



10784.36  
5x=2  
2.715372  
9÷1

# NASH E LA TEORIA DEI GIOCHI



# INTRODUZIONE

- ❑ Il modello scientifico di un fenomeno reale è un sistema di leggi matematiche, il più semplice possibile, che funzioni in maniera analoga alle caratteristiche del fenomeno che si vogliono studiare. Un modello matematico serve a studiare fenomeni naturali e attività umane così da poterne prevedere i risultati.
- ❑ In particolare si possono analizzare i casi di conflitto tra esseri umani in cui si hanno interessi opposti ed ognuno cerca di prevalere sugli altri. Con un modello si possono prevedere i risultati delle scelte/azioni di una persona in funzione delle scelte fatte da tutti gli avversari.

# ELEMENTI DI TEORIA DEI GIOCHI

- Un gioco è caratterizzato dalle **regole** che lo governano, dal **numero** di giocatori, dalle **strategie** a disposizione di ciascuno giocatore e dagli esiti (**payoff**) associati ad ogni combinazione di strategie giocabili.
- Gioco: qualsiasi situazione in cui più giocatori si trovano a controllare ciascuno una o più variabili che influiscono sull'utilità propria e/o degli altri → descrive l'interazione strategica nelle scelte di giocatori autonomi.
- L'**obiettivo** di un giocatore consiste nella massimizzazione del proprio esito finale. Inoltre, ogni giocatore sa che anche gli altri perseguono il medesimo obiettivo.
- L'interazione strategica tra individui, sulla base delle norme dettate dalla loro razionalità, produce, quando esiste, l'equilibrio del gioco, che può non essere unico.
  - Un equilibrio è definibile come la combinazione delle migliori strategie a disposizione di ognuno degli agenti che prendono parte del gioco.
  - Il concetto di equilibrio è, quindi, distinto da quello di esito del gioco, quest'ultimo identificato nell'insieme dei payoff prodotti dalle strategie di equilibrio.

# CLASSIFICAZIONE DEI GIOCHI

## □ Giochi cooperativi e giochi non cooperativi

- I giochi non cooperativi sono quelli in cui non sono fattibili accordi vincolanti tra giocatori.
- I giochi cooperativi sono quelli in cui tali accordi sono fattibili per certi sottoinsiemi di giocatori (detti coalizioni ammissibili). Esempio di gioco pienamente cooperativo: cartello di imprese.

## □ Per i giochi non cooperativi diremo:

- Che è un gioco a **somma costante** se il payoff complessivo a disposizione degli agenti non varia al variare delle loro scelte: il guadagno di uno è la perdita dell'altro. Nel caso contrario diciamo che il gioco è a somma variabile.
- Che il gioco è ad **informazione perfetta** se ogni giocatore, in ogni istante del gioco, è interamente a conoscenza della sua storia passata; vale a dire dell'intera sequenza di mosse effettuate da lui e dagli altri fino a quel momento.
- Che il gioco è ad **informazione simmetrica** se nessuno dei giocatori dispone di informazioni di cui non siano in possesso anche tutti gli altri.
- Che il gioco è ad **informazione completa** se gli elementi che lo caratterizzano sono di comune conoscenza tra tutti i giocatori. Altrimenti si dice che il gioco è con informazione incompleta.
- Che il gioco è a **somma zero** quando, dati due contendenti, A e B, la vincita di un giocatore è uguale, in valore assoluto, alla perdita dell'avversario.

*(Ad esempio il gioco degli investitori nel mercato azionario può essere paragonato a un benchmark, gioco a somma zero.)*

# RAPPRESENTAZIONE DEL GIOCO IN FORMA STRATEGICA

- Un gioco in forma strategica con due giocatori si rappresenta comunemente mediante una bimatrice le cui righe e colonne sono intestate, rispettivamente, alle strategie pure del giocatore 1 e del giocatore 2. In corrispondenza alla riga  $k$  e alla colonna  $j$ , la bimatrice riporta la coppia di vincite associata alla combinazione strategica  $(k,j)$ . Per brevità, se la bimatrice ha dimensione  $m \times n$ , si parla di gioco  $m \times n$ . Ad esempio, la bimatrice  $G$

Giocatore1/Giocatore2	C	D
A	$a_1, a_2$	$b_1, c_2$
B	$c_1, b_2$	$d_1, d_2$

rappresenta un generico gioco  $2 \times 2$ .

Il primo numero delle coppie presenti in ciascuna cella indica il guadagno del giocatore riga, il secondo invece indica il guadagno del giocatore colonna.

# LE STRATEGIE PURE E LE STRATEGIE MISTE

- ❑ **Strategie Pure:** Indichiamo con  $s_i$  una generica strategia pura del giocatore  $i$  e con  $s_{-i}$  una generica combinazione di strategie pure dei suoi avversari, e con  $s=(s_1, \dots, s_n)=(s_i, s_{-i})$  una generica combinazione di strategie pure. Sostituendo  $S$  a  $s$  indichiamo i corrispondenti insiemi. Ad esempio,  $S_{-i}$  rappresenta l'insieme delle combinazioni di strategie pure degli avversari di  $i$ .
- ❑ **Strategie miste:** Un giocatore potrebbe scegliere di giocare non una delle strategie pure di cui dispone, in modo secco, ma giocare una combinazione probabilistica di due o più strategie. Ad esempio legare la scelta al fatto che nel lancio di una moneta esca testa o croce.

