

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Relazione

di Claudia Carapelle e Marta Galanti

**Un'introduzione alle
EQUAZIONI DIFFERENZIALI STOCASTICHE**

Prof. Vincenzo Vespri

Indice

1	Introduzione	1
2	Processi stocastici	1
3	Costruzione di un moto browniano	4
4	Integrale di un processo stocastico	11
5	Differenziale Stocastico	17
6	Equazioni differenziali stocastiche	21

1 Introduzione

In base ad un modello comunemente accettato, l'equazione che descrive l'andamento nel tempo del prezzo P di un bene è:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW, \quad (\text{STOCK PRICE})$$

dove μ , detto drift, è la misura della media del tasso di crescita del prezzo, σ è la volatilità del mercato e dW è il differenziale stocastico di un moto browniano W . (STOCK PRICE) è un'equazione differenziale stocastica, cioè un oggetto del tipo:

$$\begin{cases} dX &= b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) &= X_0 \end{cases}. \quad (\text{EDS})$$

Diremo che un processo stocastico X è soluzione di (EDS) se

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, t) dt + \int_0^t B(X, t) dW.$$

Per comprendere il significato di questa definizione e precisare i requisiti per l'esistenza di una soluzione, sono necessari alcuni concetti matematici che andiamo ora ad esaminare.

2 Processi stocastici

Definizione 1. Si dice **processo stocastico** a valori reali una quintupla della forma $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P)$ dove

- $T \subseteq \mathbb{R}^+$ è l'insieme dei tempi.
- \mathcal{F} è una σ -algebra su Ω .
- P è una legge di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

- $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ è una filtrazione (famiglia di sotto σ -algebre di \mathcal{F} crescente in t).
- $(X_t)_{t \in T}$ è una famiglia di variabili aleatorie su (Ω, \mathcal{F}) a valori nello spazio misurabile $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dove $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la σ -algebra di Borel su \mathbb{R} , tale che (X_t) è \mathcal{F}_t -misurabile per ogni t .

Definizione 2. Se X è un processo stocastico, (\mathcal{F}_t) si dice **filtrazione naturale** di X se

$$(\mathcal{F}_t) = \sigma(X_s, s \leq t) \doteq \bigcap_{\mathcal{U} \in \Upsilon_t} \mathcal{U}$$

dove $\Upsilon_t = \{\mathcal{U} \text{ } \sigma\text{-algebra su } \Omega \mid X_s \text{ è } \mathcal{U}\text{-misurabile per ogni } s \leq t\}$.

Definizione 3. Siano

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P) \quad \text{e} \quad X' = (\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t \in T'}, (X'_t)_{t \in T'}, P')$$

processi stocastici.

Si dice che X' è una **modificazione** di X se $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega', \mathcal{F}', P')$ e se per ogni $t \in T$ $X_t = X'_t$ q.o. rispetto a P .

Definizione 4. $\forall \omega \in \Omega$ l'applicazione $t \mapsto X(t, \omega)$ è detta **orbita** di ω .

Un particolare tipo di processo stocastico è la martingala. Prima di definirla introduciamo brevemente la nozione di valore atteso condizionato.

Definizione 5. Sia (Ω, \mathcal{U}, P) uno spazio di probabilità. Siano X una variabile aleatoria integrabile e $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ una σ -algebra, si definisce $E(X|\mathcal{V})$ come una nuova variabile aleatoria che verifichi:

- $E(X|\mathcal{V})$ è \mathcal{V} -misurabile;
- $\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP \quad \forall A \in \mathcal{V}$.

Analogamente, se Y è un'altra variabile aleatoria, si definisce $E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$ dove $\sigma(Y)$ è la σ -algebra generata da Y .

La validità di questa definizione è garantita dal seguente:

Teorema 6. Sia (Ω, \mathcal{U}, P) uno spazio di probabilità, sia X una variabile aleatoria integrabile, allora per ogni σ -algebra $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ il valore atteso condizionato $E(X|\mathcal{V})$ esiste ed è unico a meno di insiemi di misura nulla.

Elenchiamo, senza dimostrarle, alcune importanti proprietà del valore atteso condizionato.

Proposizione 7. Se X e Y sono v.a. integrabili, dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, \mathcal{U} e \mathcal{V} σ -algebre, valgono:

1. $E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{U}) = \alpha E(X|\mathcal{U}) + \beta E(Y|\mathcal{U})$ q.o.
2. $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$
3. Se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, $E(E(X|\mathcal{V})|\mathcal{U}) = E(X|\mathcal{U})$ q.o.
4. Se Y è \mathcal{U} -misurabile e limitata allora $E(XY|\mathcal{U}) = YE(X|\mathcal{U})$ q.o.
5. Se X è indipendente da \mathcal{U} allora $E(X|\mathcal{U}) = E(X)$ q.o.

Osservazione 8. Notiamo che un caso particolare della (4) si verifica per $X = 1$. Così modificata la proprietà ci dice che se X è \mathcal{U} -misurabile allora:

$$E(X|\mathcal{U}) = X.$$

Possiamo ora definire rigorosamente il concetto di martingala:

Definizione 9. Un processo stocastico $M = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (M_t)_{t \in T}, P)$ a valori reali è una **martingala** se M_t è integrabile per ogni $t \in T$ e

$$E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Una martingala è quindi un processo con la particolare proprietà che la miglior stima al tempo s del valore al tempo futuro t di M è proprio M_s .

Definizione 10. Un processo stocastico W a valori reali è detto **moto browniano** o **processo di Wiener** se

1. $W(0) = 0$ q.o.;
2. $(W(t) - W(s)) \sim N(0, t-s) \quad \forall t \geq s \geq 0$;
3. $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ le variabili aleatorie

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sono indipendenti.

Osservazione 11. Combinando la (1) e la (2) si ottiene che $W(t) \sim N(0, t) \quad \forall t > 0$.

