



**Laurea Specialistica in Scienze e  
Tecnologie dell'Informazione**

METODI MATEMATICI PER LA  
FINANZA

**TASSI DI INTERESSE  
E  
PRODOTTI DERIVATI**

Tommaso Pratelli  
tommasopt@tin.it

Roberto Roncella  
ron82@libero.it

Giugno 2009

# Indice

<b>1</b>	<b>Modelli per tassi di interesse e prodotti derivati</b>	<b>2</b>
1.1	Introduzione . . . . .	2
1.2	Le basi del prezzo dei bond . . . . .	2
1.2.1	Prezzo dei bond con tassi d'interesse noti . . . . .	3
1.2.2	Cedole con pagamenti discreti . . . . .	5
1.3	La curva dei rendimenti . . . . .	5
1.4	Tassi d'interesse stocastici . . . . .	7
1.5	L'equazione per il prezzo dei bond . . . . .	8
1.5.1	Il prezzo di mercato del rischio . . . . .	10
1.6	Soluzioni dell'equazione per il prezzo dei bond . . . . .	11
1.6.1	Analisi per i parametri costanti . . . . .	14
1.6.2	Adattare i parametri . . . . .	15
1.7	Il modello Vasicek esteso di Hull e White . . . . .	18
1.8	Opzioni Bond . . . . .	19
1.9	Altri tassi di interesse per i prodotti . . . . .	20
1.9.1	Swaps . . . . .	20
1.9.2	Caps e floors . . . . .	21
1.9.3	Swaptions, Captions e Floortions . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Bond convertibili</b>	<b>23</b>
2.1	Introduzione . . . . .	23
2.2	Bond convertibili . . . . .	23
2.2.1	Call e put features . . . . .	26
2.3	Bond convertibili con tasso di interesse stocastico . . . . .	27
<b>A</b>	<b>Glossario economico</b>	<b>32</b>

# 1 Modelli per tassi di interesse e prodotti derivati

## 1.1 Introduzione

Nelle sezioni precedenti, spesso si è assunto che i tassi di interesse fossero costanti o che almeno fossero note le loro funzioni nel tempo. Tuttavia, nella realtà le cose stanno in modo diverso. Sebbene gli effetti dei cambiamenti dei tassi d'interesse sui prezzi delle opzioni scambiate siano relativamente piccoli, a causa della loro durata di vita breve, molti altri titoli che sono influenzati da essi hanno una durata più lunga. La loro analisi in presenza di tassi d'interesse non prevedibili è di importanza cruciale. In questa sezione viene data una breve introduzione ai tassi d'interesse puri per prodotti derivati e, in seguito, ai prodotti che dipendono sia dai tassi d'interesse sia dai beni sottostanti.

Cominciamo questo capitolo illustrando il prezzo dei bond. Per prima cosa, si assume di essere in presenza di tassi d'interesse deterministici. Questa semplificazione ci permette di discutere l'effetto delle cedole sui prezzi dei bond e sulla curva dei rendimenti, che definiamo brevemente. Più avanti nel capitolo, rilassiamo l'assunzione dei tassi d'interesse deterministici che permette ai tassi d'interesse a breve termine, ai tassi spot, di seguire un cammino casuale. Questo conduce ad un'equazione differenziale parziale parabolica per i prezzi dei bond e a modelli per opzioni sui bond.

## 1.2 Le basi del prezzo dei bond

Un bond è un contratto, pagato in anticipo, che frutta una somma nota in una data futura  $t = T$  anch'essa già nota, chiamata **data di maturazione**<sup>1</sup>. I bond possono pagare anche una cifra nota (la **cedola**) a tempi fissi durante la durata del contratto. Se non è previsto la cedola, si parla di **bond a zero cedole**. I bond possono essere emessi sia da governi sia da aziende. Lo scopo principale dell'emissione di un bond è quello di incrementare il capitale, mentre il premio anticipato può essere visto come un prestito al governo o all'azienda.

Il problema della valutazione di un bond può essere espresso dalla domanda: "Quanto dovrei pagare adesso per ottenere 1\$ garantito in dieci anni?"

---

<sup>1</sup>Per convenzione, si dice che le opzioni scadono, mentre i bond maturano.

Come con le opzioni, è possibile individuare il valore più corretto del contratto. In questo esempio, la durata di vita del bond è di dieci anni, in contrasto alla durata tipica di un'opzione che è di nove mesi o anche meno. Per questa ragione, la modellazione di ogni processo dipendente dal tempo deve essere più accurata quando si ha a che fare con il prezzo dei bond. Non è vero, per esempio, che i tassi d'interesse rimangono costanti per periodi di dieci anni e nemmeno possono essere noti in anticipo su tali periodi. Tuttavia, cominciamo questo capitolo con il modello più semplice per un bond, assumendo che  $r$  sia una funzione temporale nota. Dopo aver illustrato un ambiente teorico, introduciamo un modello per variazioni stocastiche dei tassi d'interesse.

### 1.2.1 Prezzo dei bond con tassi d'interesse noti

Utilizziamo la notazione  $V$  per indicare il valore del contratto, in questo caso un bond. Se il tasso di interesse  $r(t)$  e il pagamento della cedola  $K(t)$  sono funzioni note nel tempo, anche il prezzo è una funzione dipendente solamente dal tempo:  $V = V(t)$ . Si noti che il prezzo del bond è espresso anche in funzione della data di maturazione  $T$ , ma per il momento teniamo da parte tale dipendenza. Se il bond paga  $Z$  al proprietario al tempo  $t = T$ , allora sappiamo che  $V(T) = Z$ . Deriviamo ora un'equazione per trovare il valore del bond per un tempo precedente alla maturazione, cioè per  $t < T$ .

Supponiamo di avere un bond. La variazione del suo valore in un passo temporale  $dt$  (da  $t$  a  $t + dt$ ) è

$$\frac{dV}{dt} dt .$$

Se durante questo periodo abbiamo ricevuto un pagamento della cedola di  $K(t)dt$ , che può essere in forma di pagamenti continui, discreti o una combinazione di essi, le nostre risorse variano di un ammontare pari a

$$\left( \frac{dV}{dt} + K(t) \right) dt .$$

Possiamo equiparare questa formula con il ricavo di un deposito bancario che riceve interessi con un tasso  $r(t)$ . Dunque concludiamo che:

$$\frac{dV}{dt} + K(t) = r(t)V . \tag{1}$$

Il termine a destra è il ricavo che avremmo avuto se avessimo convertito il nostro bond in contanti al tempo  $t$ . La soluzione di questa equazione differenziale ordinaria, può essere trovata tramite l'uso del fattore integrante  $e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}$  in modo tale da avere:

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} \left( Z + \int_t^T K(t') e^{\int_{t'}^T r(\tau)d\tau} dt' \right). \quad (2)$$

La costante di integrazione arbitraria è stata scelta in modo da assicurare che  $V(T) = Z$ . Si noti che un pagamento di una cedola positiva incrementa il valore del bond al tempo  $t$ .

Ora supponiamo che ci siano bond a zero cedole per tutte le date di maturazione possibili, cioè che ci siano bond con  $K(t) = 0$ . Supponendo ancora che il tasso d'interesse sia deterministico, si ha:

$$V(t; T) = Z e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}, \quad (3)$$

ottenuta dalla (2) con  $K = 0$  (adesso abbiamo reso esplicita la dipendenza da  $T$ ). Se i prezzi dei bond sono quotati oggi, al tempo  $t$ , per tutti i valori possibili della data di maturazione  $T$ , allora conosciamo il membro sinistro della (3) per tutti i valori di  $T$ . Quindi:

$$-\int_t^T r(\tau)d\tau = \log(V(t; T)/Z). \quad (4)$$

Se  $V(t; T)$  è derivabile rispetto a  $T$ , allora derivando la precedente si ottiene:

$$r(T) = \frac{-1}{V(t; T)} \frac{\partial V}{\partial T}. \quad (5)$$

Se i prezzi di mercato dei bond a zero cedole riflettono genuinamente un tasso d'interesse noto e deterministico, allora il tasso d'interesse in date future è dato dai prezzi dei bond dalla (5). Dato che il tasso d'interesse è positivo, si deve avere:

$$\frac{\partial V}{\partial T} < 0.$$

Dunque, maggiore è la durata residua del bond, minore è la sua valutazione attuale.

### 1.2.2 Cedole con pagamenti discreti

Ci si chiede ora cosa succeda se la cedola è pagata in modo discreto, come avviene nella pratica, ad esempio ogni sei mesi. Possiamo arrivare a un risultato in tal senso, tramite un parametro finanziario che ci sarà utile in seguito. Dato che il proprietario del bond riceve  $K_c$  al tempo  $t_c$ , deve esserci un salto del valore del bond alla data della cedola. Cioè, il valore prima e dopo questa data differisce di  $K_c$ :

$$V(t_c^-) = V(t_c^+) + K_c .$$

Questa sarà indicata come la condizione di salto. Stavolta il prezzo del bond non è continuo. Dopo tutto, c'è un pagamento discreto alla data della cedola. Questa condizione di salto continuerà ad essere valida quando arriveremo a trattare i tassi d'interesse stocastici.