Sostituendo  $\sigma$  a  $s$  nella precedente definizione di strategia pura, riferiamo lo stesso concetto ad una strategia mista. Ad esempio,  $\sigma_i$  rappresenta una generica strategia mista del giocatore  $i$ . Analogamente, sostituendo  $\Sigma$  a  $S$  indichiamo i corrispondenti insiemi nel caso di strategie miste. Ad esempio  $\Sigma$  rappresenta l'insieme di tutte le combinazioni di strategie miste del gioco.

Si ricordi che una strategia mista è una distribuzione di probabilità sulle strategie pure. Scriveremo  $1/3A+2/3B$  per indicare la strategia mista che attribuisce probabilità  $1/3$  alla strategia pura A e  $2/3$  alla strategia pura B (e 0 alla strategia pura C). Con una notazione alternativa scriveremo che  $\sigma_i(s_i)=1/2$  per indicare che la strategia  $\sigma_i$  assegna probabilità  $1/2$  alla strategia pura  $s_i$ .

## Vantaggi:

- Nel caso di strategie miste non ha più senso parlare di induzione certa rispetto alle strategie degli avversari (viene vanificato ogni tentativo di spionaggio).
- Si può dimostrare che nell'ambito delle strategie miste l'equilibrio di Nash esiste sempre quando il numero di giocatori e di strategie è finito.
- Con le strategie miste dovrà essere introdotto anche il concetto di payoff atteso (utilità attesa), inteso come la media ponderata dei payoff puri applicando come pesi di ponderazioni le probabilità assegnate da ciascuno giocatore alla scelta delle strategie pure. Utilità attesa: media ponderata delle utilità associate ai possibili esiti elementari.

# IL CRITERIO DELLA DOMINANZA

- Una strategia  $h$  è dominante su tutte le altre possibili strategie a disposizione del giocatore, quando il risultato associato a  $h$  è sempre il migliore, quale che sia la mossa dell'avversario.

Se il giocatore è razionale e se tra le sue strategie ve ne è una strettamente dominante, possiamo esser certi che la sceglierà.

- Una delle critiche mosse a questo criterio consiste nel fatto che questo modo di procedere non prende in considerazione motivazioni di prudenza.

- **Definizione Dominanza**

*Una strategia pura  $s_i^1$  domina un'altra strategia pura  $s_i$  se  $u_i(s_i^1, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$  per ogni  $s_{-i}$  in  $S_{-i}$ . In modo ovvio si estende la definizione alle strategie miste.*

- **Definizione Equilibrio con strategie dominanti**

*Una combinazione di strategie  $\xi^*$  tale che per ogni giocatore  $i$  la strategia  $\xi_i^*$  è dominante costituisce un equilibrio in strategie dominanti.*

La nozione di equilibrio in azioni dominanti è intuitiva e fornisce una previsione dell'esito di equilibrio del gioco molto attraente; infatti:

- l'equilibrio è unico;
- i giocatori hanno un solo modo ragionevole di giocare;
- purtroppo, la gran parte dei giochi non ammette un equilibrio in azioni dominanti.



# TEOREMA DI NASH

Abbiamo già introdotto la nozione di gioco non cooperativo. Riprendiamo qui tale concetto per accennare in modo semplificato al teorema di Nash per i giochi non cooperativi

- ❑ **In sostanza i giochi non cooperativi sono quei giochi in cui i giocatori, che possono anche essere più di due, non perseguono dei fini comuni ma non sono neanche in competizione diretta tra loro.** Quindi la vittoria di un giocatore non corrisponde alla sconfitta degli altri, ma ognuno punta ad ottenere il massimo punteggio per sé considerando però che la possibilità di guadagno di ognuno dipenderà comunque dalle scelte di tutti.

Tale tipologia di giochi è particolarmente adatta per lo studio di problemi economici.

Secondo le teorie economiche di Adam Smith, considerato uno dei padri dell'economia moderna, l'ambizione individuale serve al bene comune e di conseguenza un gruppo di persone ottiene il massimo risultato quando ogni componente del gruppo fa ciò che è meglio per sé.

- ❑ John Nash (nel 1949) formulò però un risultato diverso e più completo dimostrando un **celebre teorema**:

**“Il risultato migliore si ottiene quando ogni componente del gruppo fa ciò che è meglio per sé e per il gruppo.”**

## Considerazioni:

- ❑ Quindi nei giochi non cooperativi è possibile raggiungere una situazione nella quale tutti ottengono il miglior risultato possibile a condizione che si instauri una cooperazione tra i giocatori, vale a dire che tutti agiscano non col fine di ottenere il miglior risultato solo per sé, ma di ottenere il miglior risultato per il gruppo, e quindi, indirettamente, ottenendo un risultato migliore anche per loro stessi.

