Soluzioni dei problemi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari dell'11/02/2020

Esercizio 1

Due automobili (A e B) stanno viaggiando lungo un tratto rettilineo di autostrada a velocità $v_A = 126{,}0$ km/h e $v_B = 90{,}0$ km/h rispettivamente.

a) Al tempo $t_0 = 0$ s la macchina A si trova ad una distanza $d_0 = 70{,}0$ m dietro la macchina B. Quanto tempo impiega la macchina A a raggiungere e sorpassare la macchina B?

b) $t_2 = 3{,}50$ s dopo il sorpasso, l'autista della macchina B nota che il guidatore della macchina A è un suo amico e lo vuole raggiungere. A questo scopo B aumenta la sua velocità ad un'accelerazione costante $a = 2{,}80$ m/s. Dopo quanto tempo B raggiunge A?

c) Quanto vale la velocità finale di B?

d) Quale delle due macchine ha percorso la maggiore distanza dall'istante iniziale a quello finale?

e) Fare un grafico delle velocità delle 2 automobili in funzione del tempo.

In questo problema di moto unidimensionale non sono importanti le posizioni "assolute" (cioè rispetto ad un sistema di riferimento (SDR) stabilito sulla strada), ma solo la posizione "relativa" (cioè di una macchina rispetto all'altra). Possiamo quindi svolgere il problema in due modi.

Modo 1: SDR della strada *Fissiamo un qualsiasi SDR sulla strada, con l'asse x orientato nella stessa direzione e verso del movimento delle macchine.*

a) Indichiamo con x_{0A} la posizione al tempo t_0 della macchina A. Allora la posizione allo stesso tempo t_0 della macchina B è $x_{0B} = x_{0A} + d_0$. La legge oraria dei due moti uniformi è (essendo $t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} x_A &= x_{0A} + v_A t \\ x_B &= x_{0B} + v_B t \ . \end{aligned}$$

Quando le due macchine si incontrano, diciamo al tempo t_1, esse hanno la medesima posizione: $x_A = x_B$. Quindi

$$x_{0A} + v_A t_1 = (x_{0A} + d_0) + v_B t_1 \quad \Longrightarrow \quad (v_A - v_B)t_1 = d_0$$

$$t_1 = \frac{d_0}{v_A - v_B} = 7{,}00 \text{ s} \ ,$$

in cui abbiamo prima convertito le velocità in metri al secondo:

$$\begin{aligned} v_A &= 126{,}0 \text{ km/h} = 35{,}0 \text{ m/s} \\ v_B &= 90{,}0 \text{ km/h} = 25{,}0 \text{ m/s} \ . \end{aligned}$$

Come si poteva prevedere, il risultato non dipende dalla posizione assoluta x_{0A} *o dalla scelta del SDR, ma solamente dalla distanza* d_0 *e dalla velocità relativa* $v_A - v_B$.

b) Indichiamo con x_1 *la posizione comune delle macchine al momento dell'incontro.*
($x_1 = x_{0A} + v_A t_1 = x_{0B} + v_B t_1$ *ma non è richiesto).*
Dopo il sorpasso le macchine si muovono di moto uniforme per $t_2 = 3{,}50$ s. *La loro posizione dopo questo tempo è quindi*

$$
\begin{aligned}
x_{2A} &= x_1 + v_A t_2 = x_1 + 122{,}5 \text{ m} \\
x_{2B} &= x_1 + v_B t_2 = x_1 + 87{,}5 \text{ m} \,.
\end{aligned}
$$

Da questo momento in poi, la macchina B si muove di moto uniformemente accelerato (mentre A continua il suo moto uniforme). Indichiamo con t_3 *il tempo che passa da quando la macchina B inizia ad accelerare fino al momento dell'incontro finale. Allora la posizione* x_3 *dell'incontro finale soddisfa*