Proposizione 12. *Un moto browniano è una martingala rispetto alla filtrazione naturale (\mathcal{F}_t) .*

Dimostrazione. Sia $t \geq s$. Utilizzando la Proposizione (7) e la (3) della Definizione (10),

$$\begin{aligned} E(W(t) | \mathcal{F}_s) &= E(W(t) - W(s) | \mathcal{F}_s) + E(W(s) | \mathcal{F}_s) = \\ &= E(W(t) - W(s)) + W(s) = W(s). \end{aligned}$$

□

Lemma 13. *Se W è un moto browniano, allora*

$$E(W(t)W(s)) = \min\{s, t\} \quad \forall t, s \geq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $t \geq s \geq 0$, allora

$$\begin{aligned} E(W(t)W(s)) &= E((W(s) + W(t) - W(s))W(s)) \\ &= E(W^2(s)) + E((W(t) - W(s))W(s)) \\ &= s + E(W(t) - W(s))E(W(s)) = s = \min\{t, s\} \end{aligned}$$

□

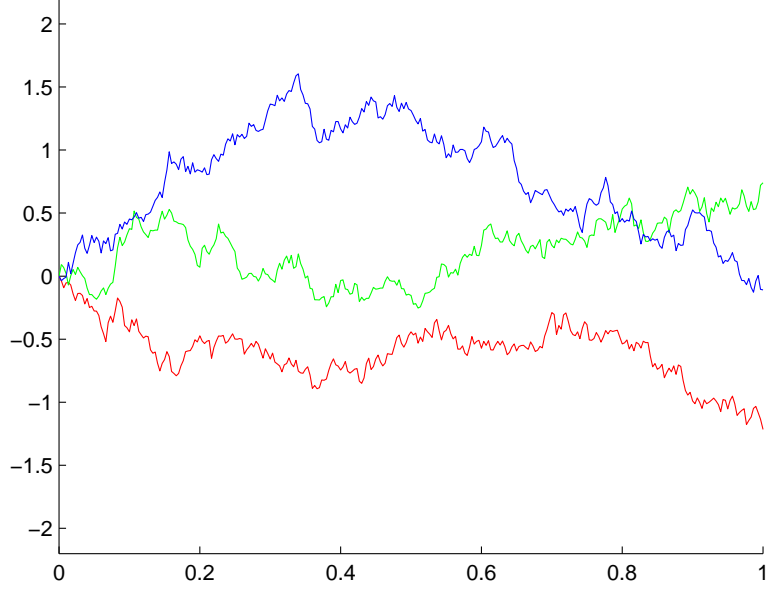


Figura 1: Realizzazioni di un moto browniano tramite simulazione in Matlab.

3 Costruzione di un moto browniano

Finora abbiamo parlato di moti browniani come oggetti astratti di cui non abbiamo dato esempi. Quello che faremo ora sarà procedere alla costruzione di un moto browniano seguendo il metodo di Lévy-Ciesielski, dimostrandone così l'esistenza.

Definizione 14. La famiglia $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ delle **funzioni di Haar**, è definita sull'intervallo $[0, 1]$ come segue:

$$h_0(t) \doteq 1 \text{ per } 0 \leq t \leq 1,$$

$$h_1(t) \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

e per $2^n \leq k < 2^{n+1}$ con $n = 1, 2, \dots$

$$h_k(t) \doteq \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & \text{se } \frac{k-2^n}{2^n} \leq t \leq \frac{k-2^n+1/2}{2^n} \\ -2^{\frac{n}{2}} & \text{se } \frac{k-2^n+1/2}{2^n} < t \leq \frac{k-2^n+1}{2^n} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lemma 15. Le funzioni di Haar formano una base ortonormale completa di $L^2([0, 1])$.

Definizione 16. Per $k \in \mathbb{N}$, si definisce k-esima **funzione di Schauder**

$$s_k(t) \doteq \int_0^t h_k(s) ds \text{ per } t \in [0, 1],$$

dove $h_k(s)$ è la k -esima funzione di Haar.

Costuiremo il nostro moto browniano a partire dalle funzioni di Schauder in questo modo:

$$W(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} A_k s_k(t) \quad (1)$$

dove $t \in [0, 1]$ e i coefficienti A_k sono variabili aleatorie con distribuzione normale standard.

Perchè questa definizione abbia senso, dovremmo assicurarci che la serie converga.

Questo deriva da un lemma che ci garantisce la convergenza uniforme, per $t \in [0, 1]$, di serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s_k(t)$ con a_k successione di numeri reali tali che $|a_k| = O(k^\delta)$ dove $0 \leq \delta < 1/2$.

Infatti si può dimostrare (vedere [2, pag.42]) che, per una famiglia $\{A_k\}$ di variabili aleatorie indipendenti distribuite normalmente, vale la seguente:

$$|A_k(\omega)| = O(\sqrt{\log k}) \quad \text{per } k \rightarrow \infty,$$

e di conseguenza (1) converge.

Siamo ora pronti per dimostrare il seguente:

Teorema 17. *Sia $\{A_k\}$ una successione di variabili aleatorie normali standard indipendenti definite sullo stesso spazio di probabilità. Allora*

$$W(t, \omega) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\omega) s_k(t) \quad \text{per } t \in [0, 1]$$

converge uniformemente in t per q.o. ω .

Inoltre

- i) W è un moto browniano per $t \in [0, 1]$,*
- ii) per q.o. ω , l'orbita $t \mapsto W(t, \omega)$ è continua.*

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di alcuni strumenti:

Definizione 18. (FUNZIONE CARATTERISTICA)

Sia \mathbf{X} un vettore aleatorio a valori in \mathbb{R}^n . Allora la **funzione caratteristica** di \mathbf{X} è:

$$\phi_{\mathbf{X}}(\lambda) \doteq E(e^{i\lambda \cdot \mathbf{X}}) \quad (\lambda \in \mathbb{R}^n)$$

Osservazione 19. Dato che nel nostro caso siamo interessati alle distribuzioni normali, può essere utile riportare la funzione caratteristica di una variabile reale $X \sim N(m, \sigma^2)$:

$$\phi_X(\lambda) = e^{i\lambda m - \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Elenchiamo ora brevemente (e senza dimostrazione) alcune importanti proprietà delle funzioni caratteristiche che ci saranno utili in seguito.

Proposizione 20. Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti:

- $\phi_{X_1+\dots+X_n}(\lambda) = \phi_{X_1}(\lambda) \cdot \dots \cdot \phi_{X_n}(\lambda)$
- $\phi_{X_1}^{(k)}(0) = i^k E(X_1^k) \quad (k \in \mathbb{N})$
- se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\phi_{X_1}(\lambda) = \phi_{X_2}(\lambda)$ allora, indicata con F la funzione di distribuzione, si ha per ogni x :

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$$

cioè la funzione caratteristica di una variabile aleatoria ne determina la distribuzione.

