

Università degli Studi di Firenze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Anno Accademico 2010/2011

Metodi di Ottimizzazione nella Finanza

Relazione: Nicola Sirdone

1 Introduzione

L'ottimizzazione è una branca della matematica applicata che riceve la sua importanza sia dalla varietà delle sue applicazioni, sia dalla disponibilità di algoritmi efficienti. Matematicamente, si tratta di trovare il minimo (o il massimo) di una data *funzione obiettivo* con alcune *variabili decisionali* che soddisfano dei *vincoli*. Un tipico modello di ottimizzazione si occupa di assegnare scarse risorse tra le possibili alternative con lo scopo di massimizzare una funzione obiettivo come il profitto totale. Le variabili decisionali, la funzione obiettivo e i vincoli sono i 3 elementi essenziali di qualsiasi problema di ottimizzazione. Problemi dove mancano vincoli sono chiamati problemi di *ottimizzazione non-vincolati*, mentre gli altri sono spesso definiti come *problemi vincolati*. Problemi senza la funzione obiettivo sono chiamati problemi di *ammissibilità*. Alcuni problemi potrebbero avere più funzioni obiettivo. Questi problemi sono spesso risolti attraverso la loro riduzione a un problema di ottimizzazione con una singola funzione obiettivo o a una sequenza di questo tipo di problemi. Se le variabili decisionali in un problema di ottimizzazione sono limitate agli interi, o a un insieme discreto di possibilità, abbiamo un problema di *ottimizzazione intera* o *discreta*. Se non ci sono questi tipi di restrizioni sulle variabili, si parla di problema di *ottimizzazione continua*. Chiaramente, alcuni problemi possono avere un misto di variabili discrete e continue. Continuiamo con una lista delle classi di problemi di ottimizzazione.

2 Problemi di Ottimizzazione

Partiamo con una descrizione generica di un problema di ottimizzazione. Data una funzione $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$, il problema di trovare un $x^* \in \mathbb{R}^n$ che risolve:

$$\min_x f(x) \quad \text{t.c.} \quad x \in S \quad (1)$$

è chiamato problema di ottimizzazione. f è la *funzione obiettivo* e S è la *regione di ammissibilità*. Se S è vuoto, il problema è chiamato *non ammissibile*. Se è possibile trovare una sequenza $x^k \in S$ tale che $f(x^k) \rightarrow -\infty$ con $k \rightarrow +\infty$, allora il problema è *non limitato*. Se il problema non è né non ammissibile né non limitato, allora è spesso possibile trovare una soluzione $x^* \in S$ che soddisfa

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S.$$

Questo x^* è chiamato un *minimo globale* del problema (1). Se

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in S, \quad x \neq x^*,$$

allora x^* è chiamato *minimo globale stretto*. In altri casi, possiamo solo trovare un x^* che soddisfa

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S \cap B_{x^*}(\epsilon)$$

per qualche $\epsilon > 0$, dove $B_{x^*}(\epsilon)$ è una palla aperta di raggio ϵ e centrata in x^* , cioè

$$B_{x^*}(\epsilon) = \{x : \|x - x^*\| < \epsilon\}.$$

Questo x^* è chiamato *minimo locale* del problema (1). Un *minimo locale stretto* è definito in modo simile. In molti casi, l'insieme ammissibile S è descritto

esplicitamente usando vincoli funzionali (uguaglianze e disuguaglianze). Per esempio, S può essere definito da

$$S := \{x : g_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \text{ e } g_i(x) \geq 0, i \in \mathcal{I}\},$$

dove \mathcal{E} e \mathcal{I} sono gli insiemi di indici dei vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza. Allora il nostro generico problema di ottimizzazione prende la seguente forma:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{2}$$

Molti fattori influiscono sul fatto che il problema di ottimizzazione possa essere risolto efficientemente. Per esempio, il numero n di variabili decisionali, e il numero totale di vincoli $|\mathcal{E}| + |\mathcal{I}|$, generalmente sono una buona predizione di quanto difficile potrà essere risolvere il dato problema di ottimizzazione. Altri fattori sono collegati alle proprietà della funzione f e g_i che definiscono il problema. Problemi con una funzione obiettivo lineare e vincoli lineari sono più semplici, poiché sono problemi con una funzione obiettivo convessa e insiemi di ammissibilità convessi. Per questa ragione, invece di algoritmi dal generale obiettivo di ottimizzazione, i ricercatori hanno sviluppato algoritmi differenti per problemi con caratteristiche speciali. Facciamo una lista dei principali tipi di problemi di ottimizzazione.

