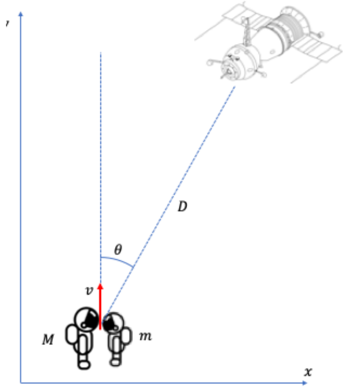
Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 14/2/2020

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (7 punti) In un remake di Gravity, Matt Kowalsky (massa $M = 80$ kg) e la dottoressa Ryan Stone (massa $m = 50$ kg) si stanno muovendo insieme nello spazio ad una velocità $v = 4$ m/s. La navicella che potrebbe salvarli purtoppo è ad una distanza $D = 500$ m ma la linea di vista con questa forma un angolo $\theta = 10°$ con la loro direzione di avanzamento, e non c'è più propellente nello zaino-jet.

Eroicamente Kowalski decide di sacrificarsi e spingere la dottoressa Stone verso la navicella. I due sono disposti perpendicolarmente alla direzione di avanzamento e Kowalski può imprimere un impulso (orizzontale) $I = 50$ N · s.



Calcolare:

(a) Il tempo t (rispetto all'istante $t = 0$ corrispondente alla distanza D di cui sopra) in cui deve fare l'azione eroica perché la dottoressa possa salvarsi.

(b) La distanza W a cui si troverà Kowalski dalla navicella quando vi arriva la dottoressa Stone.

Soluzione: Il moto è tipo quello risultante da un urto (al tempo t) NON ELASTICO dato che la velocità orizzontale dei due viene dai muscoli di Kowalski.

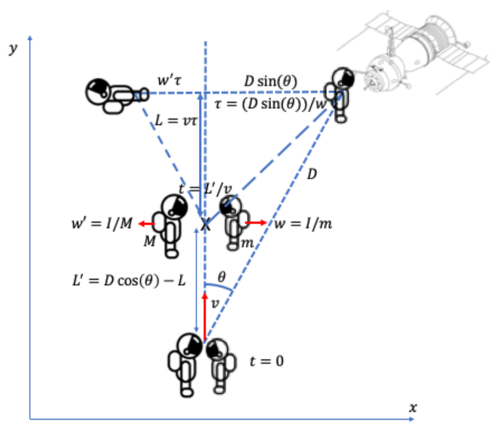
L'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto, Kowalski imprime alla Stone una velocità orizzontale w

$$w = I/m \simeq 1.00 \text{ m/s}.$$

Con questa velocità la dottoressa impiega un tempo

$$\tau = \frac{D\sin(\theta)}{w} \simeq 86.82 \text{ s}$$

a percorrere il tratto orizzontale $D\sin(\theta) \simeq 86.82$ m.



Quindi Kowalski deve dare la spinta a una distanza

$$L' = \tau v \simeq 347.30 \text{ m}$$

dalla posizione lungo la linea di marcia, ovvero dopo aver percorso una distanza

$$L = D\cos(\theta) - L' \simeq 145.11 \text{ m}$$

dall'istante zero, ovvero dopo un tempo

$$t = \frac{L}{v} \simeq 36.28 \text{ s}.$$

Si può anche calcolare il tempo T necessario a percorrere il tratto verticale $D\cos(\theta) \simeq 492.40$ m a velocità v

$$T = \frac{D\cos(\theta)}{v} \simeq 123.10 \text{ s}$$

e sottrarre il tempo τ già trovato:

$$t = T - \tau \simeq 36.28 \text{ s}.$$

Kowalski parte in direzione opposta con una velocità

$$w' = \frac{I}{M} \simeq 0.63 \text{ m/s}$$

e quindi dopo il tempo τ si trova a una distanza

$$W = D\sin(\theta) + w'\tau \simeq 141.09 \text{ m}$$

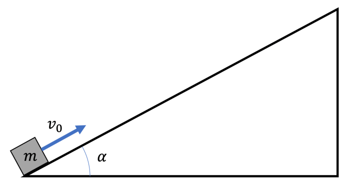
dalla navicella.