Lemma 21. $\sum_{k=0}^{\infty} s_k(s)s_k(t) = \min\{s, t\}$ per $s, t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Per $0 \leq s \leq 1$ sia

$$z_s(\tau) \doteq \mathbb{1}_{[0,s]}(\tau)$$

Se $s \leq t$, possiamo scrivere

$$s = \int_0^1 z_t z_s d\tau.$$

Poichè le funzioni di Haar formano una base ortonormale di $L^2([0, 1])$ (Lemma 15), scriviamo:

$$z_s(\tau) = \sum_k a_k h_k \quad \text{e} \quad z_t(\tau) = \sum_k b_k h_k,$$

dove

$$a_k = \int_0^1 z_s h_k d\tau = \int_0^s h_k d\tau = s_k(s) \quad \text{e, similmente,} \quad b_k = s_k(t).$$

Quindi

$$s = \int_0^1 z_t z_s d\tau = \int_0^1 \left(\sum_k a_k h_k \right) \left(\sum_n b_n h_n \right) d\tau$$

per la condizione di ortonormalità diventa

$$\int_0^1 \sum_k a_k b_k (h_k)^2 d\tau = \sum_k a_k b_k = \sum_k s_k(t) s_k(s).$$

□

Passiamo ora a dimostrare il Teorema (17):

Dimostrazione. *i)* Proviamo che valgono le tre proprietà del moto browniano. La prima condizione, $W_0 = 0$, è banalmente verificata. Per quanto riguarda la seconda, consideriamo la funzione caratteristica di $W(t) - W(s)$ con $t \geq s$:

$$E(e^{i\lambda(W(t)-W(s))}) = E(e^{i\lambda \sum_k A_k(s_k(t)-s_k(s))}) =$$

per indipendenza delle A_k e successivamente poichè sono distribuite come normali standard,

$$\begin{aligned} &= \prod_k E(e^{i\lambda A_k(s_k(t)-s_k(s))}) = \prod_k e^{-\frac{\lambda^2}{2}(s_k(t)-s_k(s))^2} = e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_k (s_k(t)-s_k(s))^2} \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_k (s_k(t)^2 - 2s_k(t)s_k(s) + s_k(s)^2)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-2s+s)} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}, \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza deriva dal Lemma (21).

Poiché la funzione caratteristica di una v.a. ne determina univocamente la distribuzione (Proposizione 20), si ha che $(W(t) - W(s)) \sim N(0, t - s)$ come richiesto. Per provare che vale anche la terza condizione mostreremo che

$$E(e^{i \sum_j \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1})))}) = \prod_{j=1}^m e^{-\frac{\lambda_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})}.$$

Questo implica che la distribuzione congiunta di

$$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

è uguale al prodotto delle singole funzioni di distribuzione, e quindi che le v.a. considerate sono indipendenti per la Proposizione (20) e per le proprietà delle funzioni di distribuzione. Per semplicità proveremo l'asserto per $n = 2$:

$$\begin{aligned} &E(e^{i(\lambda W(t_1) + \mu(W(t_2) - W(t_1))))}) = E(e^{i((\lambda - \mu)W(t_1) + \mu W(t_2))}) = \\ &= E(e^{i(\lambda - \mu) \sum_k A_k s_k(t_1) + i\mu \sum_k A_k s_k(t_2)}) = \prod_k E(e^{iA_k((\lambda - \mu)s_k(t_1) + \mu s_k(t_2))}) = \\ &= \prod_k e^{-\frac{1}{2}((\lambda - \mu)s_k(t_1) + \mu s_k(t_2))^2} = e^{-\frac{1}{2} \sum_k (\lambda - \mu)^2 s_k^2(t_1) + 2(\lambda - \mu)\mu s_k(t_1)s_k(t_2) + \mu^2 s_k^2(t_2)} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}((\lambda - \mu)^2 t_1 + 2(\lambda - \mu)\mu t_1 + \mu^2 t_2)} = e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2 t_1 + \mu^2(t_2 - t_1))}, \end{aligned}$$

dove per la penultima uguaglianza si è usato il Lemma (21).

ii) la continuità dell'orbita deriva dalla uniforme convergenza della serie. \square

Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza di un moto browniano definito per $t \in [0, 1]$ in un qualunque spazio di probabilità in cui esista almeno una quantità infinita numerabile di v.a. indipendenti distribuite normalmente. A partire da questo è possibile trovare un'estensione per ogni $t \geq 0$ ponendo

$$W(t) \doteq W(n-1) + W^n(t - (n-1)) \quad \text{per } n-1 \leq t \leq n$$

dove $(W^n)_n$ è una famiglia di moti browniani indipendenti su $[0, 1]$. Tralasciamo la dimostrazione rigorosa di questo fatto.

A questo punto cerchiamo di farci un'idea più chiara sul comportamento dei moti browniani, dimostrando una serie di proprietà che li caratterizzano.

Cominceremo analizzando alcuni risultati di continuità sulle orbite:

Teorema 22. (*Kolmogorov*) Sia X un processo stocastico con orbite continue per q.o. ω tale che

$$E(|X(t) - X(s)|^\beta) \leq C|t - s|^{1+\alpha}$$

per qualche $\alpha, \beta > 0$, $C \geq 0$ e per ogni $t, s \geq 0$. Allora per ogni $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$, $T > 0$, e quasi ogni ω , esiste una costante $K = K(\omega, \gamma, T)$ tale che

$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{per ogni } 0 \leq s, t \leq T,$$

ovvero l'orbita $t \mapsto X(t, \omega)$ è uniformemente Hölder-continua con esponente γ su $[0, T]$.

Dimostrazione. Per semplicità poniamo $T = 1$ e scegliamo $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$.

Definiamo ora per $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \doteq \left\{ \left| X\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{j}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}} \text{ per qualche } j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j < 2^n \right\}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\left| X\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{j}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left(\left| X\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{j}{2^n}\right) \right|^\beta > \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^\beta\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} E\left(\left| X\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{j}{2^n}\right) \right|^\beta\right) \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \text{ per Markov} \\ &\leq C \sum_{j=0}^{2^n-1} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\alpha} \left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} = C 2^{n(-\alpha+\gamma\beta)}. \end{aligned}$$

Dato che $-\alpha + \gamma\beta < 0$ otteniamo che $\sum_n P(A_n) < \infty$ e, grazie al lemma di Borel-Cantelli, concludiamo che $P(A_n \text{ i.v.}) = 0$.

