



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Metodi Matematici per la Finanza

Anno Accademico 2008/2009

Moti Browniani

Introduzione

Come intervengono i moti browniani in finanza:

La variazione del prezzo di un bene non può essere descritta deterministicamente, ma subirà delle variazioni improvvise e imprevedibili che sono descritte dai moti browniani che ora andremo a descrivere.

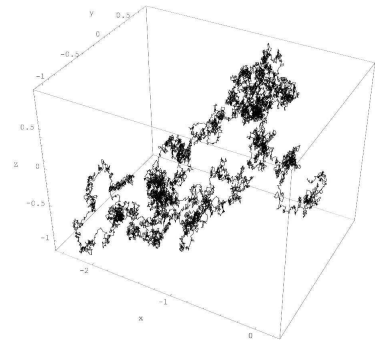
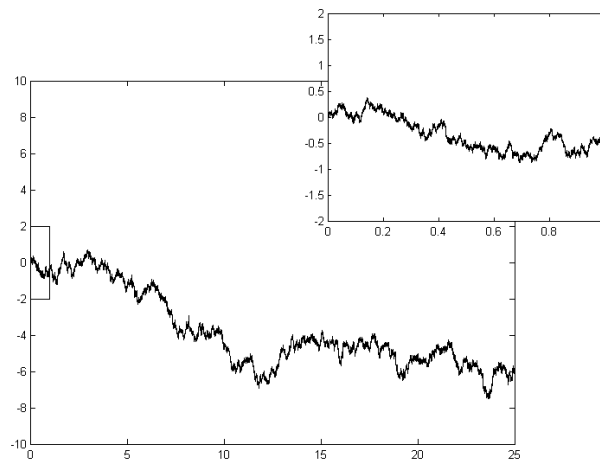
Supponiamo che al tempo t il prezzo di un bene sia S . Sia dt un piccolo intervallo successivo durante il quale S diventa $S + dS$. Il modello per il valore di ritorno corrispondente a $\frac{dS}{S}$ è composto quindi da due parti:

la prima predicibile sarà un ritorno deterministico privo di rischi, che quindi per il principio di non arbitraggio equivale al ritorno di un investimento bancario e il suo contributo a $\frac{dS}{S}$ è μdt dove μ è la misura della media del tasso di crescita del prezzo di un bene detto *derivato*.

la seconda parte identifica il cambiamento casuale del prezzo di un bene ed è rappresentato da un campione casuale ottenuto da una distribuzione normale con media 0. Il suo contributo a $\frac{dS}{S}$ è σdW , dove σ è la volatilità del mercato e W è un moto browniano.

Si ipotizza quindi che la variazione del prezzo di un bene segua un processo di moto browniano, descritto tramite l'equazione differenziale stocastica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$



1 Definizioni utili

Definition 1. Una σ -algebra di sottoinsiemi di un insieme Ω è una famiglia $A \subseteq P(\Omega)$ t.c.

1. $\emptyset \in A$
2. Se $X \in A \Rightarrow \Omega \setminus X \in A$
3. $\{X_n, n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in A$

Definition 2. Uno spazio di probabilità è una terna (Ω, \mathcal{F}, P) dove Ω è un insieme, \mathcal{F} una σ -algebra su Ω e $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ è una misura di probabilità su Ω .

Definition 3. Un **Processo Stocastico** è un oggetto della forma

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P)$$

dove:

1. T è un insieme di tempi contenuto in \mathbb{R}^+
2. \mathcal{F} è una σ -algebra
3. P è una legge di probabilità su (Ω, \mathcal{F})
4. $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ è una **filtrazione** cioè una famiglia finita di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} crescente in t , cioè
$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{se } s \leq t$$
5. $(X_t)_{t \in T}$ è una famiglia di v.a. su (Ω, \mathcal{F})

2 Famiglie Gaussiane

Definition 4. Una famiglia \mathcal{J} di v.a. d -dimensionali definite su (Ω, \mathcal{F}, P) si dice una **famiglia gaussiana** se, per ogni scelta di $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{J}$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}^d$, la v.a. $\langle \gamma_1, X_1 \rangle + \dots + \langle \gamma_m, X_m \rangle$ è gaussiana.