Lo stesso John Nash descrive con queste parole il risultato teorico da lui raggiunto: *"Un gioco può essere descritto in termini di strategie che i giocatori devono seguire nelle loro mosse: l'equilibrio c'è quando nessuno riesce a migliorare in maniera unilaterale il proprio comportamento. Per cambiare occorre agire insieme."*

- ❑ I giocatori possono dunque operare una scelta dalla quale tutti traggono un vantaggio o limitano lo svantaggio al minimo.

Questa è la **differenza sostanziale rispetto al caso dei giochi a somma zero**, studiati in precedenza da John Von Neumann, dove la vittoria di uno dei due (unici) partecipanti è totale e necessariamente accompagnata dalla sconfitta dell'altro.

Il seguente paragrafo chiarirà meglio questo risultato attraverso la nozione di equilibrio di Nash.

# EQUILIBRIO DI NASH

- ❑ Una soluzione costituisce **equilibrio di Nash** (1951) quando le strategie di ciascun giocatore rappresentano la scelta migliore, date le migliori altrui strategie. In altri termini, un equilibrio è di Nash se ciascun giocatore, una volta osservate le scelte degli altri, non ha alcun interesse a cambiare la propria.
- ❑ L'equilibrio di Nash gode della proprietà di **stabilità** (ciascuno ha interesse a confermare la propria scelta, una volta rilevata la mossa dell'avversario).

Giocatore A/B	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>1</sub>	6,6	10,3
A <sub>2</sub>	5,7	4,8

*(A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>) è un equilibrio di Nash ed è l'unico punto stabile. Infatti anche se B avesse conosciuto la scelta di A, A<sub>1</sub>, avrebbe confermato la propria B<sub>1</sub>, e, viceversa se A avesse conosciuto la scelta di B, B<sub>1</sub>, avrebbe confermato A<sub>1</sub>: questo è sufficiente per stabilire che (A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>) è un equilibrio di Nash. (A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub>) non è soluzione di equilibrio di Nash. Se A avesse conosciuto la mossa di B, B<sub>2</sub>, non avrebbe scelto A<sub>2</sub> ma A<sub>1</sub>. Analogo ragionamento si può fare per (A<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>) e (A<sub>2</sub>, B<sub>1</sub>).*

Posto che l'avversario giochi la mossa dell'equilibrio di Nash, ciascuno è indotto a sua volta a giocare la propria mossa di equilibrio di Nash (se i giocatori sono razionali ed intelligenti).

# DEFINIZIONE FORMALE DELL'EQUILIBRIO DI NASH

Dato un gioco  $G$ , chiamiamo **equilibrio di Nash** per le strategie pure ogni combinazione di strategie  $s^*$  tale che  $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$  per ogni giocatore  $i$  e in ogni strategia  $s_i \in S_i$ . Sostituendo ovunque la lettera  $\sigma$  alla lettera  $s$  otteniamo la definizione di equilibrio di Nash per le strategie miste.

## Considerazioni:

- Il significato della disuguaglianza è molto semplice: se un gioco ammette almeno un equilibrio di Nash, ogni agente ha a disposizione almeno una strategia dalla quale non ha alcun interesse ad allontanarsi se tutti gli altri giocatori hanno giocato la propria strategia d'equilibrio.
- Infatti se un solo giocatore cambia strategia mentre tutti gli altri mantengono "quella di equilibrio" può solo peggiorare il proprio guadagno o al più lasciarlo invariato. La strategia di ogni giocatore è quindi vincolata alle scelte degli altri. Poiché questo vale per tutti i giocatori se esiste un equilibrio di Nash ed è unico (vedi sotto per la non unicità) esso, in generale, rappresenta la soluzione del gioco.

# METODO PER CALCOLARE L'EQUILIBRIO DI NASH IN UN GIOCO DI COPPIA

Si consideri la tabella del primo giocatore e si ponga in ciascuna colonna una freccia che va dal valore più piccolo al più grande (essa rappresenta un possibile miglioramento della strategia del primo giocatore).

Si consideri la tabella del secondo giocatore e si ponga in ciascuna riga una freccia che va dal valore più piccolo al più grande (essa rappresenta un possibile miglioramento della strategia del secondo giocatore).

Sovrapponendo le due tabelle, se ci sono celle puntate da due frecce, questi sono gli equilibri di Nash.

Ad esempio:

3	1
↑	↑
2	0

3	←	2
1	←	0

(3,3)	←	(1,2)
↑		↑
(2,1)	←	(0,0)

## Situazione di vita reale modellata:

- Quando si aiuta il prossimo sapendo che il prossimo aiuterà noi;
- azioni di obbedienza civile;
- guidare a destra;
- pagare le tasse.