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_{2A} + v_A t_3 = x_1 + v_A t_2 + v_A t_3 \\
x_3 &= x_{2B} + v_B t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2 = x_1 + v_B t_2 + v_B t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2 \,,
\end{aligned}
$$

Uguagliando i due membri si ottiene

$$
v_A t_2 + v_A t_3 = v_B t_2 + v_B t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2
$$

in cui solo t_3 *è incognita. Portando tutto a secondo membro si trova l'equazione di secondo grado in* t_3

$$
0 = \frac{1}{2} a \, \boldsymbol{t_3}^2 - (v_A - v_B) \, \boldsymbol{t_3} - (v_A - v_B) t_2
$$

le cui soluzioni sono

$$
\boldsymbol{t_3} = \frac{v_A - v_B \pm \sqrt{(v_A - v_B)^2 + 2a(v_A - v_B)t_2}}{a} = \begin{cases} 9{,}72 \text{ s} \\ -2{,}57 \text{ s} \,. \end{cases}
$$

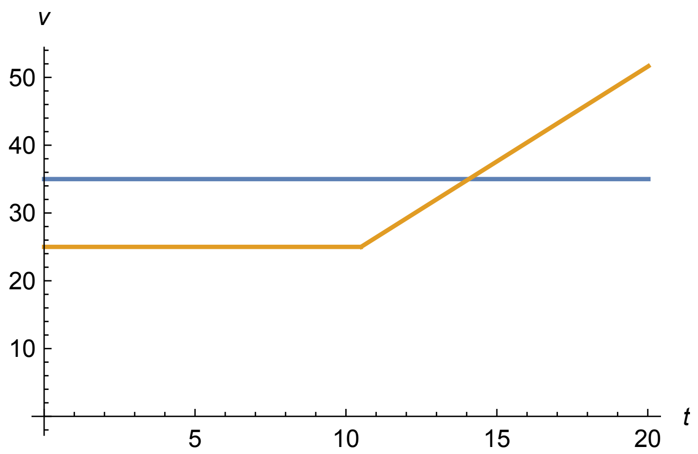
La soluzione giusta è quella positiva, infatti deve essere $t_3 > 0$, *visto che l'incontro avviene* **dopo** *l'inizio dell'accelerazione.*

c) L'accelerazione dura $t_3 = 9{,}72$ s, *quindi la velocità finale di B vale*

$$
v_B(t_3) = v_B + a t_3 = 52{,}2 \text{ m/s} = 188 \text{ km/h} \,.
$$

d) Le macchine all'istante finale sono nella stessa posizione, mentre all'istante iniziale A era 70 m *dietro a B, quindi A ha compiuto la distanza maggiore (ha percorso* 70 m *di più).*

e) B si muove di moto uniforme, la sua velocità è costante, quindi il grafico della sua velocità è un segmento orizzontale posto ad altezza v_B *(linea blu). Il grafico della velocità di A è quello di un moto uniforme per* $t_1 + t_2 = 10{,}5$ s *(segmento orizzontale ad altezza* v_A*) e quindi di un moto uniformemente accelerato (segmento inclinato) per un tempo* $t_3 = 9{,}72$ s, *che passa da una velocità di* 25 m/s *a* 52,2 m/s *(linea arancione).*



Modo 2: SDR della macchina A *Siccome la macchina A si muove di moto rettilineo uniforme, essa può essere considerata come un SDR inerziale, nel quale poniamo l'origine. In questo SDR* $x_A = 0$ *per ogni* t.

a) La posizione della macchina B al tempo $t_0 = 0$ *è* $x_0 = d_0 = 70$ m. *La velocità relativa della macchina B rispetto ad A è* $v_R = v_B - v_A = -10$ m/s.

