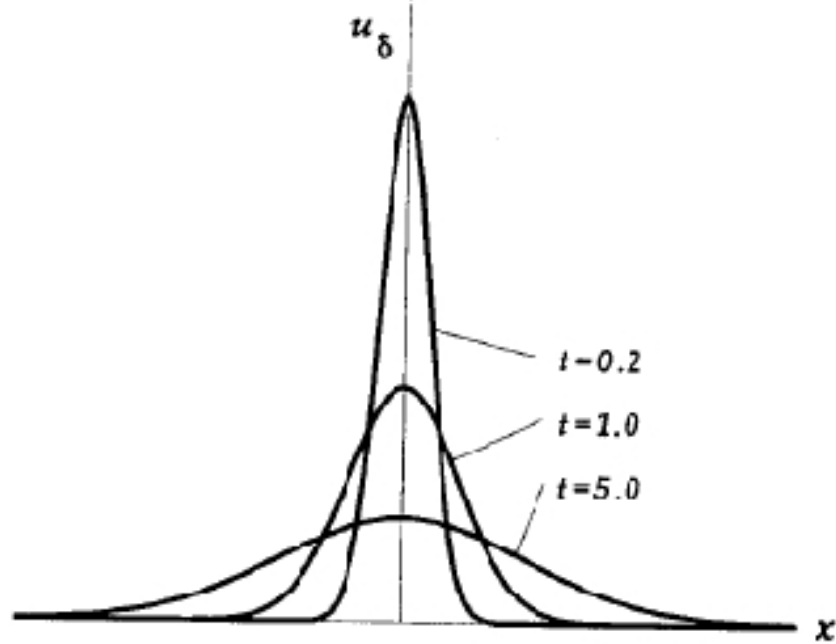


Figura 4.1: La soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione.

$-L < x < L$. Con l'analogia del flusso di calore in mente, sembra ragionevole su basi fisiche che possiamo avere abbastanza informazioni per determinare $u(x, \tau)$ unicamente se specifichiamo sia la temperatura agli estremi della barra o il flusso di calore a entrambi gli estremi, ma non entrambi. Questo risulta essere il caso; infatti entrambe le seguenti formulazioni del problema sono dimostrabilmente ben poste:

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -L < x < L \text{ con } u(x, 0) = u_0(x), u(-L, \tau) = g_-(\tau), u(L, \tau) = g_+(\tau);$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -L < x < L \text{ con } u(x, 0) = u_0(x), -\frac{\partial u}{\partial x}(-L, \tau) = h_-(\tau), \frac{\partial u}{\partial x}(L, \tau) = h_+(\tau);$$

Nel primo caso è la temperatura e nel secondo è il flusso calore che sono specificate a $x = -L$ e $x = L$.

4.3.2 il problema del valore iniziale su un intervallo infinito

Supponiamo di considerare il flusso di calore in una barra molto lunga, prendendo il limite $L \rightarrow \infty$ nell'esempio sopra. Quando la sbarra è infinitamente lunga, è ancora importante dire come si comporta u su grandi distanze, ma non è importante essere precisi nella specificazione di u sui confini di $x = \pm\infty$ come anche nel caso infinito. Vi sono alcune difficoltà tecniche qui, associata con la notazione di infinito, ma parlando in modo grossolano, finché a u non è permesso di crescere troppo velocemente, la soluzione esiste, è unica, e dipende continuamente dai dati iniziali $u_0(x)$. Per essere specifici, la soluzione al problema del valore iniziale

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, r > 0, \quad (4.7)$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4.8)$$

dove

(i)

$$u_0(x) \text{ è sufficientemente ben formata,} \quad (4.9)$$

(i)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) e^{-ax^2} = 0 \text{ per qualunque } a > 0 \quad (4.10)$$

ed in ultima sede

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) e^{-ax^2} = 0 \text{ per qualunque } a > 0, r > 0 \quad (4.11)$$

è ben posta. La definizione precisa della frase con un comportamento sufficientemente consono è oltre l'obiettivo di questo libro, ma certamente ogni funzione che non ha più di un numero finito di discontinuità è accettabile. Notiamo anche che se è necessario prevedere il comportamento all'infinito, in pratica le suddette limitazioni non sono poi tanto severe. Tutti i problemi iniziali in questo libro soddisfano comodamente le condizioni di crescita.

Qualche volta abbiamo bisogno di considerare problemi di valore iniziale definiti su un intervallo semi-finito, per esempio nell'analisi delle opzioni barriera. In questo caso vogliamo una combinazione dei due insiemi di condizioni suddette. Se per esempio, abbiamo bisogno di risolvere [?] per $0 < x < \infty, \tau > 0$, allora con dati iniziali $u_0(x)$ per $0 < x < \infty$ sufficientemente continui, un valore di confine in $x = 0, u(0, \tau) = g_0(\tau)$ sufficientemente continuo, e le condizioni [?], [?] per $x \rightarrow \infty$, il problema è ben posto.