Un approccio più matematico consiste nello scrivere  $K(t)$  come la somma di funzioni delta, una per ogni pagamento di una cedola. Supponiamo, per semplicità, che ci sia un solo pagamento di  $K_c$  al tempo  $t_c < T$ . Abbiamo allora:

$$\frac{dV}{dt} + K_c \delta(t - t_c) = r(t)V . \quad (6)$$

Possiamo sostituire la funzione delta nella (2) e ottenere:

$$V(t) = e^{-\int_t^T r(\tau) d\tau} \left( Z + K_c H(t_c - t) e^{-\int_{t_c}^T r(\tau) d\tau} \right) .$$

### 1.3 La curva dei rendimenti

Nonostante tutte le assunzioni fatte in precedenza affermino il contrario, i tassi d'interesse non sono deterministici. Per prodotti derivati a breve scadenza come le opzioni, gli errori introdotti assumendo un tasso deterministico o addirittura costante sono piccoli, tipicamente intorno al 2%. Trattando prodotti con una durata di vita più lunga, dobbiamo considerare tassi d'interesse casuali. Il primo passo è scegliere una misura adatta per i valori futuri dei tassi, che permetta agli agenti di trattare effettivamente la stessa quantità. Nella sezione precedente è stata introdotta una definizione, la (5), che dà un tasso d'interesse a partire dal prezzo di un bond, ma che si basa sul fatto che i prezzi dei bond siano derivabili rispetto alla data di maturazione.

La curva dei rendimenti è un'altra misura dei valori futuri dei tassi d'interesse. Con il valore dei bond a zero cedole  $V(t;T)$  preso dai dati reali, si definisce:

$$Y(t;T) = -\frac{\log(V(t;T))/V(t;T)}{T-t}, \quad (7)$$

dove  $t$  è il tempo corrente. La curva dei rendimenti è data dal grafico di  $Y$  rispetto al tempo residuo alla maturazione  $T-t$ . La dipendenza della curva dei rendimenti dal tempo di maturazione è chiamata **struttura dei termini dei tassi d'interesse**. Questa definizione comporta dei vantaggi per  $Y$  rispetto alla (5), dato che:

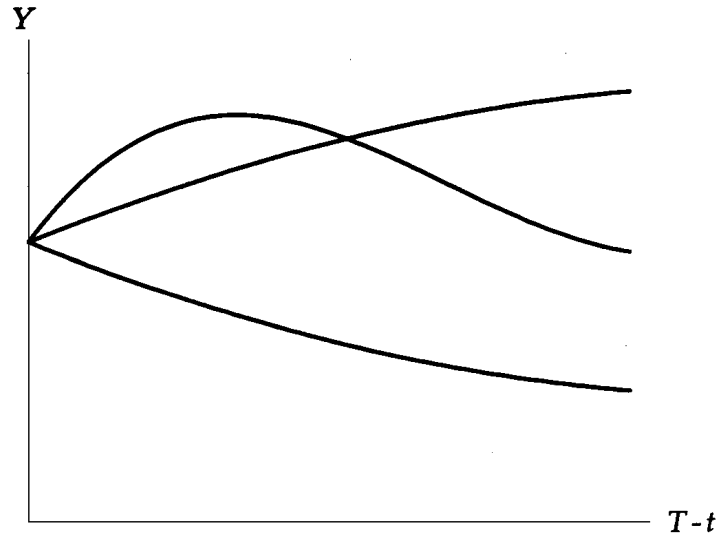
- i prezzi dei bond,  $V(t;T)$ , non devono essere derivati;
- non è richiesta una distribuzione continua dei bond con tutte le maturazioni possibili.

$Y$  ha la stessa dimensione dei tassi d'interesse, cioè un tempo inverso. Le due misure dei tassi d'interesse futuri, (5) e (7), sono le stesse quando i tassi sono costanti.

È stato osservato dai dati di mercato che la curva dei rendimenti presenta tipicamente tre forme distinte, ognuna associata a condizioni economiche differenti:

- crescente: è la forma più comune per la curva dei rendimenti. I tassi d'interesse futuri sono più alti dei tassi a breve termine, dato che dovrebbe essere più conveniente investire denaro sul lungo periodo, piuttosto che sul breve.
- decrescente: è tipica di un periodo in cui il tasso a breve termine è alto, ma è destinato a scendere.
- gibboso: anche in questa situazione, il tasso a breve termine è destinato a decrescere.

Questi casi sono illustrati in Figura 1.



**Figura 1:** Tipici andamenti delle curve dei rendimenti: decrescente, crescente, gibbosa.

#### 1.4 Tassi d'interesse stocastici

Data l'incertezza del corso futuro dei tassi d'interesse, è naturale pensare di modellarla con una variabile casuale. Per il resto del capitolo assumiamo che sia così. Per essere corretti, dovremmo specificare che  $r$  è il tasso d'interesse ricevuto dal deposito più breve possibile. Chi ha intenzione di investire denaro per un lungo periodo di tempo, di solito sceglie un tasso più alto, in modo da bilanciare il rischio che il tasso breve possa salire rapidamente (questo porterebbe a una curva dei rendimenti crescente). Il tasso d'interesse per il deposito più breve possibile è chiamato comunemente **tasso spot**.

Di seguito introduciamo un modello generale che, per le ragioni che vedremo, è divenuto piuttosto popolare.

Nello stesso modo in cui abbiamo proposto un modello per il prezzo dei beni come un cammino casuale lognormale, supponiamo che il tasso d'interesse  $r$  sia governato da un'equazione differenziale stocastica della forma:



$$dr = w(r, t)dX + u(r, t)dt . \quad (8)$$

Le forme funzionali di  $w(r, t)$  e  $u(r, t)$  determinano il comportamento del tasso spot  $r$ . Si usa questo cammino per derivare una funzione differenziale parziale per il prezzo di un bond in modo simile alla derivazione dell'equazione di Black-Scholes. In seguito sceglieremo forme funzionali per  $w$  e  $u$  che offrano un modello ragionevole per i tassi spot.

### 1.5 L'equazione per il prezzo dei bond

Quando i tassi d'interesse seguono l'equazione differenziale stocastica (8), un bond ha un prezzo nella forma  $V(r, t)$ ; la dipendenza da  $T$  sarà resa esplicita solo quando necessario.

Valutare il prezzo di un bond è tecnicamente più difficile rispetto al caso delle opzioni, dato che non c'è nessun bene sottostante da utilizzare come riferimento: non si può comprare un tasso d'interesse del 5%. In questa situazione, l'unica alternativa è confrontarsi con bond con date di maturazione differenti. Per questa ragione, consideriamo un portfolio contenente due bond, con maturazioni differenti,  $T_1$  e  $T_2$ . Il bond con la maturazione  $T_1$  ha come prezzo  $V_1$  e il bond con la maturazione  $T_2$  ha come prezzo  $V_2$ . Manteniamo il primo e consideriamo un numero  $-\Delta$  del secondo. Dunque:

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2 . \quad (9)$$

La variazione in questo portfolio in un tempo  $dt$  è:

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta \left( \frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{\partial V_2}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt \right) , \quad (10)$$

dove abbiamo applicato il lemma di Itô alle funzioni  $r$  e  $t$ .

Dalla (10) possiamo vedere che scegliendo

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r}$$

si elimina la componente casuale  $d\Pi$ . Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \\ &= r \left( V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial r} / \frac{\partial V_2}{\partial r} V_2 \right) dt \\ &= r\Pi dt \end{aligned}$$

dove abbiamo usato argomenti di arbitraggio per far coincidere il ritorno sul portfolio con il tasso senza rischi, il tasso spot.

Raccogliendo tutti i termini con  $V_1$  nel membro sinistro e tutti i termini con  $V_2$  in quello destro, troviamo che:

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1 \right) / \frac{\partial V_1}{\partial r} = \left( \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2 \right) / \frac{\partial V_2}{\partial r} .$$

Questa equazione è in due incognite. Tuttavia, la parte sinistra è una funzione di  $V_1$ , ma non di  $V_2$ , viceversa la parte destra è funzione di  $V_2$ , ma non di  $V_1$ . L'unico modo per cui essa sia valida, è che entrambi i membri siano indipendenti dalla data di maturazione. Dunque, eliminando il pedice da  $V$ , si ha:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV \right) / \frac{\partial V}{\partial r} = a(r, t)$$

per una qualche funzione  $a(r, t)$ . In previsione di sviluppi successivi, è conveniente scrivere:

$$a(r, t) = w(r, t)\lambda(r, t) - u(r, t) .$$

Dati  $w(r, t)$  diverso da zero, e  $u(r, t)$  questo è sempre possibile. La funzione  $\lambda(r, t)$  deve essere ancora specificata.