Proposition 5. \mathcal{J} è una famiglia gaussiana se e solo se per ogni $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{J}$ la v.a. d -dimensionale $X = (X_1, \dots, X_m)$ è normale.

Definition 6. Diremo che un processo è gaussiano se $(X_t)_t$ è una famiglia gaussiana.

3 Definizioni

Definition 7. Un processo $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, P)$ a valori reali è un **moto browniano** se:

1. $B_0 = 0$
2. per ogni $0 \leq s \leq t$ la v.a. $B_t - B_s$ è indipendente da \mathcal{F}_s
3. per ogni $0 \leq s \leq t$ la v.a. $B_t - B_s$ ha legge $N(0, t - s)$

Osservazione :

a) Il punto (2) $\implies B_t - B_s$ è indipendente da $B_u \forall u \leq s$

b) Un moto browniano è un processo gaussiano. Siano infatti

$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$:

occorre provare che $\alpha_1 X_{t_1} + \dots + \alpha_m X_{t_m}$ è una v.a. normale. Questo è ovvio per $m = 1$.

Supponiamolo vero per $m - 1$.

Allora si può scrivere

$$\alpha_1 X_{t_1} + \dots + \alpha_m X_{t_m} = [\alpha_1 X_{t_1} + \dots + (\alpha_{m-1} + \alpha_m) X_{t_{m-1}}] + \alpha_m (X_{t_m} - X_{t_{m-1}})$$

che è normale come somma di v.a. normali indipendenti.

Remark 8. Se B è un moto browniano allora si vede facilmente che:

1. $E(B_s B_t) = \min(s, t)$

Proof. sia $s \leq t$

$$E(B_t B_s) = E[(B_t - B_s) B_s] + E(B_s^2)$$

ora, $(B_t - B_s)$ e B_s sono indipendenti per la definizione di moto browniano

\implies

$$E((B_t - B_s) B_s) = E(B_t - B_s) E(B_s) \text{ e inoltre}$$

poichè $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ allora

$$E(B_t - B_s) = 0$$

$Var(B_s) = E(B_s^2) - E(B_s)^2 = s$, allora, poichè $B_s \sim N(0, s)$ e dunque

$E(B_s) = 0$ segue che

$$E(B_s^2) = s.$$

Di conseguenza

$$E(B_s B_t) = \min(s, t) = s \quad \square$$

Corollary 9. Se esistono α, β t.c. $E(|X_t - X_s|^\beta) \leq c|t - s|^{1+\alpha}$ allora esiste una modificazione continua di X che è ancora un moto browniano.

Osservazione:

- Un moto browniano ammette sempre una modificazione continua che è ancora un moto browniano.

Proof. (osservazione) Sia $t > s$, poichè $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ si ha
 $B_t - B_s = (t - s)^{\frac{1}{2}} Z$ dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dunque, per $p \geq 0$,

$$E(|B_t - B_s|^{2p}) = (t - s)^p E(|Z|^{2p})$$

Poichè si vede che $E(|Z|^{2p}) < +\infty$ per ogni $p > 0$, possiamo applicare il Corollario 8

con $\beta = 2p$, $\alpha = p - 1$ e quindi, dato un qualunque moto browniano, ne esiste una versione continua. \square

Proposition 10. Sia $B = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, P)$ un moto browniano continuo. Allora anche:

$$X_t = B_{t+s} - B_s, \quad -B_t, \quad cB_{t/c^2},$$

$$Z_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

sono moti browniani continui su (Ω, \mathcal{F}, P) , il primo rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t+s})_t$, il secondo rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$,
il terzo rispetto a $(\mathcal{F}_{t/c^2})_t$ e il quarto è un moto browniano naturale.