4.4 In avanti contro All'indietro

Fin ora abbiamo discusso l'equazione **In avanti**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.12)$$

con condizioni date a $\tau = 0$. Il lettore potrebbe chiedere, cosa sia sbagliato in

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.13)$$

(con le stesse condizioni iniziali e di contorno)? Questa equazione potrebbe per esempio, in un problema in avanti dove avessimo rimpiazzato τ con $\tau_0 - \tau$ con la stessa costante τ_0 , dove $\partial u / \partial \tau$ diventa $-\partial u / \partial \tau$. Si vede che questo problema all'indietro è **posto male**: per la maggior parte dei dati iniziali e di contorno non esiste una soluzione, e perfino se esistesse sarebbe molto facile che scoppi (per esempio u potrebbe tendere a ∞) in un tempo finito. Un buon esempio è la soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione [?]. A tempo τ_0 questa soluzione è uguale a

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_0}} e^{-x^2/4\tau_0} \quad (4.14)$$

che è continua e con un comportamento consono a ciò che possiamo desiderare. Se usiamo questa funzione come il nostro dato iniziale $u_0(x)$ per

l'equazione [?], allora la soluzione è

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau_0 - \tau)}} e^{-x^2/4(\tau_0 - \tau)}, \quad (4.15)$$

e questa diventa singolare (scoppia) per $\tau = \tau_0$, quando è pari alla funzione $\delta(x)$. Ulteriormente, non può essere proseguito successivamente a questo tempo (almeno non come una funzione normale).

Capitolo 5

Le formule Black-Scholes

5.1 Introduzione

In questo capitolo descriviamo alcune tecniche per ottenere delle soluzioni analitiche alle equazioni di diffusione in domini fissati, dove, dove i confini spaziali sono noti in anticipo. Problemi a confini liberi, in cui i confini spaziali variano nel tempo in un modo sconosciuto, sono presentati nel capitolo 7. Insistiamo soprattutto su un metodo: presentiamo le soluzioni di similarità in dettaglio. Questo metodo può portare informazioni importanti per problemi particolari con condizioni iniziali e di contorno, ed è soprattutto importante per determinare comportamenti locali nello spazio o nel tempo. È anche importante nel contesto di problemi con contorni liberi, e nel capitolo 7 vedremo un'applicazione per il comportamento locale del contorno libero per un'opzione call Americana prossima alla scadenza. Oltre a questo, possiamo usare le tecniche di similarità per derivare la soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione, e da questo possiamo dedurre la soluzione generale per il problema del valore iniziale su un intervallo infinito. Questo porta direttamente alle formule di Black-Scholes per i valori delle opzioni call e put Europee. Finalmente, estendiamo il metodo per alcune opzioni con una rendita più generale, e discutiamo dei metodi di valutazione senza rischio.

5.2 Soluzioni di Similarità

Potrebbe qualche volta succedere che la soluzione $u(x, \tau)$ di un'equazione differenziale parziale, insieme alle sue condizioni di contorno, dipendano solo su una combinazione speciale delle variabili indipendenti. In tali casi, il problema può essere ridotto a un'equazione differenziale in cui questa combinazione è la variabile indipendente. La soluzione a questa equazione differenziale ordinaria è chiamata **soluzione di similarità** dell'originaria equazione differenziale parziale. Le ragioni matematiche per l'esistenza di questa riduzione sono complesse e al di là delle finalità di questo testo. Diamo un paio di esempi qui.

Esempio 1. Supponiamo che $u(x, \tau)$ soddisfi il seguente problema nell'intervallo semi-finito $x > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x, \tau > 0, \quad (5.1)$$

con condizione iniziale

$$u(x, 0) = 0, \quad (5.2)$$

e condizione di contorno a $x = 0$,

$$u(0, \tau) = 1; \quad (5.3)$$

possiamo anche richiedere che

$$u \rightarrow 0 \text{ come } x \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Queste equazioni modellano l'evoluzione del calore in una sbarra lunga, inizialmente a temperatura zero, dopo che questa è stata improvvisamente stata alzata a 1 e tenuta costante.