Inoltre, l'equazione per i bond a zero cedole è:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 . \quad (11)$$

Per risolvere la (11) dobbiamo imporre una condizione finale e due condizioni di limite. La condizione finale corrisponde al *payoff* sulla maturazione e quindi:

$$V(r, T) = Z .$$

Le condizioni di limite dipendono dalla forma di  $u(r, t)$  e  $w(r, t)$  e sono discusse in seguito per un modello particolare.

È un problema semplice incorporare i pagamenti delle cedole nel modello. Il risultato è:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + K = 0 ,$$

dove  $K$  è il pagamento della cedola e può essere una funzione di  $r$  e  $t$ .

Quando la cedola è pagata in modo discreto, possiamo scrivere  $K(t)$  come una somma di funzioni delta. Da quanto visto nella sezione 1.2.2, troviamo che se c'è un pagamento discreto  $K_c$  al tempo  $t_c$  allora  $V(r, t)$  deve soddisfare la condizione di salto:

$$V(r, t_c^-) = V(r, t_c^+) + K_c .$$

### 1.5.1 Il prezzo di mercato del rischio

Diamo ora un'interpretazione elegante della funzione  $\lambda(r, t)$ , fin qui alquanto misteriosa. Invece di mantenere il portfolio che abbiamo definito in precedenza, supponiamo di avere un solo bond con data di maturazione  $T$ . In un passo temporale  $dt$  il valore del bond varia di:

$$dV = w \frac{\partial V}{\partial r} dX + \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + u \frac{\partial V}{\partial r} \right) dt .$$

Dalla (11) questa può essere scritta come:

$$dV = w \frac{\partial V}{\partial r} dX + \left( w\lambda \frac{\partial V}{\partial r} + rV \right) dt$$

oppure

$$dV - rV dt = w \frac{\partial V}{\partial r} (dX + \lambda dt) . \quad (12)$$

La presenza di  $dX$  in (12) mostra che questo non è un portfolio senza rischio. Come ricompensa per aver accettato un rischio extra, il portfolio ritorna come profitto un extra  $\lambda dt$  per unità di rischio extra,  $dX$ . Per questo motivo la funzione  $\lambda$  è detta **prezzo di mercato del rischio**.

**Punto tecnico: il prezzo di mercato del rischio per i beni.** Nei capitoli precedenti, è stata derivata l'equazione di Black-Scholes costruendo un portfolio con un'opzione ed un numero  $-\Delta$  di beni sottostanti. Supponiamo, invece, di dover seguire l'analisi precedente, con due opzioni con date di maturazione differenti (o prezzi di esercizio differenti), in modo tale che:

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2 .$$

Come in precedenza, troviamo che

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\mu - \lambda_s \sigma) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 . \quad (13)$$

Questa equazione è semplicemente la (11) con  $S$  al posto di  $r$ ,  $\mu S$  invece di  $u$ ,  $\lambda_s$  al posto di  $\lambda$  e  $\sigma S$  al posto di  $w$ . Ora ricordiamo che le opzioni *hedging* sono più facili da trattare rispetto ai bond *hedging* a causa dell'esistenza di un bene scambiabile sottostante. In altre parole,  $V = S$  deve essere essa stessa una soluzione di (13). Sostituendo  $V = S$  nella (13), troviamo che:

$$(\mu - \lambda_s \sigma) S - rS = 0$$

cioè

$$\lambda_s = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

che è il prezzo di mercato del rischio per i beni. Ora ponendo  $\lambda_s = (\mu - r)/\sigma$  in (13), otteniamo:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

che è l'equazione di Black-Scholes che non contiene riferimenti a  $\mu$  o  $\lambda_s$ .

## 1.6 Soluzioni dell'equazione per il prezzo dei bond

L'esperienza mostra che i coefficienti in (8) devono avere una forma più complicata dei semplici coefficienti usati finora nel cammino casuale di base per i prezzi dei beni. In compenso, nella curva dei rendimenti abbiamo delle informazioni dettagliate sul comportamento di  $r$  ed è importante poter usare questi dati effettivamente. La soluzione del 'problema inverso', che consiste nella derivazione

del cammino casuale a partire dalla curva dei rendimenti, è molto più facile se si hanno formule esplicite che legano i prezzi dei bond ai tassi d'interesse. Dunque, consideriamo solo alcune forme funzionali di  $u$  e  $w$ , le quali hanno la forma più generale compatibile con una particolare classe trattabile di soluzioni dell'equazione del prezzo dei bond.

Assumiamo che  $w$  e  $u$  abbiano la forma

$$w(r, t) = \sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)} \quad (14)$$

$$u(r, t) = -\gamma(t)r + \eta(t) + \lambda(r, t)\sqrt{\alpha(t)r - \beta(t)}. \quad (15)$$

Le funzioni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  e  $\lambda$  che appaiono in precedenza sono funzioni nel tempo. Sono a nostra disposizione per adattare i dati per quanto possibile; si noti, tuttavia, che la forma speciale di queste equazioni lascia intendere che  $\lambda(r, t)$  non compare esplicitamente nell'equazione (11) per il prezzo dei bond. Restrungendo in modo adatto queste funzioni temporali, possiamo assicurare che il cammino casuale (8) per  $r$ , ha le seguenti proprietà economicamente plausibili:

- Possiamo evitare tassi d'interesse negativi: il tasso spot può essere limitato inferiormente da un numero positivo, se imponiamo che  $\alpha(t) > 0$  e  $\beta(t) \geq 0$ . Il limite inferiore è quindi  $\beta/\alpha$  (nel caso particolare in cui  $\alpha(t) = 0$ , dobbiamo prendere  $\beta(t) \leq 0$ ). Si noti che  $r$  può ancora andare all'infinito, sebbene con probabilità zero.
- Possiamo far diventare il tasso spot **mean reverting**. Per grandi (piccoli)  $r$  il tasso d'interesse tenderà a decrescere (crescere) verso la media, che può essere una funzione del tempo.

In più, richiediamo che se  $r$  raggiunge il suo limite inferiore  $\beta/\alpha$ , da lì in avanti incrementa. Questo vincolo è equivalente a forzare la seguente:

$$\eta(t) \geq \beta(t)\gamma(t)/\alpha(t) + \alpha(t)/2$$

che è discussa più avanti.

Ci sono molti modelli per i tassi d'interesse, associati al nome dei loro inventori.

L'equazione stocastica (8) incorpora i modelli di:

- Vasicek ( $\alpha = 0$ , nessuna dipendenza dal tempo nei parametri);

- Cox, Ingersoll e Ross ( $\beta = 0$ , nessuna dipendenza dal tempo nei parametri);
- Hull e White ( $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$ , ma tutti i parametri dipendenti dal tempo).

Con il modello (14) e (15), possiamo affermare che le condizioni di limite per la (11) sono, in primo luogo:

$$V(r, t) \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow \infty$$

e che, in secondo luogo, per  $r = \beta/\alpha$ ,  $V$  rimane finito<sup>2</sup>.

Perché abbiamo scelto le forme (14) e (15) per  $u$  e  $w$ ? Tutti i modelli menzionati in precedenza prendono forme funzionali speciali per i coefficienti di  $dt$  e  $dX$  nell'equazione differenziale stocastica per  $r$ , in modo tale che la soluzione di (11) è nella semplice forma<sup>3</sup>:

$$V(r, t) = Ze^{A(t;T) - rB(t;T)} . \quad (16)$$

Abbiamo mostrato la dipendenza di  $V$ ,  $A$  e  $B$  da  $T$ . Il modello con tutti gli  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  diversi da zero, è l'equazione differenziale stocastica più generale per  $r$ , che porta a una soluzione di (11) nella forma (16).

Questo può essere mostrato facilmente. Per prima cosa, si sostituisce (16) nell'equazione per il prezzo dei bond (11). Questo ci porta a:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - r \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 B^2 - (u - \lambda w) B - r = 0 . \quad (17)$$

Alcuni di questi termini sono funzioni di  $t$  e  $T$  (come  $A$  e  $B$ ) e altri sono funzioni di  $r$  e  $t$  ( $u$  e  $w$ ). Derivando (17) rispetto a  $r$ , si ottiene:

$$-\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2} B^2 \frac{\partial(w^2)}{\partial r} - B \frac{\partial(u - \lambda w)}{\partial r} = 0 .$$

---

<sup>2</sup> Quando  $r$  è limitato inferiormente da  $\beta/\alpha$ , un'analisi locale dell'equazione differenziale parziale può essere fatta vicino a  $r = \beta/\alpha$ . In breve, il bilanciamento dei termini  $\frac{1}{2}(\alpha r - \beta)\partial^2 V/\partial r^2$  e  $(\eta - \gamma r)\partial V/\partial r$ , mostra che la finitezza di  $V$  in  $r = \beta/\alpha$  è una condizione di limite sufficiente solo se  $\eta \geq \beta\gamma/\alpha - \alpha/2$ .