2.1 Programmazione Lineare e Non Lineare

Uno dei più comuni e dei più semplici problemi di ottimizzazione è l'*ottimizzazione lineare* o *programmazione lineare* (LP). È il problema di ottimizzare una funzione obiettivo lineare soggetta a vincoli di uguaglianza e disuguaglianza lineari. Questo corrisponde al caso in cui le funzioni f e g_i nella (2) sono tutte lineari. Se f o una delle funzioni g_i è non lineare, allora il problema che ne deriva è un problema di *programmazione nonlineare* (NLP). La forma standard del LP è:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sono date, e $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle variabili da determinare. Intendiamo un k -vettore come una matrice $k \times 1$. Per una matrice M $m \times n$, la notazione M^T denota la matrice *trasposta*, cioè la matrice $n \times m$ con $M_{ij}^T = M_{ij}$. Come esempio, nella formulazione precedente c^T è una matrice $1 \times n$ e $c^T x$ è una matrice 1×1 con $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. L'obiettivo nella (3) è di minimizzare la funzione lineare $\sum_{j=1}^n c_j x_j$. Come nella (2), il problema (3) è chiamato *ammissibile* se i suoi vincoli sono consistenti ed è chiamato *non limitato* se esiste una sequenza di vettori ammissibili $\{x^k\}$ tale che $c^T x^k \rightarrow -\infty$. Quando (3) è ammissibile ma non non-limitata allora ha una *soluzione ottima*, cioè, un vettore x che soddisfa i vincoli e minimizza il valore della funzione obiettivo tra tutti i vettori ammissibili. Definizioni simili si applicano ai problemi di programmazione non lineari. Il più conosciuto e il

più efficace metodo per risolvere i LP sono il metodo del simplesso e i metodi interior-point. I NLP possono essere risolti usando tecniche di ricerca usando il gradiente, così come approcci basati sul metodo di Newton come i metodi interior point e sequential quadratic programming.

2.2 Programmazione Quadratica

Un problema di ottimizzazione più generale è la *ottimizzazione quadratica* o problema di *programmazione quadratica* (QP), dove la funzione obiettivo è ora una funzione quadratica delle variabili. La forma standard QP è definita come segue:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono date, e $x \in \mathbb{R}^n$. Poiché $x^T Qx = \frac{1}{2}x^T(Q + Q^T)x$, possiamo assumere senza perdita di generalità che Q sia *simmetrica*, ovvero $Q_{ij} = Q_{ji}$. La funzione obiettivo del problema (4) è una funzione convessa di x dove Q è una *matrice semidefinita positiva*, ovvero, quando $y^T Qy \geq 0$ per ogni y . Questa condizione è equivalente all'avere solo autovalori non negativi. Quando questa condizione è soddisfatta, il problema QP è un problema di ottimizzazione convessa e può essere risolto in un *tempo polinomiale* usando metodi interior-point. Qui ci riferiamo a una notazione classica usata per misurare la complessità computazionale. Gli algoritmi a tempo polinomiale sono efficienti nel senso che trovano sempre la soluzione ottima in un tempo che è garantito essere al più una funzione polinomiale della grandezza dell'input.

2.3 Ottimizzazione Conica

Un'altra generalizzazione della (3) si ottiene quando i vincoli non negativi $x \geq 0$ sono sostituiti da generali vincoli conici di inclusione. Questo è chiamato un problema *ottimizzazione conica* (CO). Per questo motivo, consideriamo un cono chiuso convesso C in uno spazio vettoriale di dimensione finita X e il seguente problema di ottimizzazione conica:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \in C. \end{aligned} \tag{5}$$

dove $X \in \mathbb{R}^n$, e $C \in \mathbb{R}_+^n$, questo problema è la forma standard LP. Comunque, anche problemi di ottimizzazione non lineare molto più generali possono essere formulati in questo modo. Inoltre, alcuni dei più efficienti e robusti algoritmi sviluppati per problemi di ottimizzazione lineare possono essere modificati per risolvere questi generali problemi di ottimizzazione. Due importanti sottoclassi di problemi di ottimizzazione conica che affronteremo sono: (i) ottimizzazione conica del secondo ordine, e (ii) ottimizzazione semidefinita. Questi problemi

corrispondono ai casi quando C è un cono al secondo ordine:

$$C_q := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 \geq x_2^2 + \dots + x_n^2, x_1 \geq 0\},$$

e il cono delle matrici simmetriche semidefinite positive:

$$C_s = \left\{ X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : X = X^T, X \text{ è semidefinita positiva} \right\}$$

Quando lavoriamo con il cono delle matrici semidefinite positive, i prodotti standard interni a $c^T x$ e a Ax in (5) sono sostituiti da un prodotto interno appropriato per lo spazio delle matrici quadrate n -dimensionali.