# PROPRIETA' DELL'EQUILIBRIO DI NASH

## ❑ Molteplicità dell'equilibrio di Nash

Non sempre l'equilibrio Nash gode della proprietà dell'unicità. Nel gioco in tabella abbiamo - per esempio - 2 equilibri di Nash,  $(a_1, b_2)$  e  $(a_2, b_1)$

Giocatore A/B	$b_1$	$b_2$
$a_1$	16,4	10,5
$a_2$	17,8	9,4

## ❑ Assenza dell'equilibrio di Nash

Quando i giocatori hanno a disposizione solo le strategie pure (giocano cioè delle strategie a loro disposizione e non una combinazione probabilistica di esse) può esser che l'equilibrio di Nash non esista.

### **Esempio - Il gioco del contribuente:**

In questo gioco ci sono due giocatori: il contribuente e l'ispettore fiscale. Il contribuente deve decidere se evadere le tasse o fornire dichiarazione veritiera. L'ispettore deve decidere se controllare o meno la dichiarazione dei redditi considerando il costo che incorre nel controllare.

Giocatore A/B	$b_1$	$b_2$
$a_1$	17,4	9,5
$a_2$	16,8	10,4

*Si noti che non esiste equilibrio di Nash: questo è conseguenza del fatto che le preferenze sono cicliche. Se l'ispettore non controllasse per il contribuente sarebbe ottimale evadere. Se questi evade, però, per l'ispettore è ottimale controllare. Ma posto che l'ispettore controlli al contribuente conviene non evadere e se il contribuente paga le tasse il comportamento migliore per l'ispettore è non effettuare il controllo.*

### □ “Difetti” dell'equilibrio di Nash

**Non esistenza e non unicità** sono difetti dell'equilibrio di Nash. Inoltre, alcune soluzioni possono non essere convincenti anche se uniche.

Giocatore A/B	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	24,24	22,26	0,0
$a_2$	22,26	24,24	0,0
$a_3$	0,0	0,0	1,1

*Pur essendo  $(a_3, b_3)$  l'unico equilibrio di Nash, nessuno dei giocatori si augura di pervenirvi. E' evidente che entrambi i giocatori auspicano di collocarsi su una delle quattro caselle con payoff superiori a 20 pur non configurando tra esse nessun equilibrio di Nash.*

## Come ovviare alla pluralità degli equilibri:

Alla luce dei risultati fin qua analizzati viene da chiedersi: **"Quando vi sono più equilibri di Nash, quale può esser considerata la soluzione del gioco?"**

Sono stati proposti alcuni criteri (**refinements**) che si prefiggono di perfezionare uno tra i molteplici equilibri che potrebbero emergere dal gioco, in modo da giudicarlo, per qualche motivo, "migliore" degli altri.

In altre parole, la teoria dei giochi mette in evidenza come, in certe circostanze, siano possibili diverse configurazioni di equilibrio. Per stabilire quale effettivamente si verrà a determinare, non è sufficiente limitarsi a studiare tali equilibri, ma occorrono considerazioni ulteriori, che possono esser relative sia alla struttura complessiva dei payoffs, sia a fattori esogeni. Trattiamo di seguito il caso in cui l'esistenza di convenzioni sociali permetta di selezionare un equilibrio.

Si consideri il **gioco della "precedenza"**. Il luogo in cui si svolge è un crocevia, i giocatori sono gli automobilisti 1 (che viene da sinistra) e 2 (che viene da destra), che dispongono della medesima coppia di strategie: F=fermarsi e P=passare.

Giocatore 1/2	F	P
F	-20,-20	-2,0
P	0,-2	-90,-90

*Il gioco presenta due equilibri di Nash:  $(1F, 2P)$  e  $(1P, 2F)$  → la teoria dei giochi può servire a spiegare la nascita delle istituzioni sociali: quando a priori non è evidente quale gioco verrà giocato, può intervenire la convenzione sociale (es. precedenza da dx). In tal caso ciò porta ad individuare in  $(1F, 2P)$  la soluzione del gioco.*

❑ *Ma allora le convenzioni possono nascere come equilibrio di un gioco, magari ripetuto?*



# GIOCHI DI COPPIA

**Da ora in poi considereremo solo giochi**

- Fra coppie di giocatori;
- Completamente razionali;
- Il cui interesse sia di vincere;

In queste condizioni stabiliamo, convenzionalmente, che il comportamento dei due giocatori possa essere:

- **COOPERAZIONE (C)**
- **NON COOPERAZIONE (NC)**

**Tipiche situazioni di cooperazione sono**

- Altruismo;
- Democrazia;
- Internazionalismo;
- ...

**Situazioni di non cooperazione sono:**

- Egoismo;
- Totalitarismo;
- Nazionalismo;
- ...

Fatte queste premesse, d'ora in poi le tabelle che rappresentano i guadagni dei due giocatori saranno di questo tipo:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	$X_{cc}, Y_{cc}$	$X_{cn}, Y_{cn}$
1 non coopera	$X_{nc}, Y_{nc}$	$X_{nn}, Y_{nn}$

*Le strategie sono solo due tipi, C e NC. Per quanto riguarda i simboli all'interno della tabella prendiamo ad esempio  $X_{cc}$   $Y_{cc}$ : essi sono rispettivamente il guadagno del giocatore 1 se coopera e il guadagno del giocatore 2 se coopera.*

- Ricordiamo che vi sono giochi in cui è possibile raggiungere uno stato più vantaggioso per tutti i giocatori ma che nessuno attua perché contravviene all'assioma di razionalità.
- In sostanza: **non sempre una strategia razionale è anche conveniente.**

# GIOCO SIMMETRICO

**In un gioco simmetrico ogni giocatore presenta gli stessi guadagni**

$X_{cc}=Y_{cc}$   $X_{cn}=Y_{nc}$   $X_{nc}=Y_{cn}$   $X_{nn}=Y_{nn}$ .