Cerchiamo una soluzione in cui $u(x, \tau)$ dipende solo su x e τ tramite la combinazione $\xi = x/\sqrt{\tau}$, in modo che $u(x, \tau) = U(\xi)$. Differenziando vediamo che

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2\tau} \xi U'(\xi) \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau} U''(\xi), \quad (5.6)$$

dove $' = d/d\xi$. Sostituendo nell'equazione [?] vediamo che i termini che includono τ da solo potrebbero essere eliminati, e $U(\xi)$ soddisfa la seconda equazione differenziale ordinaria

$$U'' + \frac{1}{2}\xi U' = 0 \quad (5.7)$$

Dalle condizioni iniziali e di contorno [?]-[?],

$$U(0) = 1, U(\infty) = 0 \quad (5.8)$$

(Il secondo di questi incorpora entrambi [?]-[?], dato che per $\tau \rightarrow 0$ da sopra, $\xi \rightarrow \infty$.)

Separando le variabili, troviamo che

$$U'(\xi) = C e^{-\xi^2/4} \quad (5.9)$$

per qualche costante C . Integrando

$$U(\xi) = C \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds + D \quad (5.10)$$

dove D è una costante ulteriore. Applicando le condizioni di contorno [?], scrivendo $\int_0^\xi = \int_0^\infty - \int_\xi^\infty$ e usando il risultato standard

$$\int_0^\infty e^{-s^2/4} ds = \sqrt{\pi} \quad (5.11)$$

troviamo che

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\xi^\infty e^{-s^2/4} ds; \quad (5.12)$$

cioè

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{\tau}}^\infty e^{-s^2/4} ds \quad (5.13)$$

Si può verificare semplicemente che questa funzione soddisfa l'enunciato del

problema [?]-[?], in modo che la soluzione dipenda solo su $x/\sqrt{\tau}$. **Esempio 2.** Per il nostro secondo esempio deriviamo la soluzione fondamentale $u_\delta(x, \tau)$, che abbiamo introdotto nel capitolo 4. Ancora una volta vediamo la soluzione dell'equazione di diffusione di calore che dipende solo da x solo dalla combinazione $\xi = x/\sqrt{\tau}$, ma ora proviamo la forma

$$u_{delta}(x, \tau) = \tau^{-1/2} U_\delta(\xi) \quad (5.14)$$

Il termine $\tau^{1/2}$ che moltiplica $U_\delta(\xi)$ è lì per garantire che $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) dx$ è consistente per tutti i τ , che possono essere dimostrati con un calcolo diretto. Una computazione simile all'esempio sopra mostra che $U_\delta(\xi)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$U_\delta'' + \left(\frac{1}{2}\xi U_\delta\right)' = 0 \quad (5.15)$$

La soluzione generale a ciò è ottenuta integrando due volte, la seconda volta con l'aiuto di un fattore di integrazione $e^{\xi^2/4}$, è

$$U_\delta(\xi) = C e^{-\xi^2/4} + D \quad (5.16)$$

per i costanti C e D . Scegliendo $D = 0$ e normalizzando la soluzione impostando $C = 1/2\sqrt{\pi}$, in modo che $\int_{-\infty}^{\infty} u dx = 1$ porta alla soluzione fondamentale

$$u_\delta(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-x^2/4\tau} \quad (5.17)$$

come voluto.

La soluzione di similarità ha difficilmente successo nel risolvere un problema completo di valore di contorno, perché necessita di particolari simmetrie nell'equazione e nelle condizioni iniziali e di contorno. D'altra parte vi sono problemi difficili da risolvere con un metodo numerico come il moto iniziale di un problema a contorni liberi di un'opzione Americana e il valore di un'opzione at-the-money appena prima dell'esercizio, dove il metodo suddetto è utile per analisi locali.

5.3 Un problema di valore iniziale per l'equazione di diffusione

La soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione può essere usata per derivare una soluzione esplicita al problema di valore iniziale (4.3)-(4.7), in cui dobbiamo risolvere l'equazione di diffusione per $-\infty < x < \infty$ e $\tau > 0$, con dati iniziali casuali $u(x, 0) = u_0(x)$ e condizioni di crescita favorevoli per $x = \pm\infty$. La chiave per la soluzione è il fatto che possiamo scrivere i dati iniziali come

$$u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \delta(\xi - x) d\xi \quad (5.18)$$

dove $\delta(\cdot)$ è la funzione delta di Dirac. Ricordiamo la soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione,

$$u_\delta(s, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-s^2/4\tau}, \quad (5.19)$$

ha valore iniziale

$$u_\delta(s, 0) = \delta(s) \quad (5.20)$$

Ora notiamo che a causa di $u_\delta(s - x, \tau) = u_\delta(x - s, \tau)$,

$$u_\delta(s - x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-(s-x)^2/4\tau} \quad (5.21)$$