2.4 Programmazione Intera

I *Programmi interi* sono problemi di ottimizzazione che richiedono che alcune o tutte le variabili abbiano valori interi. Questa restrizione sulle variabili spesso crea dei problemi molto difficili da risolvere. Quindi ci concentreremo sui *programmi lineari interi*, che hanno la funzione obiettivo lineare e vincoli lineari. Un *puro* programma lineare intero (ILP) è dato da:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \text{ e intero,} \end{aligned} \tag{6}$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sono date, e $x \in \mathbb{N}^n$ è il vettore delle variabili da determinare. Un importante caso si presenta quando le variabili x_j rappresentano variabili decisionali binarie, cioè, $x \in \{0, 1\}^n$. Il problema è allora chiamato un *programma lineare 0-1*. Quando ci sono sia variabili continue che variabili con vincoli d'interezza, il problema è chiamato *programma lineare intero misto* (MILP):

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x_j \in \mathbb{N} \text{ per } j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{7}$$

dove A, b, c sono dati mentre l'intero p (con $1 \leq p < n$) è un'altra parte degli input.

2.5 Programmazione Dinamica

La *Programmazione Dinamica* si riferisce a un metodo computazionale che utilizza relazioni per ricorrenza. Questa tecnica fu sviluppata da Richard Bellman nei primi anni '50. Nacque dallo studio dei problemi di programmazione in cui i cambiamenti nel tempo erano importanti, da qui il nome "programmazione dinamica". Comunque, le tecniche possono anche essere applicate quando il tempo non è un fattore rilevante nel problema. L'idea è di dividere il problema in "stages" per compiere l'ottimizzazione ricorsivamente. E' possibile incorporare elementi stocastici in questa ricorsione.

3 Ottimizzazione con Dati Incerti

In tutte le classi di problemi discusse fino a ora (eccetto la programmazione dinamica), abbiamo fatto un'implicita assunzione, quella che i *dati* del problema, vale a dire i parametri come Q , A , b e c nella QP, sono tutti ben noti. Non è sempre questo il caso. Spesso, i parametri del problema corrispondono a quantità che saranno realizzate solo in futuro, o che non possono essere conosciute con esattezza nel tempo in cui il problema deve essere formulato e risolto. Queste situazioni sono comuni specialmente in modelli che riguardano la finanza quantitativa come i profitti sugli investimenti, i rischi, ecc. Discuteremo due approcci di base diversi che si occupano di ottimizzazione con incertezza sui dati. La *Programmazione stocastica* è un approccio usato quando i dati incerti sono casuali e possono essere espresse attraverso alcune distribuzioni di probabilità. L'*ottimizzazione robusta* è usata quando si vuole una soluzione che si comporti bene in tutte le possibili realizzazioni dei dati incerti. Questi due approcci alternativi non sono problemi di classe (come LP, QP, ecc.) ma piuttosto tecniche di modellizzazione per occuparsi di dati incerti.

3.1 Programmazione Stocastica

Il termine *programmazione stocastica* si riferisce a un problema di ottimizzazione in cui alcuni dati del problema sono casuali. Il problema di ottimizzazione può essere un programma lineare, o un programma intero, o un programma non lineare. Un caso importante è quello dei *programmi stocastici lineari*.