Quindi per q.o. ω esiste $m = m(\omega)$ tale che, se $n \geq m$,

$$\left| X\left(\frac{j+1}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad \text{per } 0 \leq j \leq 2^n - 1.$$

Ma allora, se prendiamo $K = K(\omega)$ abbastanza grande, abbiamo che per ogni $n \geq 0$:

$$\left| X\left(\frac{j+1}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq K \frac{1}{2^{n\gamma}} \quad \text{per } 0 \leq j \leq 2^n - 1. \quad (2)$$

Mostriamo adesso che quest'ultima disuguaglianza implica la Hölder-continuità. Per vederlo prendiamo un $\omega \in \Omega$ che verifichi la (2), siano $t_1, t_2 \in [0, 1]$ due razionali diadici t.c. $0 < t_2 - t_1 < 1$ e scegliamo $n \geq 1$ t.c. $2^{-n} \leq t < 2^{-(n-1)}$ dove con t è indicata la differenza $t_2 - t_1$. Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_k}} & \text{con } n < p_1 < \dots < p_k \\ t_2 = \frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{q_1}} + \dots + \frac{1}{2^{q_l}} & \text{con } n < q_1 < \dots < q_l \end{cases}$$

dove $t_1 \leq \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2$. Dalla precedente disuguaglianza si ricava che $\frac{j-i}{2^n} \leq t < \frac{1}{2^{n-1}}$, che implica $j = i$ oppure $j = i + 1$. Dalla (2) si ricava

$$\left| X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq K \left| \frac{i-j}{2^n} \right|^\gamma \leq K t^\gamma,$$

e anche

$$\left| X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_r}}, \omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \dots - \frac{1}{2^{p_{r-1}}}, \omega\right) \right| \leq K \left| \frac{1}{2^{p_r}} \right|^\gamma,$$

per $r = 1, \dots, k$. Di conseguenza

$$\left| X(t_1, \omega) - X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| \leq K \sum_{r=1}^k \left| \frac{1}{2^{p_r}} \right|^\gamma \leq \frac{K}{2^{n\gamma}} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{2^{r\gamma}} = \frac{C}{2^{n\gamma}} \leq C t^\gamma,$$

dove la penultima disuguaglianza deriva da $n < p_r \forall r$ e l'ultima da $t \geq 2^{-n}$.

Analogamente

$$\left| X(t_2, \omega) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \leq C t^\gamma.$$

Sommando le stime ottenute per t_1 e t_2 razionali diadici otteniamo che per qualche altra costante $C = C(\omega)$

$$|X(t_1, \omega) - X(t_2, \omega)| \leq C |t_1 - t_2|^\gamma.$$

Poiché $t \mapsto X(t, \omega)$ è continua per q.o. ω , usando la continuità per successioni, si ottiene la validità della stima precedente per ogni t_1, t_2 reali in $[0, 1]$. \square

Osservazione 23. La dimostrazione del teorema di Kolmogorov può essere modificata per dimostrare che se X è un processo stocastico tale che per qualche $\alpha, \beta > 0$ e $C \geq 0$

$$E(|X(t) - X(s)|^\beta) \leq C |t - s|^{1+\alpha},$$

allora X ammette una modificazione X' a orbite Hölder-continue per ogni $\gamma \in [0, \alpha/\beta]$.

Osservazione 24. Dimostriamo ora che un moto browniano W (o una sua modificazione con orbite continue) soddisfa le ipotesi del teorema di Kolmogorov. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ vale:

$$\begin{aligned} E(|W(t) - W(s)|^{2m}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \int_{\mathbb{R}} |x|^{2m} e^{-\frac{|x|^2}{2r}} dx \quad (\text{per } r = t - s > 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} r^m \int_{\mathbb{R}} |y|^{2m} e^{-\frac{|y|^2}{2}} dy \quad \left(\text{con } y = \frac{x}{\sqrt{r}} \right) \\ &= C r^m = C |t - s|^m. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato che per ogni m e per quasi ogni ω le orbite di W sono uniformemente Hölder-continue per ogni esponente $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$, ovvero per ogni $\gamma < \frac{1}{2}$.

Teorema 25. Per ogni $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ e per quasi ogni ω l'applicazione $t \mapsto W(t, \omega)$ non è mai Hölder-continua di parametro γ . Di conseguenza le orbite di un moto browniano non sono mai differenziabili e sono a variazione infinita su ogni sottointervallo.

Prima di procedere con la dimostrazione ricordiamo la definizione di variazione:

Definizione 26. Data una funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, si dice **variazione** di f in $[a, b]$ la quantità

$$v_a^b f = \sup_{\pi} \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

dove π varia fra tutte le partizioni $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ con $n \in \mathbb{N}$ dell'intervallo $[a, b]$.

f si dice a **variazione finita** se $v_a^b f < +\infty$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$.

f si dice a **variazione limitata** se $v_0^{+\infty} f < +\infty$.

Dimostrazione. (Teorema 25)

Esaminiamo per semplicità un moto browniano unidimensionale, e limitiamoci a considerare solo i tempi nell'intervallo $[0, 1]$. Scegliamo $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $N \in \mathbb{N}$ tale che $N(\gamma - \frac{1}{2}) > 1$.

Se l'applicazione $t \mapsto W(t, \omega)$ è Hölder-continua con esponente γ in qualche punto $0 \leq s < 1$, significa che esiste una costante K tale che $|W(t, \omega) - W(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Sia $n \gg 1$, poniamo $i = [ns] + 1$; si ha per $j = i, i + 1, \dots, i + N - 1$:

$$\begin{aligned} & \left| W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) \right| = \\ & = \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) - W(s, \omega) + W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \\ & \leq \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j+1}{n}, \omega\right) \right| + \left| W(s, \omega) - W\left(\frac{j}{n}, \omega\right) \right| \leq \\ & \leq K \left(\left| s - \frac{j+1}{n} \right|^\gamma + \left| s - \frac{j}{n} \right|^\gamma \right) \leq \frac{M}{n^\gamma} \end{aligned}$$

per qualche costante $M \in \mathbb{N}$ che dipende solo da N . Quindi

$$\omega \in A_{M,n}^i \doteq \left\{ \left| W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{j+1}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n^\gamma} \text{ for } j = i, \dots, i + N - 1 \right\}$$

per qualche $1 \leq i \leq n$ e $M \geq 1$ e per ogni n grande. Quindi l'insieme degli $\omega \in \Omega$ tali che $W(\omega, \cdot)$ è γ -Hölder-continua in qualche $0 \leq s < 1$ è contenuto in

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i.$$

Vogliamo ora mostrare che questo evento ha probabilità nulla. Per ogni k e M si calcola

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_{M,n}^i) \leq \\
&\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^\gamma}\right) \right)^N
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza sussiste poiché le variabili aleatorie $(W(\frac{j+1}{n}) - W(\frac{j}{n}))$ sono indipendenti e distribuite come $N(0, \frac{1}{n})$. Calcoliamo ora la probabilità fra parentesi:

$$\begin{aligned}
P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^\gamma}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{-\gamma}}^{Mn^{-\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Mn^{\frac{1}{2}-\gamma}}^{Mn^{\frac{1}{2}-\gamma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq Cn^{\frac{1}{2}-\gamma},
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dall'aver maggiorato l'integrando con la costante 1. Da questo si deduce quindi che:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n C(n^{\frac{1}{2}-\gamma})^N = 0$$

dove abbiamo usato il fatto che $N(\gamma - \frac{1}{2}) > 1$. Dato che questo vale per ogni k e M si ottiene la tesi considerando che :

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n A_{M,n}^i\right) = 0.$$

Si deduce immediatamente che $t \mapsto W(t, \omega)$ quasi certamente non è differenziabile in nessun punto s , poiché altrimenti dovrebbe essere Hölder-continua con esponente 1 in s . Inoltre se $W(t, \omega)$ avesse variazione finita in qualche sottointervallo, all'interno di questo sarebbe differenziabile quasi ovunque¹, e ciò è impossibile per quanto dimostrato. □

4 Integrale di un processo stocastico

Prima di poter definire rigorosamente un'equazione differenziale stocastica, abbiamo bisogno del concetto di integrale stocastico. Quello che vogliamo fare è definire un oggetto del tipo

$$\int X dW$$

dove W è un moto browniano e X è un processo stocastico.