Problema 2 (7 punti) Un corpo di massa $m = 0.5$ kg viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 2$ m/s su un piano scabro (coefficiente di attrito dinamico e statico $\mu = 0.25$) nella direzione di massima salita. Il piano è inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Il corpo sale fino a un certo punto e poi comincia a scendere.

(a) Calcolare il tempo di salita T_1 (necessario a fermare il corpo) e quello di discesa T_2 (necessario per tornare alla posizione iniziale).

(b) Per quale angolo $\alpha_{\min}$ il tempo totale $T = T_1 + T_2$ è minimo?

(c) Per quale angolo massimo $\alpha_{\max}$ il tempo totale $T = T_1 + T_2$ diventa infinito?



Soluzione: Mettiamo l'asse x lungo il piano inclinato, nella direzione di massima salita e l'asse y perpendicolare al piano. Le forze agenti sul corpo sono la forza peso, la reazione del piano e l'attrito. La componente della forza peso lungo l'asse y è $-mg\cos(\alpha)$, ed è uguale in modulo alla reazione del piano. Lungo l'asse x abbiamo la componente della forza peso $-mg\sin(\alpha)$ e la forza di attrito $-\mu mg\cos(\alpha)$, che è sempre diretta in modo opposto al moto.

Nella fase di ascesa quindi abbiamo

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) - \mu mg\cos(\alpha)$$

quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione

$$a_1 = -g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)) \simeq -7.02 \text{ m/s}^2.$$

La velocità quindi è $v(t) = v_0 + a_1 t$ e il tempo T_1 per arrivare a $v = 0$ è

$$T_1 = -\frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))} \simeq 0.28 \text{ s}$$

Il tratto ℓ percorso è

$$\begin{aligned}\ell &= v_0 T_1 + \frac{1}{2} a_1 T_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))} \\ &\simeq 0.28 \text{ m}\end{aligned}$$

Durante la fase di discesa la velocità è negativa e quindi la forza di attrito positiva, la legge del moto è

$$m\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha)$$

quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione

$$a_2 = -g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) \simeq -2.78 \text{ m/s}^2.$$

Il tempo T_2 per fare il tratto $-\ell$ partendo da fermo è

$$\frac{1}{2} a_2 T_2^2 = -\ell$$

e quindi

$$\begin{aligned}T_2 &= \sqrt{-\frac{2\ell}{a_2}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{a_1 a_2}} \\ &= \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2(\alpha) - \mu^2\cos^2(\alpha)}} \\ &\simeq 0.45 \text{ s}\end{aligned}$$

Il tempo totale $T = T_1 + T_2$ è

$$\begin{aligned}T &= T_1 + T_2 \\ &= v_0\left(-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}}\right) \\ &\simeq 0.74 \text{ s}\end{aligned}$$

Il tempo minimo corrisponde ad un angolo $\alpha_{\min} = 90°$ per cui non c'è attrito e $T_1 = T_2 = v_0/g \simeq 0.20$ s, cosa la cui dimostrazione richiede un po' di tempo.

La derivata di T rispetto ad α è

$$\frac{dT}{d\alpha} = v_0\left(-\frac{a_1'}{a_1^2} - \frac{1}{2}\frac{a_1' a_2 - a_1 a_2'}{(a_1 a_2)^{3/2}}\right)$$

dove

$$a_1' = \frac{da_1}{d\alpha} = \mu g$$

per $\alpha_{\min} = 90°$ (valore per cui $a_1 = -g$), e

$$a_2' = \frac{da_2}{d\alpha} = -\mu g$$

per $\alpha_{\min} = 90°$ (valore per cui $a_2 = -g$), e quindi T si annulla appunto per $\alpha = 90°$.