Un programma stocastico *con ricorso* nasce quando alcune delle decisioni (azioni di ricorso) possono essere prese dopo che l'esito di alcuni (o tutti) gli eventi casuali sono diventati conosciuti. Per esempio, un *programma lineare stocastico a due-stadi con ricorso* può essere scritto come segue:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & a^T x + E[\max_{y(\omega)} c(\omega)^T y(\omega)] \\ & Ax = b \\ & B(\omega)x + C(\omega)y(\omega) = d(\omega) \\ & x \geq 0, \quad y(\omega) \geq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

dove le decisioni al primo stadio sono rappresentate dal vettore x e le decisioni al secondo stadio dal vettore $y(\omega)$, che dipendono dalla realizzazione di un evento casuale ω . A e b sono i vincoli deterministici nelle decisioni al primo stadio x , mentre $B(\omega)$, $C(\omega)$ e $d(\omega)$ sono i vincoli lineari stocastici che collegano le decisioni ricorse $y(\omega)$ alle decisioni del primo stadio. La funzione obiettivo contiene un termine deterministico $a^T x$ e il valore atteso del secondo stadio $c(\omega)^T y(\omega)$ ottenuto su tutte le realizzazioni dell'evento casuale ω .

Si noti che, una volta che le decisioni al primo stadio x sono state fatte e l'evento casuale ω è stato realizzato, si può computare le decisioni ottime al secondo stadio risolvendo il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} f(x, \omega) = \max \quad & c(\omega)^T y(\omega) \\ & C(\omega)y(\omega) = d(\omega) - B(\omega)x \\ & y(\omega) \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

Sia $f(x) = E[f(x, \omega)]$ il valore atteso del valore ottimo di questo problema. Allora, il programma lineare stocastico a due stadi diventa

$$\begin{aligned} \max \quad & a^T x + f(x) \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

In questo modo, se la funzione (possibilmente non lineare) $f(x)$ è conosciuta, il problema si riduce a un problema di programmazione non lineare. Quando i dati $c(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ e $d(\omega)$ sono descritti da distribuzioni finite, possiamo mostrare che f è una funzione definita a tratti lineare e concava. Quando i dati sono descritti da densità di probabilità che sono assolutamente continue e hanno momenti al secondo ordine finiti, possiamo mostrare che f è differenziabile e concava. In ambo i casi, abbiamo un problema di ottimizzazione convesso con vincoli lineari per cui sono disponibili algoritmi ad hoc.

3.2 Ottimizzazione Robusta

Per ottimizzazione robusta s'intende la modellizzazione di problemi di ottimizzazione con dati incerti per ottenere una soluzione che sia garantita essere "buona" per tutte le possibili realizzazioni dei parametri incerti. In questo senso, questo approccio si distacca dall'assunzione di casualità usata nell'ottimizzazione stocastica per parametri incerti e dà la solita importanza a tutte le possibili realizzazioni. L'incertezza nei parametri è descritta attraverso gli *insiemi d'incertezza* che contengono tutti (o la maggior parte) dei possibili valori che si posso realizzare dai parametri incerti.

Ci sono definizioni e interpretazioni differenti della robustezza e i modelli risultanti differiscono di conseguenza. Un concetto importante è la *robustezza dei vincoli*, spesso chiamati nella letteratura *modello di robustezza*. Questo si riferisce alle soluzioni che rimangono *ammissibili* per tutti i possibili valori degli input incerti. Questo tipo di soluzione è richiesta in molte applicazioni ingegneristiche. Ecco un esempio adottato da Ben-Tal e Nemirovski. Considera un processo ingegneristico multifase (per esempio un processo di distillazione chimica) e il relativo processo di ottimizzazione che include vincoli di bilancio (materiali che entrano in una fase del processo non possono eccedere cosa è usato in quella fase più cosa è avanzato per la fase successiva). Le quantità prodotte alla fine di una particolare fase possono dipendere da fattori esterni non controllabili e perciò incerti. Nonostante ciò, non importa quale siano i valori di questi fattori non controllabili, i vincoli di bilancio *devono* essere soddisfatti. Dunque, la soluzione deve avere vincoli robusti rispetto alle incertezze del problema. Ecco un modello matematico per trovare soluzioni con vincoli robusti: Considera un problema di ottimizzazione della forma:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & G(x, p) \in K \end{aligned} \tag{11}$$

Qui, le x sono le variabili decisionali, f è la funzione obiettivo (certa), G e K sono gli elementi dei vincoli che assumiamo siano certi e p sono i parametri incerti del problema. Considera un insieme d'incertezza \mathcal{U} che contenga tutti i

possibili valori del parametro d'incertezza p . Allora, una soluzione ottima con vincoli robusti può essere trovata risolvendo il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ G(x, p) \in K, \forall p \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (12)$$