4 Comportamento delle traiettorie

Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t, P)$ un moto browniano continuo.

Definition 11. Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, si chiama **modulo di continuità** di f la funzione

$$w(\delta) = \sup_{x, y \in I; |x - y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Theorem 12. (P. Lévy) Per ogni $T > 0$

$$P \left\{ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s < t \leq T; t - s \leq \delta} \frac{|X_t - X_s|}{(2\delta \log \frac{1}{\delta})^{1/2}} = 1 \right\} = 1$$

cioè, al di fuori di un insieme di probabilità nulla, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ (dipendente da ω ed ε) t.c. se $|s - t| < \delta$ allora

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq (1 + \varepsilon) \left(2|t - s| \log \frac{1}{|t - s|} \right)^{1/2}$$

ed esistono t ed s con $|t - s|$ piccolo t.c.

$$|X_t - X_s| \geq (1 + \varepsilon) \left(2|t - s| \log \frac{1}{|t - s|} \right)^{1/2}$$

Definition. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice γ -holderiana su $[a, b]$ con $\gamma \in (0, 1]$ se :

$$\sup_{t, s \in [a, b]; t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\gamma} < \infty$$

Remark 13. Dal Teorema di Lèvy si ricava una importante proprietà dei moti browniani cioè che le traiettorie di un moto browniano non possono essere holderiane di esponente $\frac{1}{2}$

Proof. se w è il modulo di continuità di X_t per $t \in [0, T]$, allora □

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{w(\delta)}{(2\delta \log \frac{1}{\delta})^{1/2}} = 1$$

dove

$$w(\delta) = \sup_{t, s \in I; |s-t| \leq \delta} |X_t - X_s|.$$

e dunque

$$\sup_{t, s \in [a, b]; t \neq s} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^{\frac{1}{2}}} \text{ non potrà essere } < \infty$$

Quindi le traiettorie non possono essere holderiane di esponente $\frac{1}{2}$ su $[0, T] \forall T$.

Corollary 14. Al di fuori di un insieme di probabilità nulla nessuna traiettoria è holderiana di esponente $\gamma \geq \frac{1}{2}$ in nessun intervallo di tempo $I \subset \mathbb{R}^+$ avente parte interna non vuota.

Proof. Osservo che per $q, r \in \mathbb{Q}^+, 0 \leq q < r$,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{q \leq s < t \leq r; t-s \leq \delta} \frac{|X_t - X_s|}{(2\delta \log \frac{1}{\delta})^{1/2}} = 1 \quad (*)$$

poichè $(X_{t+q} - X_q)_t$ è ancora un moto browniano.

Quindi se $N_{q,r}$ è l'insieme trascurabile in cui la (*) è verificata, $N = \bigcup_{q,r \in \mathbb{Q}^+} N_{q,r}$ è ancora un insieme trascurabile.

Poichè un intervallo $I \subset \mathbb{R}^+$ avente parte interna non vuota necessariamente contiene un intervallo della forma $[q, r]$ con $q < r$; $q, r \in \mathbb{Q}^+$, nessuna traiettoria al di fuori di N può essere holderiana di esponente $\gamma \geq \frac{1}{2}$ in nessun intervallo di tempo $I \subset \mathbb{R}^+$ avente parte intera non vuota. □

Definition 15. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si dice **variazione** di f in $[a, b]$ la quantità

$$V_b^a f = \sup_{\pi} \sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

dove π varia tra tutte le partizioni $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ dell'intervallo $[a, b]$ e f si dice "a variazione finita" se

$$V_b^a f < +\infty \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Proposition 16. Sia $\pi = \{t_0, \dots, t_m\}$ con $s = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ una partizione dell'intervallo

$$[s, t], \quad |\pi| = \max_{0 \leq k \leq m-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

Allora posto

$$S_\pi = \sum_{k=0}^{m-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^2$$

si ha

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0^+} S_\pi = t - s$$

Remark 17. In particolare da questa Proposizione si ricava che le traiettorie di un moto browniano non sono a variazione finita su alcun intervallo di tempo.