<sup>3</sup> L'esistenza di una soluzione semplice esplicita è un vantaggio ovvio in un modello, ma in genere non è una buona ragione per considerare un modello come rappresentativo del mondo reale. Tuttavia, la natura *inversa* delle curve dei rendimenti adattate rende questi modelli utili.

Dopo un'ulteriore derivazione rispetto a  $r$ , dividendo per  $B$  otteniamo:

$$\frac{1}{2}B \frac{\partial^2(w^2)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2(u - \lambda w)}{\partial r^2} = 0 .$$

Dato che  $B$  è una funzione di  $T$ , dobbiamo avere:

$$\frac{\partial^2(w^2)}{\partial r^2} = 0 , \quad (18)$$

e

$$\frac{\partial^2(u - \lambda w)}{\partial r^2} = 0 . \quad (19)$$

Dunque, arriviamo a (14) e (15) come scelte per  $u$  e  $w$ .

Omettiamo i dettagli, ma sostituendo (14) e (15) in (18) e (19) e uguagliando le potenze di  $r$  le equazioni seguenti per  $A$  e  $B$  diventano:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \eta(t)B + \frac{1}{2}\beta(t)B^2 , \quad (20)$$

e

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha(t)B^2 + \gamma(t)B - 1 . \quad (21)$$

Per soddisfare la condizione finale  $V(r, T) = Z$ , dobbiamo avere:

$$A(t; T) = 0 \text{ e } B(t; T) = 0 .$$

### 1.6.1 Analisi per i parametri costanti

La soluzione per  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  arbitrari è trovata integrando le due equazioni differenziali ordinarie (20) e (21). In genere questo non può essere fatto esplicitamente, ma un caso semplice che si può considerare si ha quando  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\eta$  sono tutte costanti. In questo caso è stato trovato che:

$$\frac{2}{\alpha}A = a\psi_2 \log(a - B) + (\psi_2 - \frac{1}{2}\beta)b \log((B + b)/b) + \frac{1}{2}B\beta - a\psi_2 \log(a) \quad (22)$$

e

$$B(t; T) = \frac{2(e^{\psi_1(T-t)} - 1)}{(\gamma + \psi_1)(e^{\psi_1(T-t)} - 1) + 2\psi_1} , \quad (23)$$

dove

$$b, a = \frac{\pm\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha}}{\alpha}$$

e

$$\psi_1 = \sqrt{\gamma^2 + 2\alpha} \quad \text{e} \quad \psi_2 = \frac{\eta + \alpha\beta/2}{a+b} .$$

Quando tutti e quattro i parametri sono costanti, è ovvio che sia  $A$  sia  $B$  siano funzioni della sola variabile  $\tau = T - t$ ; questo non sarebbe necessariamente il caso se nessuno dei parametri dipendesse dal tempo.

Una grande quantità di curve dei rendimenti può essere predetta dal modello, siano esse crescenti, decrescenti o gibbose. Per  $\tau \rightarrow \infty$

$$B \rightarrow \frac{2}{\gamma + \psi_1} ,$$

e la curva dei rendimenti  $Y$  ha un comportamento a lungo termine dato da

$$Y \rightarrow \frac{2}{(\gamma + \psi_1)^2} (\eta(\gamma + \psi_1) + \beta) .$$

Dunque, per parametri costanti e fissi, il modello porta a tassi d'interesse a lungo termine fissi, indipendenti dal tasso spot.

### 1.6.2 Adattare i parametri

Il processo stocastico generale sviluppato in questo capitolo coinvolge quattro parametri dipendenti dal tempo:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\eta$ . Se questi parametri sono assunti come costanti allora le forme esplicite per  $A$ ,  $B$  e, quindi, per i prezzi dei bond, possono essere ottenute facilmente.

Tuttavia, è facile immaginare che le attese del mercato nei confronti dei tassi d'interesse futuri cambino col tempo. Questa dipendenza dal tempo può, ad esempio, derivare dalla natura ciclica dell'economia. Diamo ora una panoramica dell'approccio possibile all'incorporazione di un parametro dipendente dal tempo nel modello generale, mentre gli altri tre parametri rimangono costanti. Quando si introducono questi parametri, si deve fare attenzione a quali informazioni sono disponibili dal mercato e a qual è la loro rilevanza rispetto ad esso. Segue adesso la metodologia di questa sezione. Insistiamo sul fatto che  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono costanti, mentre  $\eta$  è una funzione del tempo. Si può notare che questo ci dà libertà sufficiente per adattare esattamente la curva dei rendimenti del mercato.

Il primo passo è determinare  $\alpha$  e  $\beta$ . Ci sono informazioni sufficienti nei dati storici per trovarli, se conosciamo il limite inferiore per i tassi d'interesse e la



volatilità del tasso spot. Avendo determinato  $\alpha$  e  $\beta$ , dobbiamo trovare  $\gamma$ . Questo parametro è determinato considerando la correlazione tra il tasso spot e la pendenza della curva dei rendimenti. Infine, la funzione  $\eta(t)$  è scelta in modo da adattare esattamente l'intera curva dei rendimenti.

**Limitazione inferiore di  $r$**  Supponiamo di essere interessati alla valutazione di un bond di dieci anni. È possibile che un investitore abbia una visione del limite inferiore possibile per i tassi d'interesse nei prossimi dieci anni. In alternativa, potrebbe essere ragionevole postulare che un limite inferiore per i tassi d'interesse in questo periodo, sia simile al più piccolo valore raggiunto nei dieci anni precedenti. Questo è analogo a utilizzare la volatilità storica su un periodo comparabile con la vita di un'opzione come una misura di volatilità nel prezzo delle opzioni. Ad ogni modo, supponiamo che sia stato deciso un limite inferiore. In questo caso, la quantità  $\beta/\alpha$  è 'nota'.

**La volatilità del tasso spot** La volatilità del tasso spot è semplicemente

$$\sqrt{\alpha r - \beta}.$$

Di nuovo, questa quantità è facile da stimare, se si assume che non dipenda dal tempo. Dunque, dal limite inferiore storico e dalla volatilità corrente, abbiamo informazioni sufficienti per stimare sia  $\alpha$  sia  $\beta$ .

**La volatilità della pendenza della curva dei rendimenti** È facile risolvere (20) e (21) con le serie di Taylor per valori di  $t$  vicini a  $T$ . Tale analisi mostra che la curva dei rendimenti  $Y$ , che ora è data da

$$Y = \frac{-A + rB}{T - t},$$

può essere approssimata per tempi vicini alla maturazione da

$$Y \sim r - \frac{1}{2}(T - t)(\gamma r - \eta(0)) + \dots.$$

Possiamo vedere da questo, che la pendenza della curva dei rendimenti nel breve periodo (cioè per  $T = t$ ) è data da

$$s = \frac{1}{2}(\eta(0) - \gamma r). \quad (24)$$

Si noti che questo modello prevede che la pendenza dipenda dal tasso spot stesso.

Se il tasso spot è *mean-reverting*, che è il caso in cui  $\gamma(t)$  è positivo, un incremento del tasso spot  $r$  porta a un decremento della pendenza (24): se il tasso spot cresce, la curva dei rendimenti si appiattisce. Inoltre, come il tasso spot segue il cammino casuale, così fa anche la pendenza per il tasso a breve termine. Dato che essi sono collegati dall'equazione deterministica (24), queste variazioni sono correlate perfettamente da:

$$ds = -\frac{1}{2}\gamma dr .$$

Un esame dei dati per  $r$  ed  $s$  dà  $\gamma$  come meno due volte la covarianza di  $ds$  e  $dr$  diviso la varianza di  $dr$ . Potrebbe succedere che i dati ci diano un valore negativo per  $\gamma$ , così che il cammino casuale del tasso spot e quello della curva locale dei rendimenti siano correlati positivamente: se il tasso spot cala, la curva dei rendimenti diventa più ripida. Questo comportamento indica che il tasso spot non è *mean-reverting*.