Un concetto collegato è la *robustezza della funzione obiettivo*, che si presenta quando nella funzione obiettivo appaiono parametri d'incertezza. Questa spesso viene definita nella letteratura soluzione di robustezza. Tale soluzioni robuste devono rimanere vicino all'ottimo per tutte le possibili realizzazioni dei parametri d'incertezza. Considera un problema di ottimizzazione della forma:

$$\begin{aligned} \min_x f(x, p) \\ x \in S, \end{aligned} \quad (13)$$

Qui, S è l'insieme d'ammissibilità (certo) e f è la funzione obiettivo che dipende dai parametri d'incertezza p . Assumiamo come sopra che \mathcal{U} sia l'insieme d'incertezza che contiene tutti i possibili valori dei parametri d'incertezza p . Allora una soluzione con funzione obiettivo robusta si ottiene risolvendo

$$\min_{x \in S} \max_{p \in \mathcal{U}} f(x, p). \quad (14)$$

Si noti che la robustezza dell'obiettivo è un caso speciale di robustezza dei vincoli. Infatti introducendo una nuova variabile t (da minimizzare) nella (13) e imponendo il vincolo $f(x, p) \leq t$, otteniamo un problema equivalente a (13). La formulazione robusta dei vincoli del problema risultante è equivalente a (14). La robustezza dei vincoli e la robustezza dell'obiettivo sono concetti che nascono facendo decisioni conservative e non sono sempre appropriate per i problemi di ottimizzazione con dati incerti.

4 Matematica Finanziaria

La finanza moderna è diventata sempre più tecnica e richiede l'utilizzo di strumenti matematici sofisticati sia nel campo della ricerca che nella pratica. Molti fanno risalire le radici di questa tendenza nei modelli per la selezione dei portafoglio e nei metodi descritti da Markowitz negli anni '50 e nelle formule per il prezzaggio di opzioni sviluppate da Black, Scholes e Merton alla fine degli anni '60. Per le enormi ripercussioni che questi lavori hanno avuto sulla moderna pratica finanziaria, Markowitz è stato insignito del premio Nobel per l'Economia nel 1990, mentre Scholes e Merton lo vinsero nel 1997.

Sotto introduciamo alcuni argomenti finanziari particolarmente adatti all'analisi matematica che riguardano strumenti sofisticati provenienti dalle scienze matematiche.

4.1 Scelta del Portfolio e Distribuzione dei Beni

La teoria della scelta ottimale dei portafogli fu sviluppata negli anni '50 da Harry Markowitz. Il suo lavoro ha formalizzato il principio della diversificazione nella scelta del portafoglio e, come citato sopra, gli è valso il Premio Nobel

per l'Economia nel 1990. Diamo qui sotto una breve descrizione del modello e mettiamolo in relazione alle QP.

Prendiamo come esempio un investitore che abbia a disposizione una determinata quantità di denaro, da investire in una serie di titoli (azioni, bond, ecc.) con un ricavo casuale. Per ogni titolo $i = 1, \dots, n$ la stima del suo profitto atteso μ_i e varianza σ_i^2 sono dati. Inoltre per ogni due titoli i e j , assumiamo di conoscere anche il loro coefficiente di correlazione ρ_{ij} . Se rappresentiamo la proporzione dei fondi totali investiti in titoli i da x , possiamo calcolare il ricavo atteso e la varianza del portfolio ad esso legato $x = (x_1, \dots, x_n)$ come segue:

$$E[x] = x_1\mu_1 + \dots + x_n\mu_n = \mu^T x$$

e

$$Var[x] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j = x^T Q x$$

dove $\rho_{ii} = 1$, $Q_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Il vettore x del portfolio deve soddisfare $\sum_{i,j} x_i = 1$ e ci potrebbero essere o meno ulteriori limitazioni di ammissibilità. Un portfolio ammissibile x si dice *efficace* se da esso si può trarre il massimo ricavo atteso fra tutti i portafogli con la stessa varianza o, in alternativa, se comporta la varianza minima fra tutti i portafogli con almeno un determinato ricavo atteso. La serie di portafogli efficaci forma la *frontiera di efficacia* dell'universo dei vari portafogli.