è una soluzione dell'equazione di diffusione usando sia s o x come variabile indipendente e il suo valore è

$$u_\delta(s - x, 0) = \delta(s - x). \quad (5.22)$$

Quindi per ogni s , la funzione

$$u_0(s) u_\delta(s - x, \tau), \quad (5.23)$$

vista come una funzione di x e τ con s fissato, soddisfa l'equazione di diffusione $\partial u / \partial \tau = \partial^2 / \partial x^2$ e ha dati iniziali $u_0(s) \delta(s - x)$. Visto che l'equazione di diffusione è lineare, possiamo sovrapporre soluzioni di questa forma. Fa-

cendo in questo modo, tutti gli s integrando per $s = -\infty$ a $s = \infty$, otteniamo una soluzione ulteriore per l'equazione di diffusione,

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{(x-s)^2/4\tau} ds, \quad (5.24)$$

che ha dati iniziali

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \delta(s - x) ds = u_0(x). \quad (5.25)$$

Questa, quindi è la soluzione esplicita al problema del valore iniziale (4.3)-(4.7). Si può mostrare (Esercizio 1 del capitolo 4) che la soluzione è unica. La derivazione mostrata sopra non è l'unico modo per farlo: La trasformata di Fourier è un altro modo, ma non la riporteremo in questa sede. La soluzione [?] può essere interpretata in modo fisico come segue. Ricordiamo che la soluzione fondamentale dell'equazione di diffusione descrive appunto la diffusione di un unità 'pacchetto' di calore che, a $\tau = 0$ è tutto concentrato all'origine. Matematicamente, tale 'pacchetto' è rappresentato con una funzione delta. Ora immaginiamo che la distribuzione di temperatura iniziale $u_0(x)$ come fatto di tanti pacchetti, con il pacchetto a $x = s$ di grandezza $u_0(s)ds$. Ognuno di questi si trasforma per produrre una distribuzione di temperatura equivalente a alla soluzione fondamentale, moltiplicata per $u_0(s)$ e con x rimpiazzata con $x - s$. Dato che l'equazione di diffusione è lineare, otteniamo la distribuzione totale di temperatura sovrapponendo (sommando) le trasformazioni dei pacchetti individuali, al limite, questa somma è rimpiazzata dall'integrale (5.7).

5.4 Le derivazione delle formule Black-Scholes

L'equazione di Black-Scholes e le sue condizioni di contorno per una call Europea con valore $C(S, t)$ sono, come descritte nella sezione 3.5 e 3.6,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (5.26)$$

con $C(0, t) = 0$, $C(S, t) \sim S$ come $S \rightarrow \infty$ e $C(S, T) = \max(S - E, 0)$.

L'equazione [?] somiglia un po' all'equazione di diffusione ed ha più termini, e ogni volta che C è differenziato rispetto a S è moltiplicato con S , dando dei coefficienti non costanti. L'equazione è anche chiaramente in modalità all'indietro, con dati finali dati a $t = T$.

La prima cosa da fare è sbarazzarsi degli strani termini S e S^2 moltiplicando per $\partial C / \partial S$ e $\partial^2 C / \partial S^2$. Allo stesso momento prendiamo l'opportunità per rendere l'equazione **adimensionale**, e trasformarla nella modalità in avanti. Impostiamo

$$S = Ee^x, t = T - \tau / \frac{1}{2}\sigma^2, C = Ev(x, \tau). \quad (5.27)$$

Questo diventa la seguente equazione

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad (5.28)$$

dove $k = \tau / \frac{1}{2}\sigma^2$. La condizione iniziale diventa

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0). \quad (5.29)$$

Notiamo in particolare che tale equazione contiene solo un parametro adimensionale, $k = \tau / \frac{1}{2}\sigma^2$, anche se vi sono parametri quadri dimensionali, E, T, σ^2 e r nella formulazione originale del problema. Infatti vi è un altro $\frac{1}{2}\sigma^2 T$, il tempo adimensionale alla scadenza, e questi due sono gli unici parametri veramente indipendenti nel problema; l'effetto di tutti gli altri fattori è messo in gioco semplicemente invertendo le trasformazioni di sopra, cioè da calcoli puramente aritmetici.