**La curva dei rendimenti completa** Fin qui abbiamo impostato i valori dei parametri costanti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in modo semplice e pratico. Adesso prendiamo  $\eta(t)$  in modo da determinare esattamente la struttura dei termini nel mercato. Si può vedere che questo ci conduce a un'equazione integrale per  $\eta(t)$  che deve essere risolta numericamente tranne in alcuni semplici casi. Si può integrare l'equazione (20) esplicitamente per trovare:

$$A = -\frac{1}{2}\beta \int_t^T B^2(T-s)ds - \int_t^T \eta(s)B(T-s)ds , \quad (25)$$

dove  $B(T-s)$  è data dall'equazione (23) con un'ovvia notazione; è solamente una funzione di  $T-t$ . L'espressione (25) si conosce perfettamente tranne per l'integrale che contiene  $\eta(t)$ . Supponiamo di voler adattare la curva dei rendimenti una sola volta al tempo  $t^*$ . Il tasso spot associato al tempo  $t^*$  è  $r^*$ , la curva dei rendimenti, che conosciamo dai dati di mercato, è  $Y^*(T)$  e i quattro parametri del modello sono indicati con  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$  e  $\eta^*$ . Si utilizzano gli asterischi per indicare i valori dei dati e dei parametri al tempo  $t^*$ . Se sostituiamo la curva dei rendimenti nell'equazione (25), si ottiene che  $\eta^*(t)$  soddisfa l'equazione

integrale:

$$\int_{t^*}^T \eta^*(s)B(T-s)ds = Br^* - Y^*(T-t^*) - \frac{1}{2}\beta^* \int_{t^*}^T B^2(T-s)ds. \quad (26)$$

Questa equazione deve essere risolta per l'intervallo  $t^* \leq T < \infty$ . Una volta risolta l'equazione, sappiamo tutto di  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\gamma^*$  e  $\eta^*(t)$ . Sostituendole nell'equazione (23) si ottiene l'espressione per  $B$  che serve poi nell'equazione (25) per ricavare  $A$ . Il prezzo di qualsiasi bond è quindi dato da:

$$Ze^{A(t;T)-rB(t;T)}.$$

È possibile risolvere l'equazione (26) prendendo esattamente le trasformate di Laplace perché l'equazione stessa è di tipo Volterra con convoluzione del kernel. Sfortunatamente  $B$  non ha una trasformata semplice e quindi questo metodo risulta impraticabile. D'altra parte l'equazione integrale non è difficile da risolvere numericamente e quindi non insisteremo più del necessario su questo argomento. Quello che abbiamo ricavato è esattamente la curva dei rendimenti al tempo  $t^*$ . Per fare ciò abbiamo ricavato i tre parametri costanti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , e il parametro dipendente dal tempo  $\eta$ . Il modello è rigorosamente valido solamente se quando ricalcoliamo i parametri ad una data successiva, essi rimangono invariati. Questo è un caso improbabile perché il modello base (8) è stato scelto per le sue proprietà analitiche non tenendo conto di nessun modello economico. Questo risulta un difetto di molti modelli popolari attuali.

## 1.7 Il modello Vasicek esteso di Hull e White

Nel modello Vasicek (1977) esteso da Hull e White (1990) per includere parametri dipendenti dal tempo, si ha  $\alpha(t) = 0$  e  $\beta < 0$ . Sebbene Hull e White facciano una scelta sofisticata di  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  e  $\eta(t)$  (tutte dipendenti dal tempo) per adattare la volatilità del tasso spot, la volatilità della curva dei rendimenti per tutte le maturazioni ecc., noi assumiamo solamente  $\eta$  come variabile dipendente dal tempo come suggerito precedentemente. In questo modello  $\alpha = 0$  e si assume che  $\eta^*$  e  $\gamma^*$  sono state determinate al tempo  $t^*$ . In questo caso  $B(T-t)$  si semplifica in questo modo:

$$B(T-t) = \frac{1}{\gamma^*} \left( 1 - e^{-\gamma^*(T-t)} \right),$$

e l'equazione integrale per  $\eta^*$  diventa:

$$\int_{t^*}^T \eta^*(s) \left(1 - e^{-\gamma^*(T-s)}\right) ds = \gamma^* F^*(T) . \quad (27)$$

$F^*$  è una funzione nota in  $T$  equivalente al membro destro dell'equazione (26), che in particolare dipende dagli integrali di  $B$  e dallo stato corrente della curva dei rendimenti. Per ottenere una soluzione dell'equazione integrale deve valere  $F(0) = 0$  . Questo è proprio il caso che può essere visto per la parte destra dell'equazione (26). Sebbene l'equazione (27) possa essere risolta con il metodo della trasformata di Laplace come suggerito precedentemente, è particolarmente semplice risolvere l'equazione derivandola due volte rispetto al tempo  $T$ . Dopo aver applicato la prima derivata otteniamo:

$$\int_{t^*}^T \eta^*(s) e^{-\gamma^*(T-s)} ds = F^{*'}(T) ,$$

dove  $'$  rappresenta  $d/dT$ . Applicando la derivata seconda:

$$\eta^*(T) - \gamma^* \int_{t^*}^T \eta^*(s) e^{-\gamma^*(T-s)} ds = F^{*''}(T) .$$

Si può semplificare l'integrale tra le due espressioni per trovare che:

$$\eta^*(T) = F^{*''}(T) + \gamma^* F^{*'}(T) .$$

L'espressione  $\eta^*(T)$  è:

$$\eta^*(T) = -Y^{*''}(T) - \gamma^* Y^{*'}(T) - \beta^*(T - t^*) - \frac{\beta^*}{2\gamma^*} \left(1 - e^{-2\gamma^*(T-t^*)}\right) . \quad (28)$$

Da questa espressione si può trovare la funzione  $A(t; T)$  usando l'equazione (20).

## 1.8 Opzioni Bond

Il modello teorico per il tasso spot presentato precedentemente, permette di valutare *contingent claims* come opzioni bond. Un'**opzione bond** è identica a un'opzione con la differenza che il bene sottostante è un bond. Esistono sia la versione Europea che la versione Americana. Come semplice esempio, possiamo ricavare l'equazione differenziale soddisfatta da un'opzione call, con prezzo di esercizio pari ad  $E$ , data di scadenza  $T$  su un bond a zero cedola con data di maturazione  $T_B \geq T$ . Prima di trovare il valore dell'opzione per comprare il

bond, è necessario trovare il valore del bond stesso. Scriviamo  $V_B(r, t; T_B)$  per il valore del bond. Allora  $V_B$  soddisfa:

$$\frac{\partial V_B}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_B}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V_B}{\partial r} - rV_B = 0 \quad (29)$$

con la condizione:

$$V_B(r, T_B, T_B) = Z ,$$

e condizioni di limite adatte. Ora sia  $C_B(r, t)$  il valore dell'opzione call su questo bond. Siccome  $C_B$  dipende anche dalla variabile casuale  $r$ , deve soddisfare l'equazione (29). L'unica differenza riguarda il valore finale dell'opzione che è dato da:

$$C_B(r, T) = \max(V_B(r, t; T_B) - E, 0) .$$

Questa idea può essere generalizzata come vedremo.

## 1.9 Altri tassi di interesse per i prodotti

Esiste un grande, e sempre crescente, numero di diversi tassi di interesse per i prodotti derivati. In questo testo vengono presi in considerazione solamente quelli più comuni. In ogni caso, gli esempi che seguono mostrano il modo in cui molti di questi prodotti possono ridursi all'ambiente delle equazioni differenziali parziali.

### 1.9.1 Swaps

Uno **swap** di interessi è un accordo tra due parti per scambiare i pagamenti del tasso di interesse su una certa somma per un certo periodo di tempo. Una parte paga all'altra un tasso fisso di interesse in cambio di un pagamento di un tasso di interesse variabile. Per esempio  $A$  paga il 9% di 1000000 di dollari all'anno a  $B$  e  $B$  paga  $r$  sulla stessa cifra ad  $A$ . Supponiamo che questo accordo debba durare per tre anni. Valutiamo adesso questi swap in generale. Supponiamo che  $A$  paghi l'interesse su una somma  $Z$  a  $B$  con un certo tasso fissato  $r^*$  e che  $B$  paghi ad  $A$  l'interesse con un tasso variabile  $r$ . Questi pagamenti avvengono fino ad un tempo  $T$ . Indichiamo con  $Z = V(r, t)$  il valore di questo swap per  $A$ . Possiamo adattare questo prodotto nell'ambiente per il tasso di interesse osservando che in un intervallo di tempo  $dt$ ,  $A$  riceve  $(r - r^*)Zdt$ . Se pensiamo

a questo pagamento come se fosse simile al pagamento di una cedola su un bond semplice, allora si trova che:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + (r - r^*) = 0 ,$$

con la condizione finale:

$$V(r, T) = 0 .$$

Bisogna osservare che  $r$  può essere più grande o più piccolo di  $r^*$  e quindi  $V(r, t)$  potrebbe non essere un valore positivo. Infatti uno swap di interessi non è necessariamente un bene, ma può essere un debito che dipende, per esempio, dallo stato corrente della curva dei rendimenti.