L'aspetto "interessante" è che il tempo T_1 NON è minimo per $\alpha = 90°$, infatti dato che

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = \frac{v_0}{g}\left(\frac{\cos(\alpha) - \mu\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)}\right)$$

abbiamo

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0 \qquad \text{per} \qquad \tan(\alpha) = \frac{1}{\mu}.$$

Il tempo infinito corrisponde al caso in cui la particella non riparte, ovvero per cui quando è ferma la forza peso è uguale alla forza di attrito

$$mg\sin(\alpha) = \mu mg\cos(\alpha)$$

da cui

$$\tan(\alpha_{\max}) = \mu; \qquad \alpha_{\max} = \arctan(\mu) \simeq 14.04°.$$

Problema 3 (8 punti) Un sistema costituito da un disco di massa $M = 1.5$ kg e raggio $R = 20$ cm e da un'asta di massa $m = 500$ g e lunghezza $L = 4$ m fissata per un'estremità al centro del disco, tramite un perno ideale, che permette cioè a disco e asta di ruotare uno rispetto all'altro senza attrito.

Il disco poggia su un piano scabro orizzontale e nel suo centro di massa agisce una molla con costante elastica $k = 20$ N/m, fissata all'altra estremità ad una parete, in modo da essere parallela al piano di appoggio del disco.

In tutti gli esercizi si assuma per il disco un moto di rotolamento puro sul piano orizzontale scabro.

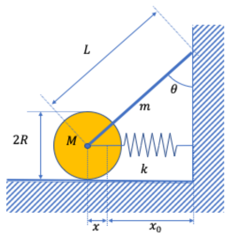


figura 1

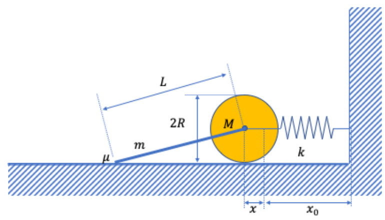


figura 2

Domande.

(a) Il sistema è in equilibrio statico quando l'asta è appoggiata alla parete verticale e la molla risulta allungata rispetto alla sua lunghezza di riposo di $x = 20$ cm (figura 1). Sapendo che non c'è attrito tra l'asta e la parete verticale (mentre c'è attrito tra il disco ed il piano orizzontale), si determini l'angolo θ tra l'asta e la parete.

(b) Si consideri adesso l'asta appoggiata al piano come mostrato in figura 2. Sapendo che tra l'asta e il piano c'è una forza d'attrito $F_A = 0.2$ N, calcolare l'accelerazione a del sistema formato da asta e disco, se la molla è allungata rispetto alla sua lunghezza di riposo di $x = 20$ cm, come prima.

Soluzione:

La sbarra non è una fune, per cui può trasmettere forze anche trasversali.

Se si usano le forze conviene fare un esploso introducendo le reazione R_x e R_y.

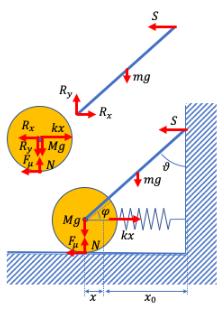


figura 1

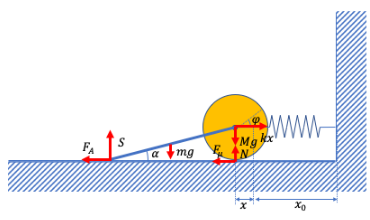


figura 2

Nella configurazione 1 abbiamo per le forze sul disco

$$\begin{cases} F_\mu + R_x - kx = 0 \\ N - Mg - R_y = 0 \end{cases}$$

La seconda cardinale per il disco con polo nel centro dà

$$F_\mu R = 0$$

ovvero $F_m u = 0$ dato che il disco non gira. Quindi

$$R_x = kx.$$

Sull'asta abbiamo

$$\begin{cases} S - R_x = 0 \\ R_y - mg = 0 \end{cases}$$

e

$$SL\cos(\theta) - mg\frac{L}{2}\sin(\theta) = 0$$

quindi

$$S = R_x = kx;$$

e

$$\tan(\theta) = \frac{2kx}{mg} \simeq 1.63 \qquad \theta \simeq 58.51\ ^\circ.$$