Quindi se esiste una strategia razionale, essa è la stessa per entrambi.

Il gioco è completamente determinato dal modo in cui i giocatori ordinano le quattro possibilità:

**CC CN NC NN**

Tra tutte le combinazioni possibili, mostrano particolare interesse quelle in cui le due C del secondo giocatore precedano le sue due N, cioè quelle in cui la cooperazione dell'avversario è da preferire, indipendentemente dal proprio comportamento.

**I possibili giochi sono quindi:**

**CC>NC>CN>NN**

**CC>NC>NN>CN**

**NC>CC>CN>NN**

**NC>CC>NN>CN**

# PRIMA TIPOLOGIA (CC>NC>CN>NN)

La situazione risulta tanto migliore quanta più cooperazione c'è.

## Ragionamento del primo giocatore:

- La cooperazione di entrambi è da preferire (CC)
- La non cooperazione è la peggiore (NN)
- Nel caso in cui uno dei due defezionasse è meglio che sia io (NC>CN)

Assegnando valori arbitrari (es  $CC=3$ ,  $NC=2$ ;  $CN=1$ ,  $NN=0$ ), si ha la seguente tabella dei payoff

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	3,3	1,2
1 non coopera	2,1	0,0

# LA CACCIA AL CERVO (CC>NC>NN>CN)

Il nome deriva da un passo di J.J. Rousseau tratto dal "Discorso sull'origine della disuguaglianza tra gli uomini" del 1755.

Le società umane sono evoluzioni delle alleanze temporanee che i primitivi stringevano per la caccia ai grossi animali.

## Situazione:

Per cacciare un grosso animale (cervo) è necessario essere almeno in due.

Ma mentre si sta cacciando un cervo può capitare di vedere una lepre, la cui cattura è possibile da parte di un solo uomo.

Il cacciatore viene così tentato dal lasciare la caccia al cervo (difficile) per cacciare la lepre (semplice).

Un cervo è meglio di una lepre, ma una lepre è meglio di niente.

La tentazione è rafforzata dal considerare che anche l'altro cacciatore potrebbe abbandonare la caccia al cervo se vedesse la lepre.

## Ragionamento del primo giocatore:

La cooperazione di entrambi è da preferire(CC)

Ma se io non coopero è meglio che l'altro continui a cooperare (NC) perché se non prendo la lepre posso sempre tornare a cacciare il cervo.

Se lui non coopera è meglio che non lo faccia neanche io (NN)

La situazione peggiore è che io cooperi e lui no (CN), perché in questo caso perderei lepre e cervo.

Assegnando valori arbitrari (es  $CC=3$ ,  $NC=2$ ,  $CN=0$ ,  $NN=1$ ), si ha la seguente tabella dei payoff:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	3,3	0,2
1 non coopera	2,0	1,1

Ci sono **2 equilibri di Nash**. Infatti:

3	0
↑	↓
2	1

3	←	2
0	→	1

(3,3)	←	(0,2)
↑		↓
(2,0)	→	(1,1)

- La mutua cooperazione è più desiderabile
- Ma la mutua non cooperazione è meno rischiosa, nel caso in cui non ci fosse cooperazione reciproca.

Sia la mutua cooperazione che la mutua non cooperazione sono comportamenti razionali. Si opta per l'una o per l'altra in base a fattori quali il livello di fiducia nell'altro giocatore.

### Situazione di vita reale modellata:

- Fai agli altri ciò che speri sarà fatto a te (CC)
- Non fare agli altri ciò che non vuoi che sia fatto a te (NN)

# LA CORSA DEL CONIGLIO (NC>CC>CN>NN)

Il nome deriva da una scena del film "Gioventù Bruciata" del 1955, con James Dean, in cui giovani si sfidano a guidare auto a tutta velocità verso un precipizio e quello che salta fuori per primo è un coniglio (e perde).

Bertrand Russel modificò il gioco ne **"Il senso comune e la guerra nucleare"** per descrivere la situazione di tensione tra URSS e USA. Le auto vengono dirette una contro l'altra e vince chi non vira.