### 1.9.2 Caps e floors

Un **cap** è un prestito a tasso di interesse variabile con la condizione che il tasso di interesse addebitato non superi un valore specifico, detto appunto **cap**, che viene indicato con  $r^*$ . Il prestito di  $Z$  deve essere rimborsato al tempo  $T$ . Si può facilmente vedere che il valore del prestito limitato,  $Z = V(r, t)$ , soddisfa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + \min(r, r^*) = 0 , \quad (30)$$

con la condizione finale:

$$V(r, T) = 1 .$$

Una **floor** è simile al cap con la differenza che il tasso di interesse non scende sotto  $r^*$ . Per valutare questo tipo di contratto basta sostituire nell'equazione (30) alla funzione  $\min(r, r^*)$  la funzione  $\max(r, r^*)$ .

### 1.9.3 Swaptions, Captions e Floortions

Dopo aver analizzato swaps, caps e floors, è facile valutare le opzioni su questi strumenti: **swaptions**, **captions** e **floortions**. Supponiamo che il nostro swap (cap o floor) che scade al tempo  $T_S$  abbia valore  $V_S(r, t)$  per  $t \leq T_S$ . Un'opzione per comprare questo contratto swap (call swaption) a un prezzo  $E$  al tempo  $T < T_S$ , ha valore  $V(r, t)$  dove:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 ,$$

con la condizione:

$$V(r, T) = \max(V_S(r, T) - E, 0) .$$

Quindi risolviamo il problema innanzitutto calcolando il valore di swap stesso e poi utilizziamo questo valore come condizione finale per calcolare il valore di swaption. Captions e floortions sono trattate in modo analogo.

## 2 Bond convertibili

### 2.1 Introduzione

In questo capitolo conclusivo vengono riuniti i modelli per i prezzi dei beni e per i tassi di interesse, in modo da modellare titoli che dipendono da entrambi. Per semplicità, ci concentriamo sulla valutazione di bond convertibili, sebbene le idee possano essere applicate anche in altri ambiti. Se si assumono dei tassi di interesse deterministici, questi bond risultano molto simili alle opzioni Americane vaniglia. Per prima cosa viene illustrata l'idea utilizzando dei tassi di interesse costanti e alla fine del capitolo vengono brevemente riuniti i bond convertibili con i tassi di interesse stocastici in un modello a due fattori (*two-factor model*).

### 2.2 Bond convertibili

Un **bond convertibile** ha le stesse caratteristiche di un bond ordinario con la proprietà aggiuntiva che il suo possessore potrebbe scambiarlo in ogni istante per un determinato bene. Questo scambio è chiamato **conversione**. Un bond convertibile su un bene sottostante (con prezzo  $S$ ) ha un ricavo di  $Z$  al tempo  $T$  a meno che in qualche momento precedente il possessore del bond non lo abbia convertito in  $n$  beni sottostanti<sup>4</sup>. Il bond potrebbe anche pagare una cedola al proprietario.

Siccome il prezzo del bond dipende dal valore del bene abbiamo che:

$$V = V(S, t) ;$$

il valore del contratto in questo modo dipende dal valore del bene. Ovviamente dipende anche dal tempo di maturazione, ma di solito si elimina questo vincolo. Ripetendo l'analisi Black-Scholes, con un portfolio composto da un bond convertibile e  $-\Delta$  beni, si trova che il cambio nel valore del portfolio è dato da:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS + K(S, t) dt ,$$

---

<sup>4</sup>Abbiamo implicitamente assunto che il numero di beni controllati da tutti i bond convertibili esistenti è piccolo e che la conversione non influenza il valore della società di emissione. Per ulteriori dettagli vedere il punto tecnico più avanti.



dove  $K(S, t)dt$  è il pagamento della cedola sul bond. Come abbiamo visto in precedenza si sceglie:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} ,$$

per eliminare il rischio da questo portfolio.

Il ricavo su questo portfolio libero da rischio è al più quello di un deposito bancario, cioè:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (rS - D(S, t)) \frac{\partial V}{\partial S} - rV + K(S, t) \leq 0$$

Questa disequazione è nota come la disequazione base di Black-Scholes con l'aggiunta del termine  $K(S, t)$ . La condizione finale è:

$$V(S, T) = Z .$$

Ricordando che il bond potrebbe essere convertito in  $n$  beni si ha il vincolo:

$$V \geq nS .$$

Oltre a questo vincolo si richiede la continuità di  $V$  e  $\partial V/\partial S$ . Quindi è chiaro che il problema dei bond convertibili è simile a quello per le opzioni Americane. È inoltre interessante notare che il dato finale stesso non soddisfa il vincolo del prezzo.

Quindi nonostante il valore al tempo  $T$  possa essere  $Z$ , il valore in un istante di tempo precedente è dato da:

$$\max(nS, Z) .$$

Le condizioni di limite sono:

$$V(S, t) \sim nS \quad \text{per} \quad S \rightarrow \infty ,$$

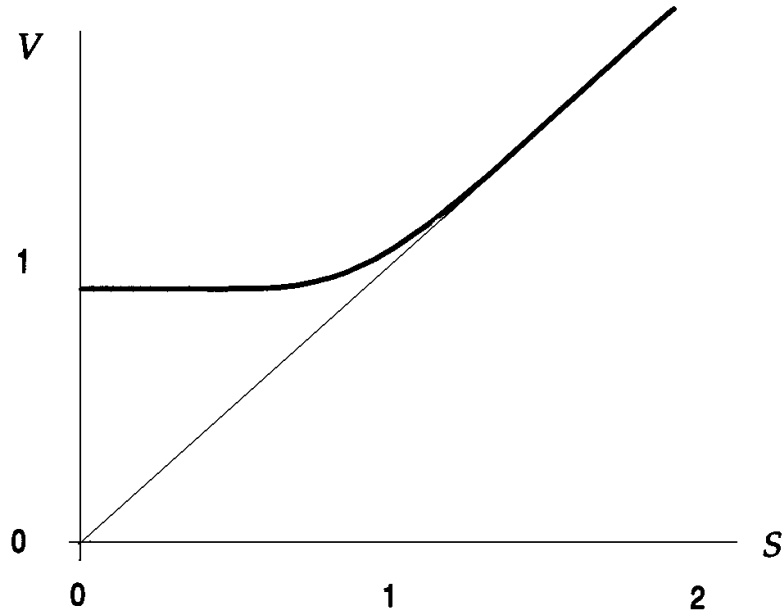
e

$$V(0, t) = Ze^{-r(T-t)} ;$$

quest'ultima condizione indica che non è ottimale esercitarla quando  $S = 0$ .

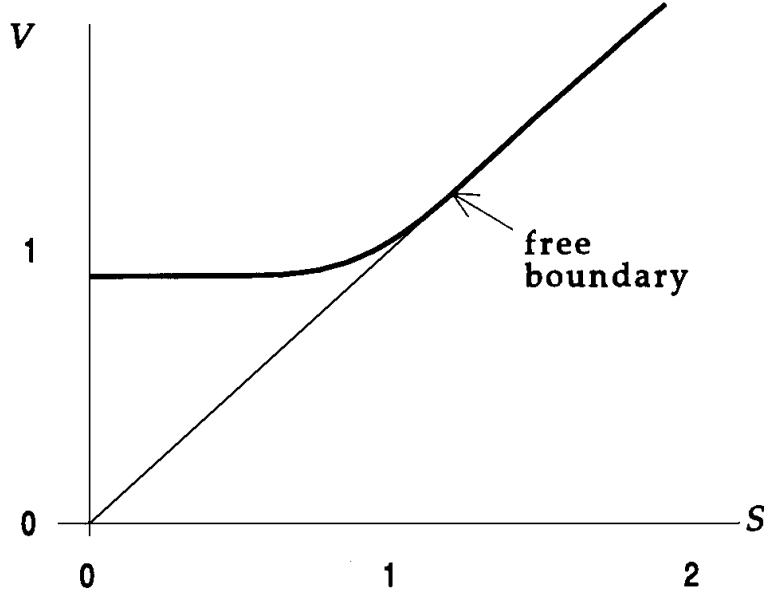
Questo problema è facile da risolvere numericamente come un problema per le opzioni Americane. Si può vedere che un incremento in  $D$  (rispettivamente in  $K$ ) produce l'esercizio anticipato con maggiore (minore) probabilità. Quando

$K = D = 0$ , il vincolo entra in gioco solo alla scadenza e il bond convertibile può essere valutato esplicitamente come combinazione tra liquidità e una call di un'opzione Europea.



**Figura 2:** Valore di un bond convertibile con tasso di interesse costante.

In figura (2) e (3) vengono mostrati i valori di bond convertibili con  $Z = 1$ ,  $n = 1$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.25$  e con un anno di maturazione. In entrambi i casi non è previsto nessun pagamento della cedola. Mentre in figura (2) non compare il dividendo, in figura (3) si ha  $D_0 = 0.05$ ; quindi in questo caso compare un limite libero. Per un valore  $S$  sufficientemente grande il bond dovrebbe essere convertito. A volte il bond può essere convertito solamente durante specifici periodi. Questa situazione viene chiamata **conversione intermittente**. Se ci troviamo in questo caso allora il vincolo ha bisogno di essere soddisfatto solo nei periodi specifici; negli altri casi si considera il contratto di tipo Europeo.