Dopo un tempo t_1 *la macchina B si trova accanto ad A se*

$$x_1 = d_0 + v_R t_1 = x_A = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_1 = -\frac{d_0}{v_R} = 7{,}00 \text{ s} ,$$

b) Dopo altri $t_2 = 3{,}50$ s *la macchina B si trova nella posizione*

$$x_2 = x_1 + v_R t_2 = v_R t_2 = -35 \text{ m} .$$

Successivamente il moto di B diventa accelerato, con accelerazione $a = 2{,}80 \text{ m/s}^2$ *(l'accelerazione non dipende dal SDR inerziale). Quindi, dopo un tempo* t_3 *la macchina B si trova nuovamente accanto ad A se*

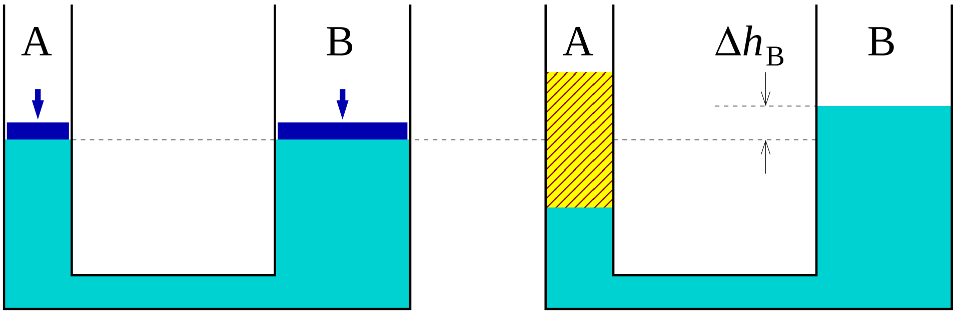
$$x_3 = x_2 + v_R t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2 = x_A = 0 ,$$

che corrisponde alla stessa equazione di secondo grado determinata in precedenza, quindi con le stesse soluzioni.

I punti d) ed e) si risolvono come con il modo 1.

Esercizio 2

Due vasi comunicanti A e B contengono inizialmente una certa quantità di acqua, che si dispone allo stesso livello rispetto all'orizzontale. Entrambi i vasi hanno sezione circolare di diametro rispettivamente $d_1 = 15{,}0$ mm e $d_2 = 30{,}0$ mm. Sulla superficie del liquido in A viene applicata una forza $F_A = 60{,}0$ N verso il basso, come in figura (1).



(1) (2)

a) Quale forza deve essere applicata sullo stantuffo in B affinché il sistema resti in equilibrio?

b) Di quanto aumenta la pressione nel liquido in seguito all'azione di queste forze?

Successivamente vengono rimossi gli stantuffi, e nel cilindro A sono versati $V_A = 32{,}0$ cm^3 di olio di densità $\rho = 0{,}850$ kg/dm^3, come in figura (2).

c) Di quanto si alza il livello dell'acqua nel cilindro B?

d) Di quanto aumenta la pressione dell'acqua in fondo al cilindro B in seguito all'aggiunta dell'olio?

a) Il fluido è fermo, quindi in equilibrio idrostatico. La pressione in un fluido omogeneo dipende solamente dalla profondità, perciò alla superficie la pressione è la stessa. Indichiamo con P_0 la pressione alla superficie in assenza della forza applicata agli stantuffi. Per esempio, P_0 potrebbe essere la pressione atmosferica, ma questo non è importante. La forza applicata allo stantuffo A causa un aumento di pressione, secondo il principio di Pascal:

$$P - P_0 = \Delta P = F_A/S_A \ ,$$

dove S_A è l'area della sezione del vaso A, cioè l'area dello stantuffo A. Questa pressione produce una forza verso l'alto nel vaso B, che è compensata dalla forza F_B dello stantuffo B secondo la formula

$$\Delta P = F_B/S_B \ .$$

Siccome

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{\pi(d_2/2)^2}{\pi(d_1/2)^2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 2^2 = 4$$

si ha (formula del torchio o martinetto idraulico)

$$F_B = F_A \frac{S_B}{S_A} = 4F_A = 240{,}0 \text{ N} \ ,$$

b) Come già osservato, il principio di Pascal afferma che la **variazione di pressione** *nel fluido in seguito all'azione di queste forze è*

$$\Delta P = \frac{F_A}{S_A} = \frac{F_A}{\pi (d_1/2)^2} = 3{,}40 \cdot 10^5 \text{ Pa} .$$