Questo sarà possibile per una classe di processi stocastici che rispettino determinate proprietà, relativamente al moto browniano preso in considerazione. Una condizione necessaria alla definizione sarà la progressiva misurabilità del processo X .

¹Per la dimostrazione di questo fatto rimandiamo a [3, Capitolo 3].

Definizione 27. Sia $X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P)$ un processo stocastico, allora X si dice **progressivamente misurabile** se per ogni $u \in T$ si ha che l'applicazione $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ è misurabile da $([0, u] \times \Omega)$ in \mathbb{R} rispetto alla σ -algebra $(\mathcal{B}([0, u]) \times \mathcal{F}_u)$.

Vediamo ora altri risultati utili al nostro scopo.

Definizione 28.

i) Se $I = [0, T]$ è un intervallo, una **partizione** P di I è un insieme di punti di I della forma

$$P \doteq \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}.$$

ii) Il **diametro** di una partizione è:

$$|P| \doteq \max_{0 \leq k \leq m-1} |t_{k+1} - t_k|$$

Lemma 29. VARIAZIONE QUADRATICA DI UN MOTO BROWNIANO

Sia $[a, b]$ un intervallo con $0 \leq a < b < \infty$, sia W un moto browniano e sia

$$P^n \doteq \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}$$

una successione di partizioni di $[a, b]$ con $|P_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Allora

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \rightarrow b - a$$

in $L^2(\Omega)$ per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Sia $Q_n \doteq \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2$. Allora

$$Q_n - (b - a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)).$$

Quindi

$$E((Q_n - (b - a))^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} E\left([(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)] \right. \\ \left. [(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)] \right).$$

Per $k \neq j$, grazie all'indipendenza degli incrementi del moto browniano, l'argomento della sommatoria diventa:

$$E([(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)]) E([(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)]),$$

e poichè $(W(t) - W(s)) \sim N(0, t-s)$ per ogni $t \geq s \geq 0$, si ha che

$$E((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)) = (t_{k+1}^n - t_k^n) - (t_{k+1}^n - t_k^n) = 0.$$

Quindi rimangono solo i termini per $j = k$:

$$E((Q_n - (b - a))^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left(\left(\frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} - 1\right)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n)^2\right),$$

dove

$$\frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} \text{ segue una } N(0, 1).$$

Quindi, per qualche costante C , si ha

$$\begin{aligned} E((Q_n - (b - a))^2) &\leq C \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \\ &\leq C|P^n|(b - a) \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Osservazione 30. Passando eventualmente a una sottosuccessione, si ha che

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \rightarrow b - a \quad \text{quasi certamente.}$$

Scelto quindi ω per cui valga sia questa condizione, sia la Hölder-continuità uniforme (con $0 < \gamma < \frac{1}{2}$) dell'orbita, allora

$$\begin{aligned} b - a &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \\ &\leq K \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} |W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)| |t_{k+1}^n - t_k^n|^\gamma \\ &\leq K \limsup_{n \rightarrow \infty} |P_n|^\gamma \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} |W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)|}_{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

per qualche costante K . Poichè $|P_n| \rightarrow 0$, \mathbf{A} non può essere limitato, quindi

$$\sup_P \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)| \right\} = \infty. \quad (3)$$

Osservazione 31. La (3) fornisce un'ulteriore prova del fatto che le orbite di un moto browniano hanno variazione infinita.

Procederemo ora per passi definendo prima l'integrale di Itô di un processo a scalini e poi generalizzando.

Supponiamo di voler integrare un processo stocastico X rispetto ad un dato moto browniano W . Definiamo due importanti classi di processi, dipendenti da W .

Definizione 32. Dato il moto browniano $W = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), W(t), P)$,

- si denota con $\mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ lo spazio dei processi stocastici reali $G = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), G(t), P)$ progressivamente misurabili tali che

$$E \left(\int_0^T G^2 dt \right) < \infty,$$

- si denota con $\mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ lo spazio dei processi stocastici reali $H = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}(t), H(t), P)$ progressivamente misurabili tali che

$$E \left(\int_0^T |H| dt \right) < \infty.$$

La dipendenza da W di queste due classi è legata alla scelta dello spazio di probabilità e della filtrazione di σ -algebre, uguali per il moto browniano e per i processi da integrare.

Definizione 33. Un processo $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ è chiamato **processo a scalini** se esiste una partizione $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$ tale che

$$G(t) = G_k \quad \text{per} \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Definizione 34. Siano dati un moto browniano W e un processo a scalini $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$.

Si definisce **integrale stocastico di Itô** di G sull'intervallo $[0, T]$:

$$\int_0^T G dW \doteq \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k)).$$

Definizione 35. La σ -algebra $\mathcal{W}^+(t) \doteq \sigma(\{W(s) - W(t) | s \geq t\})$ è detta la **storia futura** del moto browniano W oltre il tempo t .

Definizione 36. Una filtrazione \mathcal{F} di σ -algebre adattate a un moto browniano W si dice **non anticipante** rispetto a W se $\mathcal{F}(t)$ è indipendente da $\mathcal{W}^+(t)$ per ogni $t \geq 0$.

Osservazione 37. La filtrazione naturale di un moto browniano W è sempre non anticipante rispetto allo stesso W .

D'ora in avanti considereremo sempre un moto browniano associato alla sua filtrazione naturale.

Lemma 38. (*Proprietà dell'integrale stocastico per processi a scalini*)
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, e per i processi a scalini $G, H \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$:

1. $\int_0^T aG + bH dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW$;
2. $E \left(\int_0^T G dW \right) = 0$;
3. se inoltre G è limitato rispetto a ω , vale l'importante **Isometria di Itô**:

$$E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T G^2 dt \right).$$

Dimostrazione.