L'equazione [?] somiglia più all'equazione di diffusione e possiamo trasformarla completamente con uno scambio di variabili. Se proviamo a mettere

$$v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \quad (5.30)$$

per qualche costante α e β da individuare, la differenziazione da

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k - 1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) - ku. \quad (5.31)$$

Possiamo ottenere un'equazione senza termini u scegliendo

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \quad (5.32)$$

mentre la scelta

$$0 = 2\alpha + (k-1) \quad (5.33)$$

elimina il termine $\partial u / \partial x$, queste equazioni per α e β danno

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2 \quad (5.34)$$

Abbiamo poi

$$v = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau), \quad (5.35)$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ per } -\infty < x < \infty, \tau > 0 \quad (5.36)$$

con

$$u(x, 0) = u_0(x) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \quad (5.37)$$

Questo potrebbe sembrare un grosso sforzo da compiere dalla formula originale, ma abbiamo raggiunto il ricavo. La soluzione al problema dell'equazione di diffusione è quella data nell'equazione [?]:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-(x-s)^2/4\tau} ds \quad (5.38)$$

dove $u_0(x)$ è dato da [?]. Manca da valutare l'integrale in [?]. Conviene fare dei cambiamenti di variabile $x' = (s-x)/\sqrt{2\tau}$, in modo che Valutiamo I_1 completando il quadrato per ottenere un integrale standard: è la funzione di distribuzione cumulativa per la distribuzione normale. Il calcolo di I_2 è identico al calcolo di I_1 eccetto $(k+1)$ è rimpiazzato da $(k-1)$.

Infine rintracciamo i nostri passi scrivendo

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) \quad (5.39)$$

e mettendo $x = \log(S/E)$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ e $C = Ev(x, \tau)$ per recuperare

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-\tau(T-t)N(d_2)} \quad (5.40)$$

dove

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad (5.41)$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \quad (5.42)$$

Il calcolo corrispondente per un'opzione put Europea segue linee simili. La sua resa trasformata è

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0) \quad (5.43)$$

e ora possiamo procedere come sopra. Comunque avendo valutato la call, un modo più semplice di usare la parità put-call.

$$C - P = S - Ee^{-\tau(T-t)} \quad (5.44)$$

Per il valore P di un put dato il valore della call. Questo porta

$$P(S, t) = Ee^{-\tau(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (5.45)$$

dove abbiamo usato l'identità $N(d) + N(-d) = 1$. I dettagli di un'opzione call e put sono calcolati dalla differenziazione per la call,

Dato che dei calcoli abbastanza difficili mostrano che $SN'(d_1) = Ee^{-\tau(T-t)}N'(d_2)$ (dividendo entrambi con $N'(d_2) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{1}{2}d_2^2}$ prima). Poi, il delta per il

put è

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} \quad (5.46)$$

$$= N(d_1) - 1, \quad (5.47)$$

ancora usando la parità put-call. Le quantità sono vitali se la posizione deve essere mantenuta correttamente.

Alcuni pacchetti di computer algebra offrono un domino limitato di di routine finanziari. Maple, ad esempio, ha un comando Black-Scholes call. Viene caricato digitando

```
readlib(finance)
```

e poi il comando

```
>blackscholes(E,T-t,S,tau,sigma);
```

ritorna il valore Black-Scholes di una call con prezzo di esercizio E , tempo alla scadenza $T - t$, prezzo attuale del bene S tasso d'interesse, e σ la volatilità. In questo esempio i simboli devono essere rimpiazzati da valori numerici, ma le routine possono anche essere usate come una funzione. Ad esempio,

```
> plot(blackscholes(10,0.5,S,0.1,0.2),S=0..20);
```

genera un plot dei valori call per $0 < S < 20$ con gli altri parametri tenuti fissi al valore indicato. Altre funzioni Maple possono essere:

```
> plot(diff(blackscholes(10,0.5,S,0.1,0.2),S),S=0..20);
```

```
>plot(diff(blackscholes(10,0.5,S,0.1,0.2),S$2),S=0..20);
```

che fanno il plot della funzione delta e gamma rispettivamente. Anche se non vi sono routine separate per la put, è facile scriverne una usando la routine per la call e la parità put-call.

5.5 Opzioni Binarie

Anche se abbiamo discusso solo call e put vaniglia nelle sezioni precedenti, era solo nella fase finale che abbiamo avuto bisogno di sapere con quale opzione avessimo a che fare. La funzione $u_0(s)$ nell'equazione (5.7) può chiaramente essere la rendita per qualunque combinazione di opzioni: la linearità delle equazioni Black-Scholes garantisce che si possa valutare i portfolio di opzioni mediante la sovrapposizione. In questo modo possiamo valutare combinazioni come straddle o strangle ecc. In oltre la rendita non deve essere una combinazione finita di call e put: possiamo considerare una funzione di S che vogliamo. Opzioni con rendite più generali di call e put vaniglia sono note come **opzioni binarie o digitali**.