Proof. $S_\pi = \sum_{k=0}^{m-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^2 \leq \max_{0 \leq i \leq m-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| \sum_{k=0}^{m-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|.$

Poichè le traiettorie sono continue,

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0^+} \max_{0 \leq i \leq m-1} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| = 0$$

e dunque se le traiettorie fossero a variazione finita su $[s, t]$ per ω in un insieme A di probabilità positiva, allora su A si avrebbe

$$\lim_{|\pi| \rightarrow 0^+} \sum_{k=0}^{m-1} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| < +\infty$$

e dunque $\lim_{|\pi| \rightarrow 0^+} S_\pi(\omega) = 0$, in contraddizione con la prima parte dell'enunciato della Proposizione. \square

5 Comportamento asintotico

Definition. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita in un sottoinsieme A di un qualsiasi spazio topologico, x_0 un punto di accumulazione, $I(x_0)$ la famiglia di intorno di x_0 in A .

- $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{U \in I(x_0)} \sup_{x \in U \cap A \setminus \{x_0\}} f(x) = \inf \{ \sup \{ f(x) : x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \} : U \in I(x_0) \}.$
- $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{U \in I(x_0)} \inf_{x \in U \cap A \setminus \{x_0\}} f(x) = \sup \{ \inf \{ f(x) : x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \} : U \in I(x_0) \}.$

Theorem 18. (Legge del logaritmo iterato)

$$P \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = 1 \right) = 1.$$

Corollary 19. *Come conseguenza si ha*

a) $\underline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{X_t}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = -1$

b) $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = 1$

c) $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} = -1$

Proof. Si applica Teorema 2.11 ai moti browniani $-X, (tX_{1/t})_t, (-tX_{1/t})_t$. \square

Come conseguenza delle **b)**, **c)**, osserviamo che esse implicano l'esistenza di due successioni

$$(t_n)_n, (s_n)_n \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$$

$$X_{t_n} \geq ((2 - \varepsilon)t_n \log \log t_n)^{1/2}$$

$$X_{s_n} \leq ((2 - \varepsilon)s_n \log \log s_n)^{1/2}$$

Poichè, per di più si può scegliere

$$t_n \leq s_n \leq t_{n+1},$$

ciò implica che il moto browniano compie delle oscillazioni sempre più ampie passando da valori molto grandi a valori negativi e molto grandi in valore assoluto.

Poichè le traiettorie sono continue, esso, in particolare, visita ogni numero reale una infinità di volte.

Lemma 20. *Se $x > 0, T > 0$*

$$P \left(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t > x \right) \leq 2P(X_T > x).$$

Proof. Siano $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, $I = \{t_0, \dots, t_n\}$ e poniamo $\tau = \inf \{j; X_{t_j} > x\}$.

Allora, poichè $\{X_T > x\} \subset \{\tau \leq t_n\}$ e su $\{\tau = t_j\}$ si ha $X_{t_j} \geq x$,

$$P(X_T > x) = P(\tau \leq t_n, X_T > x) = \sum_{j=0}^n P(\tau = t_j, X_T > x) \geq \sum_{j=0}^n P(\tau = t_j; X_T - X_{t_j} \geq 0)$$

ma gli eventi $\{\tau = t_j\}$ e $\{X_T - X_{t_j} \geq 0\}$ sono indipendenti perchè il primo è \mathcal{F}_{t_j} -misurabile, mentre $X_T - X_{t_j}$ è indipendente da \mathcal{F}_{t_j} ;

inoltre $P(X_T - X_{t_j} \geq 0) = \frac{1}{2}$, dato che $X_T - X_{t_j}$ è gaussiana centrata; quindi

$$P(X_T > x) \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n P(\tau = t_j) = \frac{1}{2} P(\sup_{t \in I} X_t > x)$$

Sia ora I_n una successione di sottinsiemi finiti di $[0, T]$ crescente a $[0, T] \cap \mathbb{Q}$.