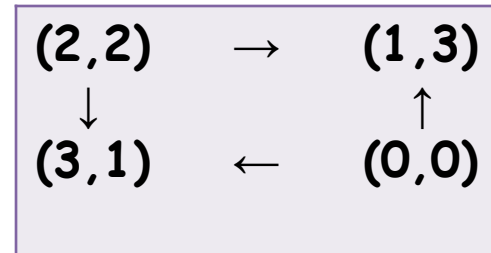
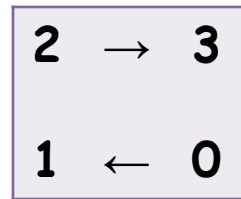
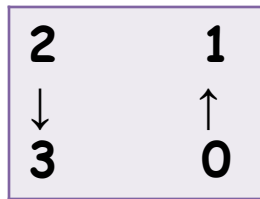
## Ragionamento del primo giocatore:

- La migliore delle ipotesi è che io non cooperi e lui sì (NC), cioè che lui si comporti da coniglio.
- Se io coopero è meglio che anche lui cooperi, almeno non faccio la figura del coniglio da solo (CC).
- Se comunque lui non coopera è meglio che io lo faccia, altrimenti mi schianto (CN)
- La situazione peggiore è che la mutua non cooperazione, perché entrambi ci distruggiamo (NN).

Assegnando valori arbitrari (es  $NC=3$ ,  $CC=2$ ,  $CN=1$ ,  $NN=0$ ), si ha:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	2,2	1,3
1 non coopera	3,1	0,0

Ci sono 2 **equilibri di Nash**. Infatti:



**Non esiste una strategia razionale per il gioco**, infatti gli equilibri di Nash portano a soluzioni che sono razionali solo per un giocatore.

I giocatori vogliono essere forti con i deboli ( $NC > CC$ ) e deboli con i forti ( $CN > NN$ ).

**Questo è quindi un gioco in cui non si vince** (sembrerebbe anche logico), anche se la mutua collaborazione sembrerebbe la soluzione meno razionale.

**Situazione di vita reale modellata:**

Sfide (politiche, economiche, militari) nelle quali i contendenti giocano il tutto per il tutto sperando che l'altro ceda, rischiando però il comune disastro:

- Crisi di Cuba,
- Corsa agli armamenti.



# DILEMMA DEL PRIGIONIERO (NC>CC>NN>CN)

Gioco proposto da Merrill Flood e Melvin Dresher nel 1950, come parte delle ricerche sulla teoria dei giochi promosse dalla *Rand Corporation* per le possibili **applicazioni ad una strategia nucleare globale**.

Esso in realtà risale a molto tempo prima, quanto meno al "Leviatano" del filosofo Hobbes (1651).

Il titolo "il dilemma di prigioniero" nella versione attuale si deve ad Albert Tucker.

La sua idea è che le società umane siano alleanze rese necessarie per contrastare la violenza della natura degli esseri umani, basato sulla

- Aggressione contro tutti (preferenza per la non cooperazione propria);
- Paura nei confronti di tutti (preferenza per la cooperazione altrui).

Altre situazioni sono preferibili (ad esempio la "caccia al cervo"), ma per passare a questa, c'è bisogno di cambiare le regole del gioco e per fare ciò c'è bisogno di stipulare un cosiddetto "**contratto sociale**".

Mediante il contratto sociale si rinuncia a far violenza da soli in cambio della sicurezza della protezione del gruppo.

## Situazione:

Due ladri, autori di un efferato delitto, vengono arrestati e vengono messi in celle separate per l'interrogatorio.

Il Giudice ha prove sufficienti per dimostrare che i due sono colpevoli di un reato minore ma per infliggere una pena più severa avrebbe bisogno della confessione.

Il Giudice va dai due ladri, mantenuti rigorosamente isolati, offrendo a ognuno uno sconto di pena se accetta di testimoniare contro l'altro (in tal caso la pena per quest'ultimo aumenterà).

- **Giocatori:** i due ladri, Bassotto 123 e Bassotto 321
- **Mosse:** Confessare (C) o Non Confessare (NC)
- **Strategie:** confessare (C) o Non Confessare (NC)

*Nota che qui strategie=azioni (caso poco comune)*

Pay Off: l'opposto del tempo passato in prigione.

Ogni giocatore vuole minimizzare il tempo da trascorrere in carcere e può scegliere tra due azioni: "confessare" o "tacere", senza sapere che cosa stia scegliendo l'altro.

## Cosa può accadere?

- Se uno solo dei due ladri confessa ma l'altro no, chi ha confessato viene considerato un pentito prezioso e sarà rilasciato (0 anni), ma quello che non ha confessato andrà in carcere per il massimo della pena, 7 anni.
- Se entrambi confessano, avranno una pena di 5 anni (con la concessione di alcune attenuanti generiche).
- Se entrambi tacciono, saranno imprigionati per 1 anno.

## Caratteristiche del gioco:

- Gioco simultaneo con **informazione imperfetta**, dato che ogni giocatore sceglie senza conoscere la scelta dell'altro giocatore, in cui i giocatori muovono una volta sola.
- **NON E' UN GIOCO A SOMMA ZERO**  
*Nei giochi a somma zero, ogni cella della matrice presenta un solo valore (corrispondente a quanto un giocatore paga all'altro).*

Il dilemma del prigioniero in forma normale

		Bassotto 321	Bassotto 321
		C	NC
Bassotto 123	C	5,5	0,7
Bassotto 123	NC	7,0	1,1

- **ASSIOMA DI RAZIONALITA'** (Fondamentale nella teoria dei giochi)  
Nessun giocatore sceglie un'azione se ne ha a disposizione un'altra che gli permette di ottenere risultati migliori, qualunque sia il comportamento dell'avversario.