La (1) è facile da provare.

Per la (2) supponiamo che $G(t) \equiv G_k$ per $t_k \leq t < t_{k+1}$. Allora

$$E \left(\int_0^T G dW \right) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))).$$

G_k è $\mathcal{F}(t_k)$ -misurabile grazie alla progressiva misurabilità, e $\mathcal{F}(t_k)$ è indipendente da $\mathcal{W}^+(t_k)$ perchè $\mathcal{F}(t)$ è non anticipante.

Inoltre $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ è $\mathcal{W}^+(t_k)$ -misurabile e quindi G_k è indipendente da $W(t_{k+1}) - W(t_k)$. Ne segue che

$$E(G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))) = E(G_k)E(W(t_{k+1}) - W(t_k)) = 0.$$

Passiamo a provare la (3):

$$E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) = \sum_{k,j=1}^{m-1} E(G_k G_j (W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))).$$

Se $j < k$, allora $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ è indipendente da $G_k G_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))$, e quindi

$$\begin{aligned} E(G_k G_j (W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))) &= \\ &= E(G_k G_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)))E(W(t_{k+1}) - W(t_k)). \end{aligned} \quad (4)$$

Essendo il primo dei due fattori in (4) limitato, e il secondo uguale a zero, si ha che (4)=0. Di conseguenza

$$\begin{aligned} E \left(\left(\int_0^T G dW \right)^2 \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2)E((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2)(t_{k+1} - t_k) \\ &= E \left(\int_0^T G^2 dt \right). \end{aligned}$$

□

L'isometria di Itô afferma che l'integrale di Itô per processi a scalini, visto come funzione da $\mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ in $L^2(\Omega)$, è un'isometria tra spazi vettoriali normati. Proprio questa caratteristica ci permetterà di estendere la definizione a tutti i processi di $\mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$. A questo scopo approssimeremo un generico processo $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ tramite una successione di processi a scalini.

Il seguente lemma, che non dimostreremo, ci assicura l'esistenza di tale successione approssimante:

Lemma 39. *Se $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, esiste una successione di processi a scalini limitati su Ω $G^n \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ tali che:*

$$E \left(\int_0^T |G - G^n|^2 dt \right) \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. (idea della dimostrazione)

Consideriamo l'applicazione $t \mapsto G(t, \omega)$, se è continua per q.o. ω approssimiamola con processi a scalini in questo modo:

$$G^n(t) \doteq G\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{per } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n} \quad \text{per } k = 0, \dots, [nT].$$

Per una generica $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, non necessariamente continua, il trucco è costruire a partire da essa una G^m continua e approssimarla come sopra. \square

Definizione 40. Data $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ e dati i relativi processi approssimanti G^n , grazie all'isometria di Itô, si ha che per $n, m \rightarrow \infty$:

$$E \left(\left(\int_0^T (G^n - G^m) dW \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T (G^n - G^m)^2 dt \right) \rightarrow 0.$$

Pertanto, data l'esistenza del seguente limite, si definisce **integrale di Itô** di un generico processo G :

$$\int_0^T G dW \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G^n dW.$$

Osservazione 41. L'integrale di Itô è ben definito perché non dipende dalla successione approssimante scelta per G .

Dimostrazione. Siano X_n e Y_n due processi a scalini approssimanti G .

Costruiamo un nuovo processo a scalini:

$$Z_n(t) = \begin{cases} X_n(t) & \text{se } n \text{ è pari} \\ Y_n(t) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}. \quad (5)$$

Poichè $Z_n \rightarrow G$ in $\mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, la successione è di Cauchy, e grazie all'isometria di Itô $\int_0^T Z_n dW$ converge in $L^2(\Omega)$. Questo implica che le due sottosuccessioni $\int_0^T X_n dW$ e $\int_0^T Y_n dW$ hanno lo stesso limite. \square

Si può inoltre verificare che valgono anche nel caso generale di un processo non a scalini le stesse proprietà dimostrate in (38).

Definizione 42. Per $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ definiamo l'**integrale indefinito di Itô** di G come:

$$I(t) \doteq \int_0^t G dW \quad (0 \leq t \leq T).$$

Osservazione 43. Ovviamente se $r \leq t$

$$I(t) - I(r) = \int_r^t G dW.$$

Alcune importanti proprietà dell'integrale indefinito $I(\cdot)$:

Teorema 44. Se $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, allora si ha:

- $I(\cdot)$ è una martingala,
- $I(\cdot)$ ha una modificazione con orbite continue per q.o. ω .

5 Differenziale Stocastico

Definizione 45. Sia X un processo stocastico a valori reali per cui esistano $F \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ tali che, per ogni $0 \leq s \leq r \leq T$, X verifichi

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW.$$

In questo caso si definisce **differenziale stocastico di X** :

$$dX = Fdt + GdW \quad \text{per } 0 \leq t \leq T.$$

La formula di Itô che ora andiamo a presentare è l'analogo della formula di Taylor per i processi stocastici.

Teorema 46. (FORMULA DI ITÔ)

Supponiamo che X sia un processo stocastico con differenziale stocastico $dX = Fdt + GdW$ dove $F \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, e che $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua con derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ continue. Poniamo poi $Y \doteq u(X(t), t)$, allora Y ha differenziale stocastico:

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 dt = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW \end{aligned}$$

Dimostrazione. Procederemo per passi nella dimostrazione, per prima cosa proviamo che sussistono le seguenti:

$$\bullet \quad d(W^2) = 2WdW + dt \quad (6)$$

$$\bullet \quad d(tW) = Wdt + tdW \quad (7)$$

Per dimostrare la (6) verifichiamo che per ogni $r \geq 0$:

$$\int_0^r W dW = \frac{W^2(r)}{2} - \frac{r}{2},$$

Presa una sequenza di partizioni di $[0, r]$ $P^n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m_n} = r\}$, abbiamo

$$\int_0^r W dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))$$

Scomponiamo l'espressione precedente. Con semplici calcoli si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)) = \frac{W(r)^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2,$$

dove il secondo addendo tende a $\frac{r}{2}$ in $L^2(\Omega)$ per il Lemma (29). Otteniamo quindi il risultato richiesto.

Passiamo ora a provare la (7). Si ottiene dalla definizione di integrale di Itô che

$$\int_0^r t dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} t_k^n (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))$$

dove $P^n = \{0 \leq t_0^n \leq t_1^n \leq \dots \leq t_{m_n}^n = r\}$ è una sequenza di partizioni di $[0, r]$ con $|P^n| \rightarrow 0$ e dove il limite si intende in $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Similmente abbiamo:

$$\int_0^r W dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} W(t_{k+1}^n)(t_{k+1}^n - t_k^n).$$

Notiamo che abbiamo potuto considerare W valutato nell'estremo destro dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ perchè, dato che l'applicazione $t \rightarrow W(t)$ è continua per quasi ogni $\omega \in \Omega$, la precedente sommatoria è una classica ridotta di Riemann.