È importante osservare che non bisogna sommare i contributi delle due forze: l'aumento di pressione è lo stesso in tutti i punti del fluido, e in ciascuna apertura del recipiente bisogna applicare una forza per bilanciare (o generare) tale aumento di pressione: $F_A = \Delta P\, S_A$, $F_B = \Delta P\, S_B$.

c) Versando l'olio nel vaso A il livello dell'acqua si abbassa, e di conseguenza si alza il livello di acqua nel vaso B.

Indichiamo con Δh_B *l'aumento di livello di liquido in B. Questo significa che c'è un trasferimento di acqua da A a B (attraverso il condotto in basso) per un volume pari a* $\Delta V = S_B \Delta h_B$*. Quindi il livello del liquido in A si abbassa di* $\Delta h_A = \frac{\Delta V}{S_A} = \Delta h_B \frac{S_B}{S_A} = 4\Delta h_B$*, ossia 4 volte di più di quanto si alzi il livello in B.*

La pressione idrostatica all'altezza della superficie di separazione tra acqua ed olio è la stessa nei due vasi (infatti al di sotto c'è un unico liquido omogeneo: l'acqua). Nel vaso A è data da

$$P_A = P_0 + \rho g h_o ,$$

ove

$$h_o = \frac{V_A}{S_A} = 0{,}181 \text{ m}$$

è l'altezza della colonna d'olio. Nel vaso B la pressione alla stessa quota è data da

$$P_B = P_0 + \rho_a g h'$$

ove $\rho_a = 1{,}00 \text{ kg/dm}^3$ *è la densità dell'acqua e*

$$h' = \Delta h_A + \Delta h_B = 5\Delta h_B$$

è l'altezza della colonna d'acqua in B a fianco dell'olio. Siccome $P_A = P_B$ *ricaviamo*

$$\rho g h_o = \rho_a g h' \qquad \Delta h_B = \frac{h'}{5} = \frac{1}{5}\frac{\rho}{\rho_a} h_0 = 0{,}0308 \text{ m} = 3{,}08 \text{ cm} .$$

d)Per il principio di Pascal, la variazione di pressione nelle zone dove continua a restare acqua, è la stessa. Quindi la variazione di pressione in fondo al cilindro B è uguale alla variazione di pressione nei punti del cilindro B dove c'è la linea tratteggiata, e vale

$$\Delta P' = \rho_a g \Delta h_B = 302 \text{ Pa} .$$

Equivalentemente, se indichiamo con P_B *la pressione in fondo al cilindro B e con* h_B *l'altezza della colonna d'acqua quando non c'era l'olio, si ha*

$$P_B = P_0 + \rho g h_B .$$

Aggiungendo l'olio si ha

$$P'_B = P_0 + \rho g (h_B + \Delta h_B)$$

da cui

$$\Delta P_B = P'_B - P_B = \rho_a g\, \Delta h_B = 302 \text{ Pa} .$$

Esercizio 3

Per preparare del tè all'inglese, una signora prende una tazza con una capacità termica $C_0 = 140$ J/°C che si trova alla temperatura $T_0 = 25{,}0$ °C e versa al suo interno $m_1 = 180$ g di tè alla temperatura $T_1 = 90$ °C (calore specifico $c_1 = 4186$ J/(kg · °C)) e subito dopo $m_2 = 55$ g di latte (calore specifico $c_2 = 4090$ J/(kg · °C)) alla temperatura $T_2 = 5$ °C.