## Cosa faranno i due giocatori?

La scelta migliore, per entrambi, sarebbe quella di non confessare, scagionandosi reciprocamente.

Per far questo dovrebbero accordarsi...

Sebbene una condizione del dilemma imponga che i giocatori non possano assolutamente comunicare tra loro, anche se potessero farlo, nessuno dei due potrebbe essere certo delle reali intenzioni dell'altro, che potrebbe cambiare comportamento all'ultimo minuto.

**L'assioma di razionalità impone ad entrambi di confessare (è l'unico comportamento "razionale").**

- Se l'altro ladro **CONFESSA** allora:  
Lui sconta 7 anni di galera se **NON CONFESSA**  
Lui sconta 5 anni di galera se **CONFESSA**
- Se l'altro ladro **NON CONFESSA** allora:  
Lui sconta 1 anno di galera se **NON CONFESSA**  
Lui sconta 0 anni di galera se **CONFESSA**
- In entrambi i casi gli conviene **CONFESSARE**  
E si fanno entrambi 5 anni di galera invece di 1 che si sarebbero fatti se entrambi non avessero confessato.

Calcoliamoci adesso l'equilibrio di Nash:

	2 coopera	2 non coopera
1 coopera	5,5	0,7
1 non coopera	7,0	1,1

C'è un **equilibrio di Nash**. Infatti:

5	0
↓	↓
7	1

5	→	7
0	→	1

(5,5)	→	(0,7)
↓		↓
(7,0)	→	(1,1)

Il dilemma del prigioniero mostra una situazione in cui un atteggiamento razionale prescrive ai giocatori un comportamento che porta entrambi ad una situazione peggiore di un'altra possibile.

**COMPORTAMENTO NON COOPERATIVO**

**Considerazioni:**

- Il dilemma del prigioniero ha innumerevoli applicazioni. (Es: coppie in crisi che accettano una situazione peggiore per entrambi.)
- Il dilemma illustra un conflitto tra razionalità e interesse.

**Situazione di vita reale modellata:**

- Non si aiuta il prossimo temendo che il prossimo non aiuterà noi.
- Situazioni nelle quali nessuno dei contendenti è disposto a fare il primo passo per il raggiungimento di un interesse comune:
- Disarmo;
- Negoziati di pace.

# IL DILEMMA DEL VIAGGIATORE

## Situazione:

La Compagnia Aerea ha danneggiato due oggetti, identici, portati da due viaggiatori di ritorno da un viaggio.

Il dirigente della Compagnia chiede ad ognuno di loro di esprimere il valore dell'oggetto, **come numero compreso tra 2 e 100** (dollari).

Rimborserà ad **entrambi la cifra più bassa**.

Inoltre **"premierà" con 2 dollari** chi ha espresso il valore più basso e **ridurrà il rimborso di 2 dollari** all'altro viaggiatore.

## Equilibrio di Nash:

**2 dollari** (si segue un ragionamento di induzione a ritroso, a partire da 100).

Esperimenti condotti anche con esperti di teoria dei giochi hanno mostrato che **la maggior parte degli intervistati esprime un numero molto prossimo a 100**.

Struttura identica al dilemma del prigioniero se si limitassero le scelte a 2 e 3 dollari.

## Modella situazioni reali quali:

- **Corsa agli armamenti**, nella quale un processo graduale porta a situazioni sempre peggiori (da 100° 2!)
- **Ribasso dei prezzi di due aziende che competono sul mercato** (in questo caso l'induzione a ritroso è vantaggiosa per il consumatore)

# MERCATO FARMACEUTICO E FORMAZIONE DEI CARTELLI

Il mercato per la fornitura di medicinali per la cura dell'AIDS è dominato in Sudafrica da due imprese farmaceutiche (la Pfizer e la Glaxo-Wellcome), che possono decidere di:

- Istituire un cartello, accordandosi sui prezzi di vendita dei medicinali;
- Competere tra loro sul mercato.

La matrice dei payoff presenta una tabella simile a quella seguente:

	Collusione	Guerra sui prezzi
Collusione	9,9	2,15
Guerra sui prezzi	15,2	6,6

*Nell'ipotetica situazione dei payoff riportati nella bimatrice, si trova che nel caso di collusione, il payoff è 9 punti per entrambi; nel caso uno dei due giocatori ribassi i prezzi mentre l'altro si aspettava una collusione, il payoff sarà 15 per il ribassista e 2 per l'attendista. Se entrambi ribassano i prezzi, avremo un payoff pari a 6.*

## Considerazioni:

- Sebbene la situazione sia riconducibile al "dilemma del prigioniero", la scelta della collusione appare logica: entrambi i giocatori ottengono un risultato comunque positivo... **Per questo esistono i "cartelli"** (dannosi per i consumatori) e quindi i controllori.
- Per i "cartelli", le condanne possono sempre arrivare e così qualora il vantaggio legato alla formazione del "cartello" sia basso (per es. con una combinazione 7,7 invece che 9,9) la scelta potrebbe essere la guerra dei prezzi.
- I giochi a somma diversa da zero, prevedono autolimitazione dei giocatori con punizioni reciproche per chi viola regole e valori del gioco, punizioni non solamente delegate ma anche dirette. Per esempio, il Garante della Concorrenza e del Mercato vigila come terzo sulla regolarità dei mercati.