Sommando le due espressioni si ottiene:

$$\int_0^r t dW + \int_0^r W dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n W(t_{k+1}^n) - t_k^n W(t_k^n)) = rW(r)$$

che, in forma differenziale, è proprio la (7).

Il prossimo passo della dimostrazione sarà provare la seguente:

• **regola del prodotto di Itô:**

Siano dati $0 \leq t \leq T$, $F_1, F_2 \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G_1, G_2 \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ tali che:

$$\begin{cases} dX_1 = F_1 dt + G_1 dW \\ dX_2 = F_2 dt + G_2 dW \end{cases}$$

Allora vale:

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + G_1 G_2 dt$$

dove il termine $G_1 G_2 dt$ è detto termine correttivo di Itô. La versione integrale della regola del prodotto è la formula di integrazione per parti di Itô:

$$\int_s^r X_2 dX_1 = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1 dX_2 - \int_s^r G_1 G_2 dt.$$

Si noti che per $G_1 = 0$ o $G_2 = 0$ si ritrova l'usuale formula di integrazione per parti. Per dimostrare la regola del prodotto di Itô scegliamo $0 \leq r \leq T$ e

assumiamo per semplicità $X_1(0) = X_2(0) = 0$, F_i, G_i indipendenti dal tempo e $\mathcal{F}(0)$ -misurabili. Dunque per $i = 1, 2$ e $t \geq 0$ si ottiene

$$X_i(t) = F_i t + G_i W(t)$$

da cui si ha:

$$\begin{aligned} & \int_0^r X_2 dX_1 + \int_0^r X_1 dX_2 + \int_0^r G_1 G_2 dt = \\ &= \int_0^r (X_1 F_2 + X_2 F_1) dt + \int_0^r (X_1 G_2 + X_2 G_1) dW + \int_0^r G_1 G_2 dt = \\ &= \int_0^r [(F_1 t + G_1 W) F_2 + (F_2 t + G_2 W) F_1] dt + \\ &+ \int_0^r [(F_1 t + G_1 W) G_2 + (F_2 t + G_2 W) G_1] dW + G_1 G_2 r = \\ &= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) \left(\int_0^r W dt + \int_0^r t dW \right) + 2 G_1 G_2 \int_0^r W dW + G_1 G_2 r. \end{aligned}$$

Usiamo ora la (6) e la (7) per calcolare gli integrali nell'ultima uguaglianza. Più precisamente ponendo

$$2 \int_0^r W dW = W^2(r) - r \quad \text{e} \quad \int_0^r W dt + \int_0^r t dW = r W(r)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_0^r X_2 dX_1 + \int_0^r X_1 dX_2 + \int_0^r G_1 G_2 dt = \\ &= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + G_2 F_1) r W(r) + G_1 G_2 W^2(r) = X_1(r) X_2(r). \end{aligned}$$

La regola del prodotto di Itô si prova nello stesso modo nel caso più generale in cui: $s \geq 0$, $X_1(s)$ e $X_2(s)$ sono arbitrari e F_i, G_i sono variabili aleatorie costanti $\mathcal{F}(s)$ -misurabili.

Se F_i, G_i sono processi a scalini, allora utilizziamo il ragionamento precedente in ogni sottointervallo $[t_k, t_{k+1}]$ in cui sono variabili aleatorie costanti, successivamente sommiamo i risultati ottenuti.

Infine, se $F_1, F_2 \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G_1, G_2 \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ scegliamo delle successioni di processi a scalini $F_i^n \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G_i^n \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ tali che per $n \rightarrow \infty$ e per $i = 1, 2$ valgano le:

$$\begin{aligned} E \left(\int_0^T |F_i^n - F_i| dt \right) &\rightarrow 0 \\ E \left(\int_0^T (G_i^n - G_i)^2 dt \right) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Definiamo per $i = 1, 2$:

$$X_i^n(t) \doteq X_i(0) + \int_0^t F_i^n ds + \int_0^t G_i^n dW$$

e applichiamo il caso semplice in ogni sottointervallo in cui F_i^n e G_i^n sono variabili aleatorie costanti, sommiamo i risultati ottenuti nell'intervallo $[s, r]$ e passiamo al limite $n \rightarrow \infty$. Si ottiene dunque:

$$X_1(r)X_2(r) = X_1(s)X_2(s) + \int_s^r X_1 dX_2 + \int_s^r X_2 dX_1 + \int_s^r G_1 G_2 dt$$

che finalmente prova la formula del prodotto di Itô.

• Siamo ora pronti per dimostrare la **formula di Itô**.

Supponiamo che il processo X abbia differenziale stocastico $dX = Fdt + GdW$ con $F \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$ e $G \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$.

Proviamo inizialmente l'asserto nel caso u sia un polinomio, scegliamo dunque $u(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{N}$ e proviamo per induzione che:

$$\begin{aligned} d(X^m) &= mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt = \\ &= GmX^{m-1}dW + \left(\frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2 + FmX^{m-1} \right) dt. \end{aligned}$$

I casi $m = 0, 1$ sono banali, e il caso $m = 2$ discende dalla regola del prodotto di Itô.

Assumiamo l'asserto vero fino ad $m-1$ e verifichiamolo per m :

$$\begin{aligned} d(X^m) &= d(XX^{m-1}) = Xd(X^{m-1}) + X^{m-1}dX + (m-1)X^{m-2}G^2dt = \\ &= X \left((m-1)X^{m-2}dX + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2dt \right) + \\ &\quad (m-1)X^{m-2}G^2dt + X^{m-1}dX = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2dt. \end{aligned}$$

Questo prova che la formula di Itô è valida per le funzioni $u(x) = x^m$ per $m \in \mathbb{N}$, di conseguenza, per la linearità dell'operatore d , si ha che la formula è valida per ogni polinomio $u(x)$.