a) Trascurando in queste operazioni gli scambi termici con l'ambiente, determinare a quale temperatura si trova il sistema complessivo al raggiungimento dell'equilibrio termico.

b) Il recipiente viene chiuso con un coperchio di plastica di area $A = 1{,}10$ dm^2, spessore $s = 3{,}00$ mm e conducibilità termica $k = 1{,}50$ J/(m·°C). Se il sistema scambia calore con l'ambiente esterno (a temperatura 20 °C) solamente attraverso il coperchio, quanto calore viene ceduto all'ambiente esterno nei primi 3 secondi? (Supporre che il sistema non cambi apprezzabilmente la sua temperatura in quell'intervallo di tempo).

c) Stimare quanto tempo è necessario affinché il tè si raffreddi a 45 °C, assumendo che lo scambio termico avvenga con una potenza media pari al 90% di quella calcolata al punto b).

Nella prima fase di mescolamento si assume che il sistema non scambi calore con l'ambiente, quindi gli scambi di calore avvengono solo tra i 3 componenti: tazza, tè, latte. Indichiamo con Q_0, Q_1 e Q_2 il calore assorbito da tazza, tè e latte rispettivamente, e con T_f la temperatura finale di equilibrio. Si ha

$$\begin{aligned} Q_0 &= C_0(T_f - T_0) \\ Q_1 &= C_1(T_f - T_1) \qquad C_1 = m_1 c_1 = 753 \text{ J/°C} \quad \textit{capacità termica del tè} \\ Q_2 &= C_2(T_f - T_2) \qquad C_2 = m_2 c_2 = 225 \text{ J/°C} \quad \textit{capacità termica del latte} . \end{aligned}$$

Il calore totale assorbito dal sistema è $Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0$ perché come abbiamo detto il sistema è isolato. Abbiamo così 4 equazioni in 4 incognite: Q_0, Q_1, Q_2 e T_f, che possiamo risolvere in vari modi, per esempio con il metodo di sostituzione:

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2) \quad \Longrightarrow \begin{cases} -(Q_1 + Q_2) & = C_0(T_f - T_0) \\ Q_1 & = C_1(T_f - T_1) \\ Q_2 & = C_2(T_f - T_2) . \end{cases}$$

Possiamo ricavare Q_1 e Q_2 in funzione di T_f nelle ultime due equazioni e sostituirle nella prima, oppure possiamo più semplicemente sommare le tre equazioni ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= (C_0 + C_1 + C_2)T_f - (C_0 T_0 + C_1 T_1 + C_2 T_2) \\ T_f &= \frac{C_0 T_0 + C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_0 + C_1 + C_2} = 64{,}8 \text{ °C} . \end{aligned}$$

In altre parole, la temperatura finale è data dalla media pesata delle temperature, dove i pesi sono le capacità termiche dei costituenti del sistema.

b) Ora si considera il sistema che scambia calore con l'ambiente. Siccome l'ambiente è più freddo ($T_a = 20$ °C), il sistema cede calore all'ambiente. Il calore ceduto per unità di tempo (potenza termica) è dato dalla formula

$$p = \frac{Q}{t} = \rho \frac{A(T_f - T_a)}{s} = 246 \text{ W} .$$

Quindi in $t = 3$ s (nei quali si assume che il sistema non cambi molto la sua temperatura) si ha

$$Q = p\, t = 738 \text{ J} .$$

c) Nel passaggio da $T_f = 64{,}8$ °C a $T'_f = 45$ °C, il sistema cede una quantità di calore pari alla sua capacità termica totale, moltiplicata per la variazione di temperatura:

$$Q' = (C_0 + C_1 + C_2)(T_f - T'_f) = 2{,}21 \cdot 10^4 \text{ J} .$$

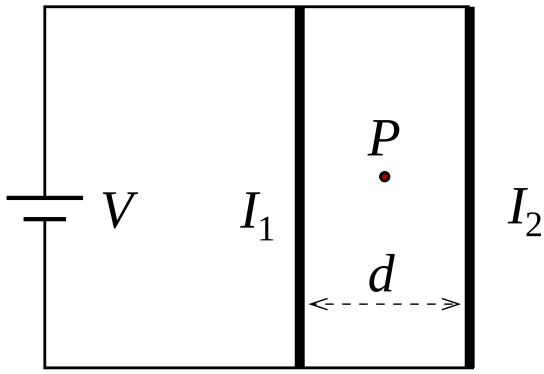
Se lo scambio di calore avviene con una potenza media