Per la disuguaglianza precedente

$$P\left(\sup_{t \leq T; t \in \mathbb{Q}} X_t > x\right) = \sup_n P(\sup_{t \in I_n} X_t > x) \leq 2P(X_T > x).$$

Poichè le traiettorie sono continue $\sup_{t \leq T; t \in \mathbb{Q}} X_t = \sup_{t \leq T} X_t$ □

Lemma 21. *Se $x > 0$*

$$(x + \frac{1}{x})^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Proof. Si ha

$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$ e la disuguaglianza a destra è provata. Inoltre :

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} = -(1 + \frac{1}{x^2}) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

e dunque

$$\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_x^{+\infty} (1 + \frac{1}{z^2}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leq (1 + \frac{1}{x^2}) \int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
 □

ora dimostreremo il Teorema (Legge del logaritmo iterato)

Proof. (Legge del logaritmo iterato)

Dimostreremo che $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{X_t}{(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}} \leq 1$ (***)

Poniamo $\phi(t) = (2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}$. Siano $\delta > 0$ e $(t_n)_n$ una successione decrescente e consideriamo l'evento

$$A_n = \{X_t > (1 + \delta)\phi(t) \text{ per qualche } t \in [t_{n+1}, t_n]\}.$$

Per l'arbitrarietà di δ basterà provare che $P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

Per il Lemma di Borel-Cantelli basta dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ è convergente; quindi dobbiamo

cercare delle maggiorazioni di $P(A_n)$. Poichè ϕ è crescente

$$A_n \subset \left\{ \sup_{0 \leq t \leq t_n} X_t > (1 + \delta)\phi(t_{n+1}) \right\}$$

e per i Lemmi precedenti

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq t_n} X_t \geq \sqrt{t_n} x\right) \leq 2P\left(\frac{X_{t_n}}{\sqrt{t_n}} \geq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

e quindi, ponendo $x = x_n = (1 + \delta) \frac{\phi(t_{n+1})}{\sqrt{t_n}}$,

$$P(A_n) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x_n} e^{-x_n^2/2}$$

Scegliamo ora $t_n = q^n$ con $0 < q < 1$, ma in modo che $\lambda = q(1 + \delta)^2 > 1$. Allora per $\alpha = \log \frac{1}{q}$ si ha

$$x_n = (1 + \delta)(2q \log[(n + 1) \log \frac{1}{q}])^{1/2} = [2\lambda \log(\alpha(n + 1))]^{1/2}.$$

Quindi $P(A_n) \leq \frac{c}{(n+1)^\lambda}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$ e $P(\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n}) = 0$ per il lemma di Borel-Cantelli.

Proviamo ora la minorazione del limite superiore.

Sia ancora $(t_n)_n$ una successione decrescente a 0 e sia $Z_n = X_{t_n} - X_{t_{n+1}}$, allora per ogni $x > 1, \varepsilon > 0$

$$P(Z_n > x\sqrt{t_n - t_{n+1}}) = P\left(\frac{X_{t_n} - X_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} > x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \geq \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ \geq \frac{1}{2x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

per il Lemma.