# AMBIENTE ED ECOSISTEMI




E' facile convincersi che se tutti si accordassero per pescare entro quote stabilite, si otterrebbe con facilità lo sviluppo sostenibile: il mare sarebbe sfruttato ogni anno all'interno del suo tasso di ripopolamento.

Purtroppo, pure in presenza di regole, ogni persona o Paese, ha la "tentazione" di pescare un po' di più per aumentare il proprio reddito o profitto.

- ❑ *"Se lo fanno gli altri, lo facciamo anche noi"*.. così sempre più persone cominciano a pescare oltre i limiti sostenibili previsti e molte specie marine si avviano ad un depauperamento entro pochi anni.

Il danno provocato dal comportamento generale si ritorce contro il benessere di tutti; nessuno può trarre più profitto dalla vendita del pesce e sia gli abitanti di A sia quelli di B si ritrovano nelle liste di disoccupazione.

Infatti, la scomparsa del pesce causa anche una minor offerta alimentare, i prezzi aumentano e con essi le famiglie indigenti.

A	B	←	
		Paese B pesca troppo	Paese B rispetta i limiti previsti
	↑	Paese A pesca troppo	Ripopolamento a rischio Depauperamento pericoloso 
		Paese A rispetta i limiti previsti	Depauperamento pericoloso  Pescato sostenibile 

- ❑ Con questo comportamento **poche persone si sono arricchite**. Sono proprio coloro che hanno meno rispettato le regole, pescando il più, certi di non essere mai puniti per averlo fatto. Il lucro gli ha permesso di accumulare una grande ricchezza sfruttando quel bene comune di tutti e affrontare pertanto i momenti peggiori.
- ❑ In conclusione, **il rispetto del bene comune è convenienza di tutti**. Chiunque appoggi le persone interessate a distruggere il bene comune mette una firma sulla propria povertà in futuro. Il bene pubblico è di tutti, può far lavorare tutti ma, sovente, arricchisce solo pochi furbi.

# Nota Biografica



- **John Forbes Nash Jr.** (Bluefield ,13 giugno 1928) è un matematico ed economista statunitense. Tra i matematici più brillanti e originali del Novecento, Nash ha rivoluzionato l'economia con i suoi studi di matematica applicata alla "Teoria dei giochi", vincendo il premio Nobel per l'economia nel 1994. Nash è anche un geniale e raffinato matematico puro. Ha sempre avuto un'abilità poco comune nell'affrontare i problemi da un'ottica nuova e impensabile per gli altri, trovando soluzioni incredibilmente eleganti a problemi complessi, come quelli legati all'immersione delle varietà algebriche o alle equazioni differenziali paraboliche. Nash ha vissuto per circa trenta anni tra i successi scientifici ed accademici e la malattia mentale. Insieme a logici, matematici, fisici e ingegneri, lavorò per il governo alle strategie politiche e militari della guerra fredda. Dovette convivere con la schizofrenia che spesso e per lunghi periodi nell'arco di trent'anni ne offuscò l'intelligenza e la creatività isolandolo emotivamente dal mondo esterno. La sua vita ha ispirato il celebre film "*A beautiful mind*" (2001) che la narra, romanzandola ed omettendone alcune parti. Per far intuire la grandezza del risultato di Nash citiamo l'articolo "Nash equilibrium and the history of economic theory" di Roger B. Myerson: "The formulation of Nash equilibrium has had a fundamental and pervasive impact in economics and the social sciences with his comparable to that of the discovery of the DNA double helix in the biological sciences."

## *Bibliografia e sitografia*

- -P.Odifreddi "Giochi pericolosi",
- -P.Odifreddi "John Nash genio e follia"
- -<http://www.vialattea.net/odifreddi/giochi.pdf>
- -sito di divulgazione scientifica [www.vialattea.net](http://www.vialattea.net)
- -Lucchetti, Roberto "Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi". Bruno Mondadori Editore, 2001, pagg 14-17
- -Prof. Alberto Postiglione, "Giochi di coppia in situazioni di conflitto"
- -K.Basu "Il dilemma del viaggiatore", "Le scienze" num 468, ago 2007, pagg 64-70
- -Mercato dei farmaci e aspetti ecologici: <http://www.galenotech.org/strategie.htm>
- -Paola Valbonesi, "Appunti di teoria dei giochi"
- - Li Calzi (1995): Teoria dei giochi, Milano: EtasLibri Tutor.
- - Shy Oz (1995): Industrial Economics, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- - Costa, Mori (1994): Introduzione alla teoria dei giochi, Bologna: il Mulino.
- <http://www.liceobenedetti.it/TDG/inizio.html>