**Figura 3:** Valore di un bond convertibile con tasso di interesse costante e dividendo pari a  $D_0 = 0.05$ .

### 2.2.1 Call e put features

Un bond convertibile permette al possessore di scambiare il bond per un certo numero di beni sottostanti in qualsiasi momento voglia. Qualche bond possiede anche la **call feature** che dà alla società il diritto di ricomprare il bond in qualsiasi momento (o in un determinato periodo) per una somma fissata. Un bond che possiede la call feature ha un valore minore rispetto ad uno normale in quanto viene ceduto un diritto alla società. È semplice modellare la call feature. Supponiamo che un bond può essere ricomprato da una società per un importo pari a  $M_1$ . Eliminando le possibilità di arbitraggio otteniamo:

$$V(S, t) \leq M_1 .$$

Quindi dobbiamo risolvere un problema vincolato nel quale il nostro prezzo del bond è limitato inferiormente da  $nS$  e superiormente da  $M_1$ . Se  $nS > M_1$  il bond dovrebbe essere stato convertito oppure dovrebbe essere stata eseguita la call da parte della società; in ogni caso non dovrebbe più esistere. Si richiede

nuovamente la continuità di  $V$  e  $\partial V/\partial S$ . Come per la conversione intermittente è possibile introdurre la call feature intermittente secondo la quale la società può ricomprare il bond solo durante certi periodi di tempo.

Alcuni bond convertibili incorporano anche la **put feature**. Questo è un diritto ulteriore appartenente al possessore del bond. Permette infatti di ridare indietro il bond alla società per un importo pari ad  $M_2$ . Quindi dobbiamo imporre il vincolo:

$$V(S, t) \geq M_2 .$$

Ovviamente tale vantaggio fa aumentare il valore del bond.

### 2.3 Bond convertibili con tasso di interesse stocastico

Quando i tassi di interesse sono stocastici, un bond convertibile ha un valore della forma:

$$V = V(S, r, t) ,$$

con la dipendenza da  $T$  eliminata. Il valore del bond convertibile è adesso in funzione delle variabili indipendenti  $S$  e  $r$  (precedentemente  $r$  veniva considerato come un parametro). Assumiamo che il prezzo del bene sia regolato dal modello standard:

$$dS = \sigma S dX_1 + \mu S dt , \quad (31)$$

e il tasso di interesse sia dato da:

$$dr = w(r, t) dX_2 + u(r, t) dt . \quad (32)$$

Siccome stiamo modellando solamente il bond e non vogliamo trovare soluzioni esplicite, ci permettiamo di considerare  $u$  e  $w$  due funzioni qualsiasi di  $r$  e  $t$ . Osserviamo che nelle equazioni (31) e (32) i processi di Wiener sono stati dati sottoscritti. Questo perché si permette ad  $S$  ed  $r$  di dipendere da due differenti variabili casuali; questo è il **modello a due fattori**. Quindi, nonostante  $dX_1$  e  $dX_2$  siano entrambe distribuzioni normali con media uguale a 0 e varianza pari a  $dt$ , non rappresentano necessariamente la stessa variabile casuale. Tuttavia ipotizziamo che siano correlate dalla seguente relazione:

$$\varepsilon [dX_1, dX_2] = \rho dt ,$$

dove  $-1 \leq \rho(r, S, t) \leq 1$ . Si possono comunque considerare le equazioni (31) e (32) come indicazioni da seguire per generare i cammini casuali per  $S$  ed  $r$ , ma dove adesso ad ogni istante dobbiamo considerare due numeri casuali. Questa è la nostra prima ed unica esperienza in cui ci troviamo di fronte un modello a due fattori, nel quale sono presenti due fonti di rischio e quindi due variabili indipendenti oltre  $t$ . Per manipolare  $V(S, r, t)$  abbiamo bisogno di sapere come si applica il lemma di Itô per funzioni con due variabili casuali. Come ci si potrebbe aspettare, la classica espansione in serie di Taylor con l'aggiunta di alcune regole pratiche ha come risultato la corretta espressione per ogni piccola variazione in ogni funzione di  $S$  e  $r$ . Queste regole pratiche sono:

- $dX_1^2 = dt$ ;
- $dX_2^2 = dt$ ;
- $dX_1 dX_2 = \rho dt$ .

Applicando il teorema di Taylor a  $V(S + dS, r + dr, t + dt)$  si ottiene:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dS dr + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dr^2 \right) + \dots,$$

e

$$dS^2 = \sigma^2 S^2 dX_1^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

$$dr^2 = w^2 dX_2^2 = w^2 dt$$

$$dS dr = \sigma S w dX_1 dX_2 = \rho \sigma S w dt$$

Quindi il lemma di Itô per le due variabili casuali dipendenti dalle equazioni (31) e (32) diventa:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) dt. \quad (33)$$

A questo punto concentriamoci sul prezzo del bond convertibile. Costruiamo un portfolio che consiste di un unico bond con tempo di maturazione  $T_1, -\Delta_2$

bond con data di maturazione  $T_2$  e  $-\Delta_1$  beni sottostanti. Allora il valore del portfolio  $\Pi$  è dato da:

$$\Pi = V_1 - \Delta_2 V_2 - \Delta_1 S .$$

Scegliendo come nei casi precedenti i valori:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \\ \Delta_1 &= \frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} ,\end{aligned}$$

si elimina il rischio dal portfolio. I termini delle equazioni che contengono  $V_1$  e  $V_2$  potrebbero essere raggruppati insieme separatamente per ottenere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) + \\ + rS \frac{\partial V}{\partial S} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 ,\end{aligned}$$

dove ancora una volta  $\lambda(r, S, t)$  rappresenta il prezzo di mercato del rischio del tasso di interesse. Quella che abbiamo ricavato è l'equazione del prezzo del bond convertibile. Si può osservare che incorpora sia il problema del tasso di interesse ( $u = 0 = w$ , Black-Scholes) sia il problema del bond semplice ( $\partial/\partial S = 0$ ) come casi speciali. Più in generale quando il bene sottostante paga dei dividendi e il bond paga una cedola si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\sigma Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) + \\ + (rS - D) \frac{\partial V}{\partial S} + (u - w\lambda) \frac{\partial V}{\partial r} - rV + K = 0 .\end{aligned}$$

La condizione finale e i vincoli Americani sono esattamente quelli visti precedentemente; c'è un vincolo per la convertibilità e un vincolo per la call feature. Siccome questa è un'equazione di diffusione con due variabili di stato 'spaziali'  $S$  ed  $r$  (esistono cioè le derivate seconde di  $V$  sia rispetto a  $S$  che  $r$ ), c'è bisogno di imporre condizioni di limite sullo spazio  $(S, r)$ . In altre parole, dobbiamo vedere cosa succede per  $V(0, r, t)$  e  $V(\infty, r, t)$  per ogni  $t$ ,  $V(S, \infty, t)$  per ogni  $S$  e  $t$  e cosa succede con una seconda condizione di limite su un  $r$  fissato per tutti gli  $S$  e  $t$ . Alcune di queste condizioni di limite sono ovvie, mentre altre sono ricavate sapendo che  $V$  rimane una quantità finita. Per esempio per un bond

convertibile per il quale non si può effettuare una call si ha:

$$V(S, r, t) \sim nS \quad \text{per} \quad S \rightarrow \infty ;$$

$V(0, r, t)$  è ottenuto risolvendo il problema del bond semplice (senza considerare convertibilità e tassi di interesse stocastici);

$$V(S, r, t) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad r \rightarrow \infty ;$$

e l'ultima condizione di limite, per essere applicata ad un limite  $r$  inferiore, è equivalente alla limitatezza di  $V$ .