Supponiamo che una rendita a tempo T sia $\Lambda(S)$ e che il valore dell'opzione sia $V(S, t)$ quindi $V(S, T) = \Lambda(S)$. Lavoriamo prima sulla funzione $u_0(x)$ corrispondente a $\Lambda(S)$ dopo la trasformazione ce abbiamo usato sopra. Cioè impostiamo $S = Ee^x$ e poi $V(S, t) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$, dove α, β e τ con i loro significati suddetti. Dalla rendita, $V(S, T) = \Lambda(S) = Ee^{\alpha x} u_0(x)$. Poi dall'equazione (5.7) abbiamo una formula esplicita per $u(x, \tau)$; ripristinare i cambiamenti delle variabili comporta l'esplicitazione della formula.

$$\frac{e^{-\tau(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty \Lambda(S') e^{(-\log(S'/S) - (\tau - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2 / 2\sigma^2(T-t)} \frac{dS'}{S'} \quad (5.48)$$

per $V(S, t)$. Questa formula ovviamente include call e put Vaniglia come casi particolari. Il delta è dato dalla derivata di [?] rispetto a S . Nel derivare [?], assumiamo che σ e τ sono costanti e che il bene sottostante non paga dividendi. L'inclusione del termine dividendo, non è difficile, e se σ o τ è una funzione nota di t allora il metodo descritto nel capitolo 6 può essere applicato per ottenere la formula esatta.

Un opzione binaria particolarmente famosa è stata già menzionata: la call cash-or-nothing, la quale rendita è

$$\Lambda(S) = BH(S - E). \quad (5.49)$$

Questa opzione può essere interpretata come una semplice scommessa sul prezzo di un bene; se $S > E$ alla scadenza la rendita è B e altrimenti è zero. (Più spesso, anche se, è stata creata, come parte dei ‘prodotti strutturati’ con condizioni che permettono un pagamento fisso, da fare se il bene è sopra un certo valore in una certa data.) Il suo valore è

$$V(S, t) = Be^{-\tau(T-t)}N(d_2) \quad (5.50)$$

dove d_2 è come sopra. Un'altra opzione binaria, qualche volta nota come **supershare**, ha rendita $1/d$ se $E < S + d$ alla scadenza e zero altrimenti:

$$\Lambda(S) = \frac{1}{d}(H(S - E) - H(S - E - d)) \quad (5.51)$$

(nel limite $d \rightarrow 0$ la rendita diventa una funzione delta). La sua valutazione è lasciata per esercizio.

Anche se queste opzioni sono facili da valutare usando [?] possono presentare problemi di manutenzione vicino alla data di scadenza, causati da discontinuità nella funzione di rendita. Consideriamo ad esempio le difficoltà associate con la manutenzione di una call cash-or-nothing con rendita $BH(S - E)$. Differenziando $H(S - E)$ rispetto a S vediamo che per $t \rightarrow T$ il delta dell'opzione tende alla funzione $B\delta(S - E)$. Lontano da $S = E$ questa funzione è zero, quindi vicino alla scadenza ci aspettiamo di non dover fare dalla manutenzione all'opzione. Però se S è vicino a E vicino alla scadenza vi è un'alta probabilità che il prezzo del bene incontri il valore di E , forse molte volte, prima della scadenza. Ogni volta che questo che ciò succede il delta va da quasi zero a un valore molto alto e poi vicino a zero. Il modello Black-Scholes assume che l'opzione è continuamente mantenuto con un numero di beni equivalente al delta; chiaramente questo non è pratico se, ad un certo momento, il portfolio non contiene beni, poi è mantenuto ancora per contenere un numero alto di beni solo per la liquidazione a breve di quella posizione. Però se non viene fatta la manutenzione, la rendita alla scadenza è zero oppure B , e non può essere saputo con sicurezza. Quindi rimane un problema aperto, se opzioni con rendite discontinue possono essere valutate

con la semplice formula Black-Scholes.