Alternativamente, si poteva imporre che l'energia potenziale sia minima, ovvero che una sua variazione per un piccolo spostamento sia nulla. Pensiamo di allungare la molla di un pezzettino dx. L'energia della molla è $U_k(x) = 1/2kx^2$ e quindi

$$\frac{dU_k}{dx} = kx.$$

Con lo spostamento la sbarra si abbassa di un po'. La sua energia potenziale è

$$U_s = mg\left(R + \frac{L}{2}\cos(\theta)\right)$$

e quindi

$$\frac{dU_s}{dx} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)\frac{d\theta}{dx}$$

Per calcolare come θ dipende da x sappiamo che

$$x + x_0 = L\sin(\theta)$$

differenziando si ha $dx = L\cos(\theta)d\theta$ e quindi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{L\cos(\theta)}$$

in totale

$$\frac{d}{dx}(U_k + U_s) = kx - \frac{1}{2}mg\tan(\theta) = 0$$

da cui

$$\tan(\theta) = \frac{2kx}{mg}.$$

Per la seconda domanda, la prima cardinale sul sistema asta+disco orizzontalmente dà

$$(M+m)\ddot{x} = -kx + F_\mu + F_A$$

e la seconda cardinale sul disco è

$$I\ddot{\psi} = F_\mu R$$

con la relazione cinematica $R\dot{\psi} = \dot{x}$ e $I = (1/2)MR^2$.

Si ottiene

$$F_\mu = -\frac{1}{2}M\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{2(F_A - kx)}{2m + 3M} \simeq -1.38\ \mathrm{m/s^2}.$$

Problema 4 (7 punti) Un pezzo di ghiaccio di massa m alla temperatura $T_1 = -18°$ viene gettato in una borraccia termica contenente $M = 60$ g di acqua ad una temperatura $T_2 = 60°$.

Calcolare

(a) Qual è il valore massimo m della massa del pezzetto di ghiaccio perché questo fonda completamente?

(b) Calcolare la temperatura di equilibrio T_3 del sistema quando la massa del ghiaccio è $m_1 = 30$ g.

Il calore specifico del ghiaccio è $c_g = 2051$ J/Kg · K, il calore specifico dell'acqua vale $c_a = 4186.8$ J/Kg · K ed il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/Kg.

Soluzione: Per fondere il ghiaccio deve prima raggiungere la temperatura $T_0 = 0°$, e quindi assorbire una quantità di energia (calore)

$$\Delta E_0 = mc_g T_1$$

e quindi fondere assorbendo una quantità di energia

$$\Delta E_1 = m\lambda$$

Il calore dev'essere fornito dalla massa di acqua che al più può arrivare alla temperatura T_0

$$\Delta E_0 + \Delta E_1 = m(c_g(T_0 - T_1) + \lambda) = Mc_a(T_2 - T_0)$$

e quindi

$$m = \frac{Mc_a(T_2 - T_0)}{c_g(T_0 - T_1) + \lambda} \simeq 41.08\text{g}$$

Per il secondo punto, il ghiaccio, dopo la fusione, deve raggiungere la temperatura finale T_3, quindi assorbire una ulteriore quantità di energia

$$\Delta E_2 = mc_a(T_3 - T_0)$$

e l'energia deve venire dall'acqua, quindi

$$\begin{aligned} &\Delta E_0 + \Delta E_1 + \Delta E_2 = \\ &\quad m_1(c_g(T_0 - T_1) + \lambda + c_a(T_2 - T_3)) = \\ &\quad Mc_a(T_3 - T_2) \end{aligned}$$

quindi

$$T_3 = \frac{Mc_a T_2 - m_1(c_g(T_0 - T_1) + \lambda - c_a T_0)}{c_a(M + m_1)} \simeq 10.79°.$$