Il *problema di ottimizzazione dei portafogli* di Markowitz, teoria chiamata anche problema di *ottimizzazione a media-varianza* (MVO) può essere formulato in tre modi diversi ma equivalenti l'uno all'altro. La prima formulazione sfocia nel problema di trovare un portfolio a varianza minima di sicurezza da 1 a n che produca almeno un valore R di ricavo atteso. Matematicamente, questa formula si esprime con un problema di programmazione quadratica convessa:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T Q x \\ & e^T x = 1 \\ & \mu^T x \geq R \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

dove e è un vettore n -dimensionale, i cui componenti sono pari a 1. La prima formula indica che le proporzioni x_i , sommate, dovrebbero dare come risultato 1. La seconda formula indica che il ricavo che ci si attende non è inferiore al valore obiettivo e, come abbiamo già detto in precedenza, la funzione obiettivo corrisponde alla varianza totale del portfolio. I vincoli di non negatività di x_i vengono introdotti per regolare i processi di vendita scoperta (dove, cioè, si vende qualcosa che non si ha). Si noti che la matrice Q è semidefinita positiva poiché $x^T Q x$, la varianza del portfolio, deve essere non negativa per ogni portfolio (ammissibile o no) x .

Come alternativa al problema (15), possiamo scegliere di aumentare al massimo il ricavo atteso di un portfolio, limitando in esso la varianza del ricavo stesso. Oppure possiamo aumentare al massimo un ricavo atteso con una previsione dei rischi, identificato come il ricavo atteso meno il multiplo delle varianze. Queste due formulazioni sono essenzialmente equivalenti alla (15).

Il modello (15) è anche piuttosto versatile. Per esempio, se vengono permesse

vendite scoperte su alcuni o tutti i titoli, queste possono venire incorporate nel modello, semplicemente rimuovendo il limite di non negatività della variabile corrispondente. Se i regolamenti o le scelte degli investitori dovessero limitare la quantità di investimenti possibili all'interno del sottoinsieme di quelli sicuri, il modello potrà essere incrementato grazie a una variabile lineare che si riferisca a quel determinato limite. Sostanzialmente, ogni limite lineare può essere aggiunto al modello senza renderlo troppo più difficile da risolvere.

I problemi di allocazione di risorse hanno la stessa struttura matematica di quelli di scelta del portfolio. In questi, l'obiettivo non è scegliere una serie di azioni (o altri titoli), ma determinare l'investimento ottimale fra una serie di classi di risorse diverse. Esempi di classi di risorse sono azioni a grande e piccola capitalizzazione, azioni straniere, bond governativi e societari ecc. Ci sono poi molti fondi mutuari che si concentrano su determinate classi di risorse, e una persona potrebbe essere in grado di investire in relativa sicurezza in una di esse, acquistando fondi mutuari rilevanti. Dopo aver stimato i ricavi attesi, le varianze e le covarianze per ogni classe di azioni, è possibile formulare un QP identico a quello spiegato in (15) e ottenere portafogli efficaci per queste classi di risorse.

Una strategia diversa per la scelta del portfolio è quella di provare a rispecchiare i movimenti di un broad market population utilizzando un numero significativamente più piccolo di beni. Un tale portfolio si chiama index fund. Non serve alcuno sforzo per identificare i beni dal prezzo ribassato: l'assunto di base è che il mercato sia efficace e, per questo, non si possano ottenere ricavi (con previsione dei rischi) attraverso strategie di accumulo delle azioni, dato che i prezzi delle azioni stesse riflettono ogni singola informazione disponibile sul mercato. Laddove i fondi gestiti attivamente incorrano in costi transazionali che riducono le loro prestazioni generali, non verranno più scambiati attivamente gli index fund, che incapperanno in costi di gestione più bassi. Questo è tipico di una strategia di gestione passiva. In che modo le compagnie di investimento costruiscono questi index fund? Esistono numerosi metodi: uno è quello di risolvere un problema di raggruppamento, nel quale azioni simili abbiano una sola rappresentanza all'interno dell'index fund. Questo porta naturalmente alla formulazione di un problema di programmazione intero.

4.2 Prezzaggio e Copertura di Opzioni

Cominciamo innanzitutto con una descrizione di alcune delle più note opzioni finanziarie. Un'opzione europea call è un contratto che presenta le seguenti condizioni:

- In un tempo definito nel futuro, noto come *data di scadenza*, il *possessore* dell'opzione ha il diritto, ma non l'obbligo di:
- acquistare un bene previsto, noto come *sottostante*, per un
- prezzo prescritto, noto come *prezzo d'esercizio*.