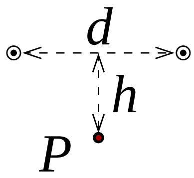
$$\bar{p} = 90\%\, p = 664 \text{ W} ,$$

il tempo che occorre per questa trasformazione è

$$T = \frac{Q'}{\bar{p}} = 33{,}3 \text{ s} .$$

Esercizio 4





Un circuito elettrico è formato da un generatore di tensione $V = 55$ V, da due fili rettilinei e paralleli posti verticalmente ad una distanza $d = 0{,}15$ m e lunghi ciascuno $l = 1{,}20$ m, oltre ai fili di collegamento di resistenza trascurabile, come in figura.

a) Sapendo che nei fili scorrono rispettivamete le correnti $I_1 = 5{,}4$ A ed $I_2 = 6{,}4$ A, calcolare le resistenze di ciascun filo.

b) Quanta corrente eroga il generatore?

c) Quanta potenza eroga il generatore?

d) Quanto vale la forza che il filo 1 esercita sul filo 2? In quale verso è diretta?

e) Quanto vale la forza che il filo 2 esercita sul filo 1? In quale verso è diretta?

f) Quanto vale il campo magnetico nel punto P equidistante dai due fili e spostato rispetto al piano verticale di una distanza $h = d/2$? (Vedere la parte inferiore della figura che rappresenta i due fili ed il punto P visti da sotto). [La permeabilità magnetica del vuoto è $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot \text{m/A}$]

a) I due fili sono soggetti alla stessa tensione, quella del generatore, quindi si comportano come due resistenze collegate in parallelo:

$$R_1 = \frac{V}{I_1} = 10{,}2\ \Omega\ , \qquad R_2 = \frac{V}{I_2} = 8{,}6\ \Omega\ .$$

b) La corrente erogata dal generatore è data dalla somma delle correnti che scorrono in ciascun filo:

$$I = I_1 + I_2 = 11{,}8\ \text{A}\ .$$

c) La potenza erogata dal generatore vale

$$p = V\,I = 649\ \text{W}$$

che equivale alla somma delle potenze dissipate dalle singole resistenze:

$$p = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 297 + 352 = 649\ \text{W}\ .$$

d) Tra due fili percorsi da corrente si esercita una forza di tipo magnetico. Infatti, il campo magnetico prodotto dal filo 1 nei punti in cui si trova il filo 2 vale, in modulo,

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

ed è diretto perpendicolarmente al piano che contiene i due fili, ed usando la regola della mano destra, si trova che il verso è uscente dal foglio. Quindi il filo 2 risente di una forza di modulo

$$F_2 = B_{12} I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} = 5{,}53 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}\ ,$$

diretta verso sinistra, cioè verso il filo 1, sempre per la regola della mano destra.

e) Si possono ripetere i calcoli per determinare la forza che il campo magnetico generato dal filo 2 esercita sul filo 1. Tuttavia, invocando il principio di azione e reazione, la forza $\vec{F}_{21}$ *che il filo 2 esercita sul filo 1 è uguale ed opposta ad* $\vec{F}_{12}$*, quella che il filo 1 esercita sul filo 2. Quindi il filo 1 risente di una forza verso destra, di modulo* $5{,}53 \cdot 10^{-5}$ N.