Poniamo ora $t_n = q^n$ con $0 < q < 1$ e

$$x = x_n = (1 - \varepsilon) \frac{\phi(t_n)}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} = \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{1 - q}} \sqrt{2 \log(n \log \frac{1}{q})} = \sqrt{\beta \log(\alpha n)}$$

dove $\beta = 2 \frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 - q}$. Se q è abbastanza piccolo perchè $\beta < 2$ allora

$$P(Z_n > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)) \geq \frac{c}{n^{\beta/2} \sqrt{\log n}}$$

e, poichè si tratta di eventi indipendenti, per il Lemma di Borel-Cantelli

$$P(Z_n > (1 - \varepsilon)\phi(t_n) \text{ infinite volte}) = 1.$$

D'altra parte la (***) applicata al moto browniano $-X$ implica

$$X_{t_n} > -(1 + \varepsilon)\phi(t_n)$$

Mettendo insieme queste relazioni si ha che, per infiniti indici,

$$X_{t_n} = Z_n + X_{t_{n+1}} > (1 - \varepsilon)\phi(t_n) - (1 + \varepsilon)\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) \left[1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} \right]$$

Per ogni $\delta > 0$ si possono però scegliere ε e q abbastanza piccoli perchè sia

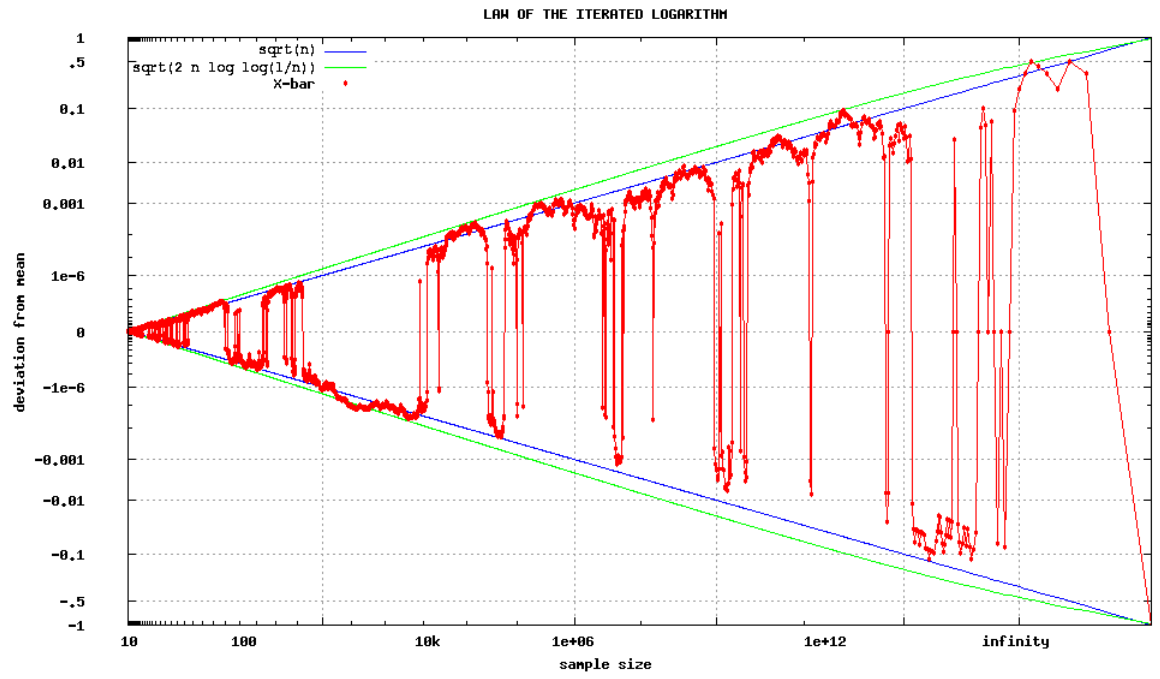
$$1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)\sqrt{q} > 1 - \delta \text{ e poichè}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} = \sqrt{q}$$

si ha finalmente

$$X_{t_n} > (1 - \delta)\phi(t_n) \text{ infinite volte.}$$

□



Da questo grafico si osserva il comportamento asintotico del moto browniano X_t confrontato con la funzione $(2t \log \log \frac{1}{t})^{1/2}$.