Un'opzione europea put è simile, tranne per il fatto che conferisce il diritto di vendere il bene sottostante (invece di comprarlo). Un'opzione americana è come quella europea, ma può essere esercitata in qualsiasi momento prima della data di scadenza.

Dato che il pagamento di un'opzione dipende dal valore del bene sottostante, il prezzo è legato anche al valore attuale e al comportamento previsto sul mercato del suddetto bene. Per trovare il giusto valore di un'opzione, dobbiamo risolvere un problema di prezzaggio. Quando abbiamo a disposizione un buon modello per il processo stocastico del suddetto bene, i problemi di prezzaggio di opzioni possono essere risolti grazie a sofisticate tecniche matematiche.

Questi problemi vengono spesso risolti utilizzando la strategia seguente. Proviamo a determinare un portfolio di risorse con prezzi noti i quali, se aggiornati a dovere nel corso del tempo, produrranno lo stesso saldo dell'opzione in questione. Dato che il portfolio e l'opzione avranno lo stesso saldo finale, possiamo concludere che debbano anche avere lo stesso valore iniziale (altrimenti saremmo in presenza di un arbitraggio), e potremo conoscere, quindi, il giusto prezzo per l'opzione. Un portfolio di risorse che produca lo stesso saldo finale di uno strumento finanziario dato si definisce *portfolio replicante* di tale strumento. Trovare il giusto portfolio, ovviamente, non è sempre facile e può condurre a un problema di *replicazione*.

Facciamo adesso un semplice esempio per illustrare queste idee. Assumiamo che una serie di azioni XYZ sia attualmente valutata 40\$. Il prezzo di XYZ a un mese di distanza è causale. Assumiamo che il suo valore possa raddoppiare o dimezzarsi con eguali probabilità.

$$S_0 = 40\$ \begin{cases} 80 = S_1(u) \\ 20 = S_1(d) \end{cases}$$

Oggi acquistiamo un'opzione europea call per comprare una serie di azioni XYZ per 50\$ al mese a partire da oggi. Quale sarà il prezzo giusto per questa opzione?

Assumiamo che si possano ricevere o dare in prestito dei soldi senza interessi, in un periodo compreso fra oggi e il mese prossimo, e che si possa acquistare o vendere una qualsiasi porzione delle azioni XYZ senza commissioni. Assumiamo inoltre che la XYZ non pagherà alcun dividendo agli azionisti entro il prossimo mese.

Per risolvere il problema di prezzaggio dell'opzione, consideriamo il seguente problema di hedging: possiamo creare un portfolio con le suddette azioni (comprate o vendute) e con il denaro (prestato o ricevuto) oggi, in modo che il saldo del portfolio, per la data di scadenza dell'opzione, sia equivalente al saldo dell'opzione stessa? Considerate che il saldo dell'opzione sarà di 30\$ se il prezzo delle azioni dovesse salire, mentre sarà di 0\$ se dovesse scendere. Assumiamo che questo portfolio abbia Δ azioni di XYZ e B denaro. Questo portfolio sarebbe valutato oggi $40\Delta + B$. Il prossimo mese, il saldo per questo portfolio sarebbe:

$$P_0 = 40\Delta + B \begin{cases} 80\Delta + B = P_1(u) \\ 20\Delta + B = P_1(d) \end{cases}$$

Scegliamo Δ e B tali che

$$80\Delta + B = 30$$

$$20\Delta + B = 0$$

per cui il portafoglio replica il saldo dell'opzione alla data di scadenza. Questo dà $\Delta = \frac{1}{2}$ e $B = -10$, che è la *copertura* (hedge) che stavamo cercando. Questo

portfolio vale $P_0 = 40\Delta + B = 10\$$ oggi, e quindi, il prezzo corretto dell'opzione deve essere 10\$.

4.3 Gestione del Rischio

Il rischio è inerente alla maggior parte delle attività economiche. È particolarmente vero nel caso di quelle attività finanziarie nelle quali gli effetti di alcune decisioni prese oggi potrebbero avere molte conseguenze diverse in futuro, a seconda di particolari eventi. Dato che le compagnie non possono mai mettersi completamente al sicuro dai rischi, devono per forza essere in grado di gestirli. È un compito difficile, anche con il supporto di tecniche matematiche avanzate. Il non saper gestire adeguatamente i rischi ha portato a diversi fallimenti spettacolari nell'industria finanziaria degli anni '90 (per esempio la Barings Bank, la Long Term Capital Management, la Orange County).