Problema 5 (7 punti) Gli inquilini di un condominio, stanchi della fornitura intermittente dell'acqua, decidono di istallare un serbatoio nel sottotetto, e di allacciarvi le tubature. Il serbatoio è alto $\ell = 2$ m, molto largo ed il suo lato inferiore si trova ad una altezza $H = 20$ m dal piano stradale.

Dal serbatoio partono i tubi, di diametro adeguato, e l'acqua esce da rubinetti di diametro $d = 1$ cm.

Calcolare:

- La pressione P dell'acqua al rubinetto dell'appartamento al secondo piano, ad una quota $h_2 = 4$ m dal piano stradale quando il serbatoio è pieno e il rubinetto è chiuso.
- La differenza di tempo $\Delta t_2 = t_2 - t_1$ che ci vuole a riempire una vasca da bagno (volume $V = 150$ l) nello stesso appartamento, quando il serbatoio è pieno (t_1) rispetto a quando è quasi vuoto (t_2).

- La differenza di tempo $\Delta t_5 = t_4 - t_3$ che ci vuole a riempire la stessa vasca da bagno nell'appartamento al quinto piano (altezza dal piano stradale $h_5 = 16$ m), sempre tra quando il serbatoio è pieno (t_3) rispetto a quando è quasi vuoto (t_4).

Soluzione: Quando l'acqua non scorre la pressione dell'acqua è data dalla pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa che agisce sulla sommità del serbatoio, più il "peso" della colonna d'acqua di altezza $a_1 = H + \ell - h_2 = 18.00$ m, ovvero

$$P = P_a + \rho_a g a_1 \simeq 2.76 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Quando l'acqua scorre con il serbatoio pieno, la sua velocità di uscita v (trascurando le perdite cinetiche, dato che i tubi sono abbastanza grandi) è data dalla legge di Bernoulli (considerando che la pressione atmosferica all'uscita è praticamente la stessa che all'entrata)

$$v_1 = \sqrt{2ga_1} \simeq 18.78 \text{ m/s}$$

e la portata $Q = v_1 S$, con $S = \pi(d/2)^2 \simeq 0.79$ cm^2, sezione del rubinetto, è

$$Q_1 = v_1 S = \sqrt{2ga_1} S \simeq 1.48 \text{ l/s}$$

e quindi

$$t_1 = \frac{V}{Q_1} = \frac{V}{\sqrt{2ga_1} S} \simeq 101.68 \text{ s.}$$

Viceversa, quando il serbatoio è quasi vuoto, l'altezza della colonna di acqua è $a_2 = H - h_2 \simeq 16.00$ m e

$$t_2 = \frac{V}{\sqrt{2ga_2} S} \simeq 107.85 \text{ s.}$$

quindi

$$\Delta t_2 = t_1 - t_2 \simeq 6.17 \text{ s.}$$

Per l'appartamento al quinto piano, con il serbatoio pieno, l'altezza della colonna di acqua è $a_3 = H + \ell - h_5 \simeq 6.00$ m e quindi

$$t_3 = \frac{V}{\sqrt{2ga_3} S} \simeq 176.12 \text{ s.}$$

e infine, con il serbatoio vuoto, l'altezza della colonna di acqua è $a_4 = H - h_5 \simeq 4.00$ m e

$$t_4 = \frac{V}{\sqrt{2ga_4} S} \simeq 215.70 \text{ s.}$$

quindi

$$\Delta t_5 = t_3 - t_4 \simeq 39.58 \text{ s.}$$

NOTE

Istruzioni.

Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca).

Marcare chiaramente (con un colore o con un cerchio) il numero della domanda che viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà considerato nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).