f) Il campo magnetico nel punto P è dato dalla **somma vettoriale** *dei campi magnetici generati da ciascun filo. La distanza di P dal filo 1, che è anche uguale alla distanza di P dal filo 2, vale*

$$r = \sqrt{(d/2)^2 + h^2} = d/\sqrt{2} = 0{,}106\ \mathrm{m} \qquad \textit{oppure} \qquad r = \frac{d/2}{\cos(45°)} = 0{,}106\ \mathrm{m}\ .$$

Quindi

$$B_1(P) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = 1.02 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

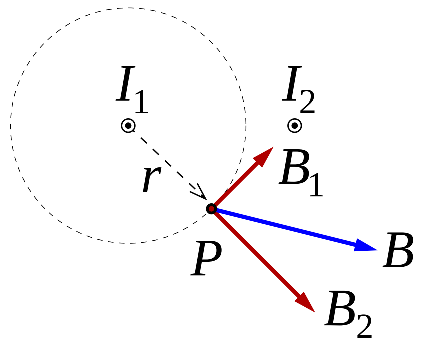
ed è diretto in direzione perpendicolare alla retta che congiunge P con il filo 1, quindi proprio verso il filo 2 (vedi figura), ossia con un angolo di $45°$ *rispetto all'asse x. In componenti:*

$$B_{1x}(P) = B_1(P)\cos(45°) = 7{,}20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ , \quad B_{1y}(P) = B_1(P)\sin(45°) = 7{,}20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ .$$

Il campo generato in P dal filo 2 vale

$$B_2(P) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = 1.21 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

ed è diretto in direzione perpendicolare alla retta che congiunge P con il filo 2, quindi proprio nella direzione del filo 1 ma in verso opposto (vedi figura), ossia ad un angolo di $-45°$ *rispetto all'asse x. In componenti:*

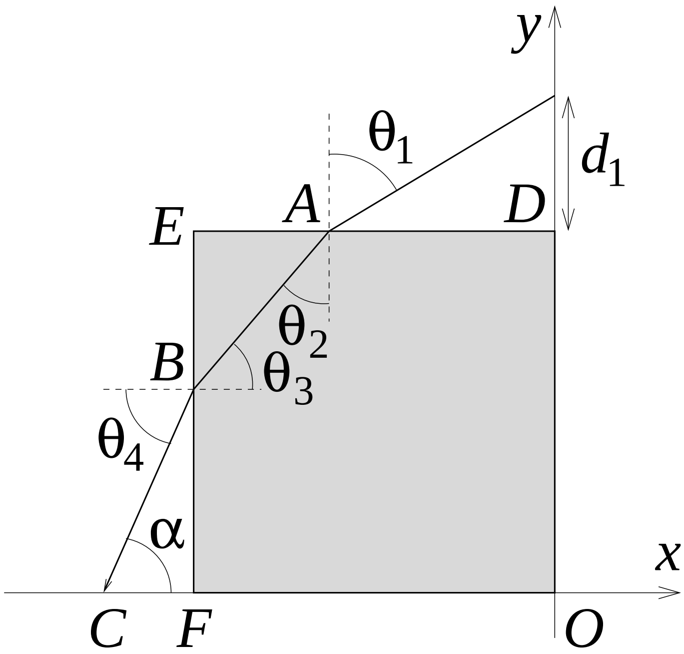


$$B_{2x}(P) = B_2(P)\cos(-45°) = 8{,}54{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{T}\ , \quad B_{2y}(P) = B_2(P)\sin(-45°) = -8{,}54{\cdot}10^{-6}\ \mathrm{T}\ .$$

Quindi

$$B_x(P) = B_{1x}(P) + B_{2x}(P) = 1{,}57 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}$$
$$B_y(P) = B_{1y}(P) + B_{2y}(P) = -1{,}34 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}\ .$$