Un coerente approccio alla gestione dei rischi richiede misure quantitative che riflettano adeguatamente la vulnerabilità di una data compagnia. Alcuni esempi di queste misure includono la varianza del portfolio secondo il modello MVO di Markowitz, il valore-a-rischio (VaR) e il deficit previsto, noto anche come valore-a-rischio condizionale, o CVaR. Inoltre, le tecniche di controllo del rischio hanno bisogno di essere sviluppate e implementate per adattarsi a eventuali cambiamenti rapidi dei valori delle misure di rischio. I regolatori governativi hanno già stabilito che le istituzioni finanziarie debbano controllare le loro proprietà in determinati modi e che debbano indicare degli obblighi di margine per le posizioni "a rischio".

I problemi di ottimizzazione che si incontrano nella gestione del rischio finanziario spesso assumono la forma seguente: l'ottimizzazione di una misura prestazionale (come il ricavo previsto di un investimento) è soggetta agli abituali limiti operativi e a quei limiti che vogliono una particolare misura di rischio per le proprietà finanziarie di una compagnia non eccedere una data quantità. Matematicamente, possiamo trovarci davanti il problema seguente:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \mu^T x \\ & RM[x] \leq \gamma \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Come nel modello di Markowitz MVO, le x_i rappresentano la proporzione del capitale investito in titoli. L'obiettivo è il profitto atteso del portfolio e μ è il vettore del profitto atteso per i differenti titoli. $RM[x]$ è il valore della misura di un particolare rischio per un portfolio x e γ è il limite superiore stabilito. Poiché $RM[x]$ generalmente è una funzione non lineare di x , (16) è un problema di programmazione non lineare. In alternativa, possiamo minimizzare la misura del rischio mentre vincoliamo il profitto atteso del portfolio per raggiungere o per superare un dato valore obiettivo obiettivo R . Questo potrebbe produrre un problema molto simile a (15).

4.4 Gestione di attivi e passivi

In che modo un'istituzione finanziaria dovrebbe gestire i propri attivi e passivi? Un modello di ottimizzazione statica a varianza-media, come quello di

cui abbiamo parlato descrivendo l'allocazione delle risorse, non è sufficiente a comprendere i numerosi passivi delle istituzioni finanziarie. Inoltre evidenzerebbe ricavi ridotti, sia sopra che sotto la media. Si richiede quindi un modello multi-periodo che enfatizzi il bisogno di analizzare ogni passivo per un periodo di tempo finito (o possibilmente infinito). Dato che gli attivi e i passivi hanno di solito componenti casuali, la loro gestione ottimale richiede strumenti di "ottimizzazione sotto incertezza" e, soprattutto, approcci di programmazione stocastica.

Sia L_t il passivo della compagnia nel periodo t per $t = 1, \dots, T$. Qui, assumiamo che i passivi L_t siano casuali senza una distribuzione conosciuta. Un problema tipico da risolvere nella gestione di attivi e passivi è quello di determinare quale attivo (e in che quantità) la compagnia dovrebbe avere in ciascun periodo, per aumentare al massimo la ricchezza prevista al termine del periodo T . Possiamo anche assumere che le classi di attivi tra i quali la compagnia può scegliere, abbiano ricavi casuali (di nuovo, con distribuzioni note), identificati con R_{it} per una classe di attivo i nel periodo t . Dato che la compagnia può prendere decisioni in ogni periodo dopo aver osservato gli attivi e i passivi ottenuti nei periodi precedenti, il problema conseguente può essere delineato come un programma stocastico con ricorso:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & E \left[\sum_i x_{i,T} \right] \\ \sum_i (1 + R_{it}x_{i,t-1} - \sum_i x_{i,t}) &= L_t, \quad t = 1, \dots, T \\ x_{i,t} &\geq 0 \quad \forall i, t. \end{aligned} \tag{17}$$

La funzione obiettivo rappresenta la ricchezza totale alla fine dell'ultimo periodo. I vincoli indicano che il surplus che resta dopo il passivo L_t che è stato coperto sarà investito come segue: $x_{i,t}$ investiti in bene di classe i . In questa formulazione, $x_{i,0}$ sono fissati, e possibilmente con posizioni iniziali non zero nelle differenti classi di beni.