5.6 Neuralità al rischio

Un approccio diverso da quello presentato sopra è quella **neutralità al rischio**. Questo nasce dal fatto che il tasso di crescita μ non appare nell'equazione di Black-Scholes. Quindi anche se il valore dell'opzione dipende sulla derivata standard del prezzo del bene, non dipende sul suo tasso di crescita. Sicuramente, investitori differenti potrebbero avere stime molto diverse del tasso di crescita di un'azione ma concordare sul valore di un'opzione. In oltre le preferenze di rischio degli investitori sono irrilevanti: dato che il rischio inerente a un'opzione può essere allontanata mediante manutenzione, non vi sono ritorni da fare al di sopra di un ritorno senza rischio. Sia per opzioni vaniglia sia per altri prodotti, generalmente se un portfolio può essere costruito con un prodotto derivato e il bene sottostante in modo tale da eliminare la componente casuale. Come era il caso della nostra derivazione dell'equazione Black-Scholes del capitolo 3, successivamente il prodotto derivato può essere valutato come se tutti i cammini casuali coinvolti fossero neutrali al rischio. Ciò significa che il termine portante nell'equazione differenziale stocastica per il ritorno del bene (per il nostro modello di equità, μ) è rimpiazzato con τ ovunque appaia. L'opzione è valutata calcolando il valore attuale del ritorno atteso alla scadenza, con questa modifica al cammino casuale. Il processo funziona nel seguente modo. Iniziamo col ricordare che il valore attuale di qualunque quantità a tempo T è la quantità scontata moltiplicando per $e^{-\tau(T-t)}$. Allora impostiamo un mondo neutro da rischio: supponiamo che il cammino casuale per il ritorno su S ha spinta τ invece che μ . Da qui possiamo calcolare la pdf dei valore futuri di S : usiamo l'equazione (2.10) con μ rimpiazzato da τ . Più importante è capire che la nuova pdf è quella di S . Successivamente calcoliamo il valore atteso della redita $\lambda(S)$ usando la pdf. Cioè moltiplichiamo $\lambda(S)$ con la pdf libera da rischio e integriamo su tutti i possibili valori futuri del bene, da zero all'infinito. Finalmente, scontiamo per avere il valore attuale dell'opzione. La formula risultante è come prima,

$$V(S, t) = \frac{e^{-\tau(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \times \quad (5.52)$$

$$\int_0^\infty e^{(-\log(S'/S) - (\tau - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))^2 / 2\sigma^2(T-t)} \Lambda(S') \frac{dS'}{S'} \quad (5.53)$$

Si può dimostrare che tale espressione soddisfa la (3.9) facendo una differenziazione. Quando la rendita è semplice, può essere integrata esplicitamente nella formula di Black-Scholes, (per esempio) un'opzione di call europea. L'idea di rimpiazzare μ con τ è molto elegante. Ha comunque dei grossi svantaggi. Prima di tutto necessita la pdf dei valori futuri del bene (sotto l'assunzione di neutralità di rischio). Questo è abbastanza facile per i nostri cammini casuali a coefficiente costante, ma se volessimo usare un modello un po' più complicato, dovremo prima trovare la distribuzione prima di integrare per calcolare il ritorno atteso. Spesso il calcolo di un pdf include il calcolo di un'equazione differenziale parziale equivalente a quella soddisfatta dall'opzione, e la conseguente integrazione deve essere fatta anche numericamente. Spesso è più veloce risolvere l'equazione di prezzaggio direttamente. Inoltre, quando andiamo a vedere le opzioni esotiche o quelle Americane, è molto più difficile vedere come l'approccio senza rischio sia implementato, mentre (come vedremo) l'approccio diretto tramite l'equazione differenziale parziale per l'opzione può essere estesa perché l'opzione può essere estesa in modo chiaro.

Un ulteriore deterrente è che la neutralità dal rischio può essere confusa. Per esempio, avvolte si dice che

- Si può mostrare che $\mu = \tau$, o che
- La funzione delta di un'opzione è la probabilità che questa scada in-the-money.

Entrambe le affermazioni sono errate. Se la prima fosse corretta, allora tutti i beni avrebbero lo stesso ritorno atteso di un deposito bancario e nessuno investirebbe in azioni. Se μ fosse equivalente a τ allora la seconda affermazione sarebbe vera. La probabilità che $S > E$ a $t = T$ può essere

individuato calcolando il valore atteso $H(S - E)$. Questo include necessariamente il parametro μ .

Capitolo 6

Variazioni sul modello Black-Scholes

6.1 Introduzione

Abbiamo completato l'analisi delle opzioni vaniglia Europee call e put. Anche se le formule che abbiamo derivato sono utili, vi sono situazioni molto più complicate per cui non sono adeguate. Questo capitolo è devoto a un numero di soluzioni dirette, estensioni dell'equazione Black-Scholes, ma usiamo call e put dirette come blocchi di costruzione. Capitoli successivi tratteranno di opzioni Americane e esotiche con strutture di contratti più complessi.

Vi è una possibile direzione di generalizzazione che non discuteremo in questo libro: assumiamo che tutti i nostri modelli sono guidati da processi stocastici del tipo prima discusso. Non usiamo modelli che, per esempio, postulano alcune non linearità essenziali nel mercato sottostante, come poteva essere attribuito al feedback dai mercati derivati nei prezzi dei beni. Anche se ci sono alcune prove che i mercati non sono così ben approssimati dai nostri modelli, il modello Black-Scholes è abbastanza buono per molti scopi, sia teorici che pratici.