Supponiamo ora che la funzione u sia della forma $u(x, t) = f(x)g(t)$ dove f e g sono polinomi, in tal caso si ha:

$$\begin{aligned} d(u(X, t)) &= d(f(X)g) = f(X)dg + gdf(X) = \\ &= f(X)g'dt + g(f'(X)dX + \frac{1}{2}f''(X)G^2dt) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}G^2dt. \end{aligned}$$

Una volta dimostata la validità della formula di Itô per funzioni della forma $u(x, t) = f(x)g(t)$ con f e g polinomi, possiamo estendere il risultato ad ogni funzione polinomiale nelle variabili x e t , cioè ad ogni $u(x, t) = \sum_{i=1}^m f^i(x)g^i(t)$ con f^i e g^i polinomi. Resta da estendere il risultato a funzioni generiche che verificano le ipotesi del lemma di Itô. Prendiamo una successione di polinomi u^n tali che $u^n \rightarrow u$, $\frac{\partial u^n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u^n}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dove la convergenza è uniforme sui compatti di $\mathbb{R} \times [0, T]$. Per quanto mostrato precedentemente si ha per $0 \leq r \leq T$:

$$u^n(X(r), r) - u^n(X(0), 0) = \int_0^r \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\partial u^n}{\partial x}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2}G^2 \right) dt + \int_0^r \frac{\partial u^n}{\partial x}GdW.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ proviamo la formula in generale. □

6 Equazioni differenziali stocastiche

Possiamo ora dare la definizione rigorosa di equazione differenziale stocastica.

Definizione 47. Diremo che un processo stocastico X è una **soluzione della equazione differenziale stocastica di Itô**

$$\begin{cases} dX &= b(X, t)dt + B(X, t) dW \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (\text{EDS})$$

per $0 \leq t \leq T$, se:

i) X è progressivamente misurabile rispetto a \mathcal{F} , filtrazione naturale di W ;

ii) $b(X, t) \in \mathbb{L}_W^1([0, T] \times \Omega)$;

iii) $B(X, t) \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$;

iv) $X(t) = X_0 + \int_0^t b(X(s), s) ds + \int_0^t B(X(s), s) dW$ quasi certamente, per ogni $0 \leq t \leq T$.

ESEMPIO 1. Sia g una funzione continua. Allora una soluzione di

$$\begin{cases} dX &= gX dW \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

è

$$X(t) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dW}$$

per $0 \leq t \leq T$. Per verificarlo notiamo che

$$Y(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t g^2 ds + \int_0^t g dW$$

soddisfa

$$dY = -\frac{1}{2} g^2 dt + g dW.$$

Sfruttando la formula di Itô per $u(x) = e^x$ abbiamo

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial u}{\partial x} dY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} g^2 dt \\ &= e^Y \left(-\frac{1}{2} g^2 dt + g dW + \frac{1}{2} g^2 dt \right) \\ &= gX dW, \quad \text{come richiesto.} \end{aligned}$$

Grazie a un teorema di esistenza e unicità che riporteremo in seguito è possibile mostrare che questa soluzione è unica.

ESEMPIO 2. Similmente si vede che la soluzione (anche in questo caso unica) di

$$\begin{cases} dX &= fX dt + gX dW \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

è

$$X(t) = e^{\int_0^t (f - \frac{1}{2} \int_0^t g^2) ds + \int_0^t g dW}$$

per $0 \leq t \leq T$.

Torniamo quindi al nostro problema iniziale. Ricordiamo l'equazione che descrive l'andamento temporale del prezzo $P(t)$ di un bene:

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW. \quad (\text{STOCK PRICE})$$

Usiamo la formula di Itô per calcolare

$$d(\log(P)) = \frac{dP}{P} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 P^2 dt}{P^2} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW.$$

Otteniamo quindi:

$$P(t) = p_0 e^{\sigma W(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t}.$$

Osserviamo che il prezzo è sempre positivo, ammettendo che lo sia p_0 .

Dato che (STOCK PRICE) implica che

$$P(t) = p_0 + \int_0^t \mu P ds + \int_0^t \sigma P dW$$

e poichè $E \left(\int_0^t \sigma P dW \right) = 0$, vediamo che

$$E(P(t)) = p_0 + \int_0^t \mu E(P(s)) ds.$$

Quindi

$$E(P(t)) = p_0 e^{\mu t} \quad \text{per } t \geq 0.$$

Di conseguenza il valore atteso del prezzo di un bene concorda con la soluzione deterministica dell'equazione (STOCK PRICE) ovvero quella che si ottiene ponendo $\sigma = 0$.

Realizzazione di (STOCK PRICE)

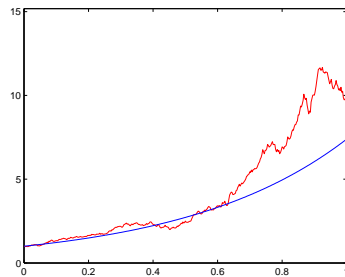


Figura 2: $\mu = 2$ e $\sigma = 0.4$.

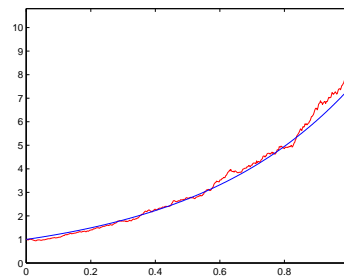


Figura 3: $\mu = 2$ e $\sigma = 0.2$.

Citiamo per completezza il seguente:

Teorema 48. ESISTENZA E UNICITÀ DELLE SOLUZIONI

Supponiamo che $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e che $B : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ siano continue e verifichino le seguenti condizioni:

per ogni $0 \leq t \leq T$, $x, \hat{x} \in \mathbb{R}$ esiste una costante L tale che

a) $|b(x, t) - b(\hat{x}, t)| \leq L|x - \hat{x}|,$

b) $|B(x, t) - B(\hat{x}, t)| \leq L|x - \hat{x}|.$

Sia X_0 una variabile aleatoria reale tale che

c) $E(|X_0|^2) < \infty,$

d) X_0 è indipendente da $\mathcal{W}^+(0) = \sigma(\{W(s) | s \geq 0\})$, dove W è un dato moto browniano.

Allora esiste un'unica soluzione $X \in \mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$ all'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX &= b(X, t) dt + B(X, t) dW & (0 \leq t \leq T) \\ X(0) &= X_0 \end{cases} . \quad (\text{EDS})$$

Osservazione 49. Unica vuol dire che se X e \hat{X} sono processi stocastici in $\mathbb{L}_W^2([0, T] \times \Omega)$, con orbite quasi certamente continue, ed entrambi risolvono (EDS), allora

$$P\left(X(t) = \hat{X}(t) \text{ per ogni } 0 \leq t \leq T\right) = 1.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] P. BALDI, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Pitagora Editrice, Bologna (1984).
- [2] L.C. EVANS, *An Introduction to Stochastic Differential Equations, Version 1.2*, Lecture Notes.
- [3] G. FOLLAND, *Real Analysis, Modern Techniques and Applications*, Wiley-Interscience publication (1984).