**Punto Tecnico: Emissione di nuove quote.** In questo capitolo abbiamo supposto che l'esistenza di bond convertibili non influenzi il valore di mercato della compagnia. In realtà, la conversione del bond in  $n$  quote richiede alla compagnia l'emissione di  $n$  nuove quote. Questo è in contrasto con le opzioni per le quali l'esercizio lascia inalterato il numero di quote. Non descriviamo in dettaglio la questione: comunque se  $S$  è il valore dei beni della società, senza considerare i bond, ed  $N$  il numero di quote prima della conversione, si arriva al seguente problema. L'equazione del prezzo del bond convertibile (con tasso di interesse costante o stocastico) è risolta tenendo conto dei seguenti vincoli:

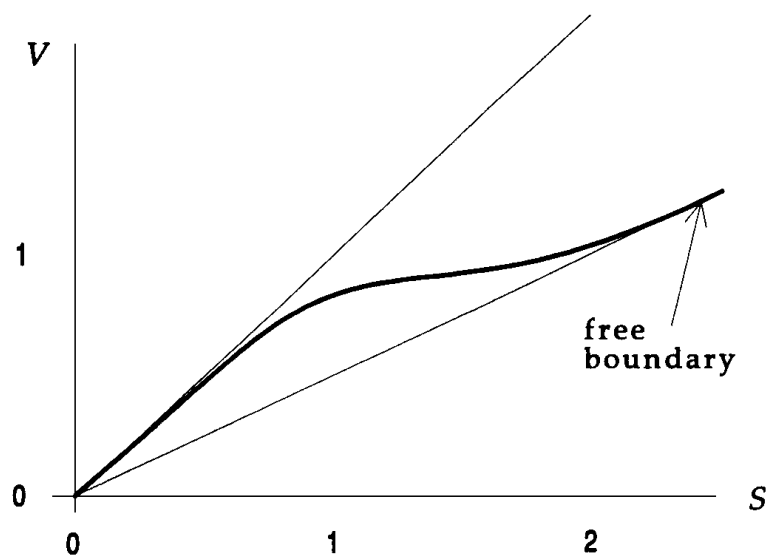
$$V \geq \frac{nS}{n+N} \tag{34}$$

$$V \leq S \tag{35}$$

$$V(S, T) = Z$$

Il vincolo (34) limita inferiormente il prezzo del bond dal suo valore di conversione, mentre il vincolo (35) permette alla società di dichiarare il fallimento se il bond diventa troppo prezioso. Il fattore  $N/(n+N)$  è noto come 'diluizione'. Un tipico esempio del prezzo di un bond convertibile è riportato in figura (4).

In questo esempio abbiamo preso i seguenti valori:  $Z = 1$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $D_0 = 0.05$ , il tempo di maturazione è un anno e il fattore  $N/(n+N) = 0.5$ . Nel limite  $n/N \rightarrow 0$  questo modello è identico a quello considerato precedentemente.



**Figura 4:** Valore di un bond convertibile nei confronti dei beni della società, permettendo il fattore di diluizione sull'emissione di nuove quote.

Bisogna osservare che il valore totale della società è  $S - V$  e quindi il prezzo delle azioni è  $(S - V)/N$  e non  $S$ .



## A Glossario economico

**Arbitraggio:** è un'operazione che consiste nell'acquistare un bene o un'attività finanziaria su un mercato rivendendolo su un altro mercato sfruttando le differenze di prezzo per ottenere un profitto senza rischio. Nel determinare il profitto devono essere inclusi i costi di trasferimento del bene da un mercato all'altro. L'arbitraggio si differenzia dalla speculazione perché quest'ultima sfrutta le differenze di prezzo di uno stesso bene in tempi diversi e non in luoghi diversi.

**Bene (Asset):** qualsiasi prodotto finanziario il cui valore è quotato o può in linea di principio essere misurato. Possono far parte di questo insieme merci, materie prime e valute e così via.

**Bond:** è un titolo di credito emesso da società o enti pubblici che conferisce al soggetto che ha comprato il bond il diritto di essere rimborsato del capitale prestato più un certo ammontare di interessi. Il bond consiste quindi in una forma di debito che l'ente emittente si assume verso i propri investitori. Il soggetto che acquista il bond diventa a tutti gli effetti creditore dell'ente emittente. Lo scopo di un'emissione obbligazionaria è il reperimento di liquidità. Solitamente il rimborso del capitale avviene alla scadenza in un'unica soluzione, mentre l'interesse viene liquidato periodicamente ed è chiamato *cedola*. Vi sono varie categorie di bond. Ad esempio i bond a zero cedole non presentano alcuna cedola e quindi non liquidano periodicamente gli interessi, ma li corrispondono alla scadenza del titolo; i bond convertibili incorporano la facoltà di convertire il prestito obbligazionario in beni, secondo un rapporto di cambio predeterminato.

**Cap:** è un prestito a tasso di interesse variabile con la condizione che il tasso di interesse addebitato non superi un valore specifico, detto cap.

**Cedola:** molto spesso la cedola viene erroneamente confusa con il dividendo; mentre quest'ultimo nasce da un utile, la cedola nasce da un debito. Il debito contratto da un soggetto tramite bond ad esempio, viene onorato alle scadenze previste dal pagamento degli interessi pattuiti secondo le regole contrattuali, che chiamiamo appunto cedola.

**Dividendo:** è quella parte di utile che viene distribuito da una società ai suoi azionisti.

**Floor:** è un prestito a tasso di interesse variabile con la condizione che il tasso di interesse addebitato non scenda al di sotto di un valore prestabilito, detto floor.

**Formula di Black-Scholes:** è una formula matematica per il prezzo di non arbitraggio di un'opzione di tipo Europeo ottenuta sulla base del modello Black-Merton-Scholes.

**Forwards e Futures:** sono due tipi di contratto. Il contratto Forward è un accordo sottoscritto tra due controparti per acquistare o vendere un certo bene ad un prezzo stabilito (prezzo Forward) ad una data specifica nel futuro (data di maturazione). I contratti Futures sono contratti Forwards ma regolamentati all'interno di un mercato borsistico. La Borsa deve specificare le caratteristiche dell'attività sottostante, l'ammontare che il venditore deve consegnare per ogni contratto stipulato, il luogo di consegna e così via.

**Hedging (Copertura):** strategia di investimento che mira a ridurre il rischio di un investimento mediante l'utilizzo di strumenti derivati. L'utilizzo di tali strumenti finanziari riduce la volatilità di un portfolio riducendo di conseguenza la possibilità di perdite.

**Opzione:** è un contratto che sancisce il diritto a chi lo sottoscrive, in seguito al pagamento di un premio, di acquistare (call) o vendere (put) un prodotto finanziario a un prezzo stabilito e ad una scadenza prefissata. Esistono diverse categorie di opzioni: le principali sono quelle Europee e Americane. Quando un'opzione è di tipo Europeo la facoltà di esercitarla è limitata alla sola data di scadenza. Nel caso delle opzioni Americane la facoltà di esercitare l'opzione può avvenire in qualunque momento fino alla data di scadenza. Le opzioni Europee e Americane vengono dette *vaniglia* in contrapposizione con opzioni più complesse dette *esotiche*. Quest'ultime sono caratterizzate dall'aggiunta di clausole ulteriori che possono valutare l'evoluzione della quotazione del titolo (opzioni dipendenti dal cammino) o

definirne alcuni limiti di validità. Un esempio di opzione esotica è l'opzione *asiatica* in cui il pay off dipende dalla media dei prezzi del bene nel periodo considerato.

**Pay off:** rappresenta il valore terminale del contratto.

**Portfolio:** è un'insieme di attività finanziarie possedute da un investitore.

**Prezzo d'esercizio:** è la variabile chiave che caratterizza uno strumento derivato. Indica il prezzo al cui valore può essere esercitato uno specifico contratto derivato. Se come strumento derivato consideriamo un'opzione, il prezzo di esercizio indica proprio il prezzo a cui si acquista o si cede il bene sottostante esercitando il diritto sull'opzione.

**Strumento derivato:** è considerato ogni titolo il cui valore si basa sul valore di mercato di altri beni. Esistono diverse tipi di strumenti derivati: tra le tipologie maggiormente diffuse e conosciute è possibile trovare le opzioni, i forward e i futures. Gli strumenti derivati possono essere utilizzati a fine di copertura (hedging) come forma di assicurazione contro i possibili rischi dei mercati o a fini speculativi, con lo scopo di ottenere profitti economici sfruttando la loro volatilità.

**Swap:** appartiene alla categoria degli strumenti derivati e consiste nello scambio di flussi monetari tra due controparti. Lo swap nella sua forma elementare è un accordo che prevede che due contraenti si scambino dei flussi finanziari calcolati con un criterio prestabilito a date prefissate. Il primo e più semplice tipo di swap è lo swap di interessi, un contratto che contempla lo scambio di interessi calcolati su un determinato ammontare prefissato chiamato nozionale.

**Tasso di interesse:** rappresenta la misura dell'interesse su un prestito e l'importo della remunerazione spettante al prestatore.

**Tasso spot:** è il tasso di interesse per il più corto deposito possibile.

**Titolo:** è uno strumento finanziario che indica un impiego di capitale nelle quote di debito o nelle quote di capitale di un ente. Nel primo caso si

parla di titoli obbligazionari (bond), mentre nel secondo caso di titoli azionari.

**Volatilità:** è una misura del rischio che l'investimento in attività finanziarie comporta per l'investitore. In pratica rappresenta il grado di variazione dei prezzi di un'attività finanziaria in un determinato periodo di tempo. Una elevata volatilità, nell'ambito di un investimento in titoli, indica che il prezzo di un titolo tende ad ampie oscillazioni nel tempo da cui l'investitore può ottenere elevati guadagni o elevate perdite.