Esercizio 5



Un cubo di materiale trasparente di lato $l = 60{,}00$ cm e di indice di rifrazione $n_2 = 1{,}288$ è appoggiato su un piano orizzontale. Un raggio di luce proveniente da una sorgente posta $d_1 = 17{,}50$ cm sopra uno spigolo del cubo incide sulla faccia superiore con un angolo di incidenza pari a $\theta_1 = 65{,}00°$, come in figura. Assumendo l'indice di rifrazione dell'aria $n_1 = 1{,}000$,

a) Determinare l'angolo di rifrazione θ_2 del raggio di luce.

b) Determinare l'angolo α che il raggio uscente dal cubo forma con il piano orizzontale.

c) Determinare le posizioni rispetto al sistema di riferimento (O, x, y) dei punti A, B, C nei quali il raggio entra nel cubo, esce dal cubo, incide sul piano orizzontale.

d) Quanto dovrebbe valere l'angolo di incidenza θ_1 affinché il raggio subisca in B la riflessione totale?

a) Dalla legge di Snell ricaviamo

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2} = 0.703655 \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 = \arcsin(0.703655) = 44{,}72°$$

b) Quando il raggio esce dal cubo subisce una seconda rifrazione. Il nuovo angolo di incidenza θ_3 va calcolato rispetto alla perpendicolare alla superficie di separazione. Tale superficie di separazione è un piano verticale, quindi la perpendicolare a questo piano è orizzontale. Si vede che θ_2 e θ_3 sono due angoli di un triangolo rettangolo, quindi

$$\theta_3 = 180° - 90° - \theta_2 = 90° - \theta_2 = 45{,}28° \ .$$

L'angolo di seconda rifrazione θ_4 si ricava sempre dalla legge di Snell, osservando che in questo caso si ha passaggio da un mezzo con indice di rifrazione n_2 all'aria che ha indice di rifrazione n_1:

$$n_2 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4$$

$$\sin\theta_4 = \frac{n_2 \sin\theta_3}{n_1} = 0.91518 \quad \Longrightarrow \quad \theta_4 = \arcsin(0.91518) = 66{,}23° \ .$$

Dalla figura, con semplici considerazioni geometriche, si deduce che $\alpha = \theta_4 = 66{,}23°$.

c)

$$
\begin{array}{lcr}
\overline{AD} = d_1 \tan\theta_1 = 37{,}53 \text{ cm} & \Longrightarrow & A = (-37{,}53\,,\,60{,}00) \text{ cm} \\
\overline{EA} = \overline{ED} - \overline{AD} = 22{,}47 \text{ cm} & & \\
\overline{EB} = \overline{EA}\tan\theta_3 = 22{,}69 \text{ cm} & & \\
\overline{FB} = \overline{FE} - \overline{EB} = 37{,}31 \text{ cm} & \Longrightarrow & B = (-60{,}00\,,\,37{,}31) \text{ cm} \\
\overline{CF} = \dfrac{\overline{FB}}{\tan\alpha} = 16{,}43 \text{ cm} & & \\
\overline{CO} = \overline{CF} + \overline{FO} = 76{,}43 \text{ cm} & \Longrightarrow & C = (-76{,}43\,,\,0{,}00) \text{ cm}
\end{array}
$$

d) Si ha riflessione totale quando $\theta_4 = 90°$*, cioè se*

$$
\begin{aligned}
n_2 \sin\theta_3 &= n_1 \sin 90° = n_1 \\
\sin\theta_3 &= \frac{n_1}{n_2} = 0{,}7764 \quad \Longrightarrow \quad \theta_3 = 50{,}93°
\end{aligned}
$$

Ricaviamo così θ_2 *e poi* θ_1*:*

$$
\begin{aligned}
\theta_2 &= 90° - \theta_3 = 39{,}07° \\
\theta_1 &= \arcsin\left(\frac{n_2 \sin\theta_2}{n_1}\right) = 54{,}27° \ .
\end{aligned}
$$