6.2 Opzioni su beni che pagano dividendi.

6.2.1 Strutture di dividendi

Molti beni, come le azioni, pagano **dividendi**. Questi sono pagamenti che vengono fatti agli azionisti dai profitti di coloro che concernono l'azienda, e i futuri possibili guadagni e dividendi sono riflessi nel prezzo dell'azione attuale. Il prezzo di un'opzione su un bene sottostante che paga dividendi è condizionato da pagamenti, quindi dobbiamo modificare le analisi Black-Scholes. Quando modelliamo i pagamenti di dividendi, dobbiamo considerare due questioni:

- Quando e quanto spesso sono pagati i dividendi?
- Quanto sono grandi i pagamenti?

Vi sono varie possibilità di strutture differenti per i pagamenti di dividendi. Compagnie individuali solitamente fanno dai due ai quattro pagamenti annui, che potrebbero necessitare un trattamento discreto, ma la maggior parte di pagamenti di dividendi su un indice come S&P 500 sono talmente frequenti che potrebbe essere meglio vederli come pagamenti continui invece di una successione di pagamenti discreti. Un altro esempio dove i dividendi possono essere modellati come continui è quando il bene è una moneta estera, in cui il dividendo rappresenta i pagamenti al tasso d'interesse estero (assumiamo per ora che questo sia costante).

L'ammontare pagato come dividendo potrebbe essere modellato sia come deterministico sia come stocastico. In questo libro consideriamo solo il caso di dividendi deterministici, il quale ammontare e tempismo sono noti all'inizio della vita di un'opzione. Questa è un'assunzione ragionevole, dato che molte compagnie durano fatica a mantenere una politica di dividendi simile anno dopo anno.

6.2.2 Rendita di un dividendo costante

Consideriamo la più semplice delle strutture di pagamento, Supponiamo che in un tempo dt il bene sottostante rende un dividendo di $D_0 S dt$ dove D_0 è

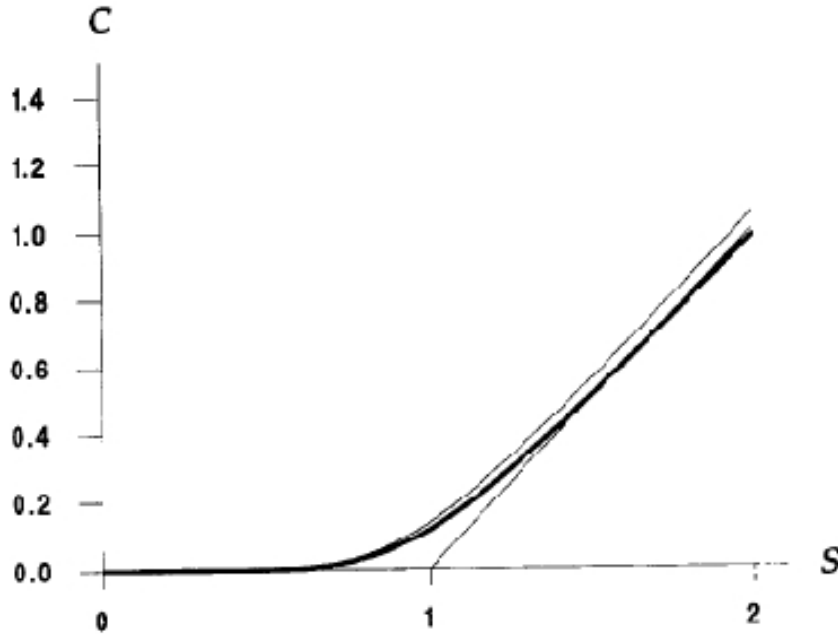


Figura 6.1: Un paragone tra un'opzione call Europea e un'opzione

costante. Questo pagamento è indipendente dal tempo eccetto attraverso la dipendenza da S . L'apporto del dividendo è definito come la proporzione del prezzo pagato per il bene per ciascun intervallo di tempo unitario in questo modo. Quindi il dividendo $D_0 S dt$ rappresenta un apporto del dividendo costante e continuo D_0 . Questa struttura del dividendo è un buon modello per opzioni indice e per opzioni di valute a breve scadenza.

Prima di tutto consideriamo l'effetto del pagamento del dividendo sul prezzo del bene. Considerazioni sull'arbitraggio mostrano che ad ogni passo temporale dt , il prezzo del bene deve scendere dell'ammontare di un pagamento di un dividendo, $D_0 dt$ in aggiunta alle solite fluttuazioni. Segue che il cammino casuale per il prezzo del bene (2.1) viene modificato in

$$ds = \sigma S dX + (\mu - D_0) S dt. \quad (6.1)$$