

11. – Soluzione degli esercizi su: *principio dei buchi di piccionaia.***Esercizio 11.1**

Si dimostri che: comunque presi 14 numeri primi, fra essi ce ne sono almeno 7 che a due a due sono congrui modulo 4.

Soluzione – Suddividiamo i 14 numeri dati a seconda del resto che si ottiene dividendoli per 4. Resto 0 significa “multiplo di 4”, quindi questa possibilità è da escludere poiché i numeri dati sono tutti primi (e pertanto irriducibili); resto 2 significa comunque “numero pari”, quindi questo può avvenire in al più un caso (cioè se si è scelto il numero 2). Restano almeno 13 numeri primi che si suddividono fra le due possibilità “resto 1” e “resto 3”; una delle due possibilità deve quindi verificarsi almeno 7 volte, e i 7 numeri corrispondenti sono a due a due congrui modulo 4.

Esercizio 11.2

Cinque persone stanno esplorando una foresta rettangolare di dimensioni 6 Km. \times 8 Km. . Ciascun esploratore ha un walkie-talkie col quale cerca di contattare gli altri; ma il raggio di azione di ciascun walkie-talkie è di soli 5 Km.

Si dimostri, spiegando bene il ragionamento seguito, che in ogni momento dell’esplorazione ci sono almeno due esploratori in grado di stabilire un contatto fra loro.

Soluzione – Dividiamo idealmente la foresta in 4 zone rettangolari di dimensioni 3 Km. \times 4 Km. .: ciascuna di esse ha diametro 5 Km., cosicché due persone in una stessa zona sono in contatto. Poiché gli esploratori sono 5, per il principio dei buchi di piccionaia almeno due esploratori stanno nella stessa zona e dunque sono in contatto, come si voleva.

Esercizio 11.3

Al termine di una festa, alla quale hanno partecipato 100 persone, ciascun invitato se ne va stringendo la mano **a un numero pari di persone** (i più scortesii, a nessuno). Nessuno è così eccentrico da stringere la mano a se stesso.

Si dimostri che almeno tre fra gli invitati hanno stretto la mano allo stesso numero di persone.

Soluzione – Sia n_0 il numero delle persone che non hanno stretto la mano a nessuno.

Se $n_0 = 0$, i 100 invitati hanno stretto la mano ciascuno a un numero di persone che può essere 2, 4, 6, ..., oppure 98; essi possono dunque essere suddivisi in 49 categorie (a secondo del numero di persone a cui hanno stretto la mano: ci sono appunto 49 possibilità). Per il principio dei buchi di piccionaia, se 100 invitati vengono suddivisi in 49 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque in questo primo caso si è dimostrato che almeno tre invitati hanno stretto la mano allo stesso numero di persone.

Se $n_0 = 1$, gli altri 99 invitati hanno stretto la mano ciascuno a un numero di persone che può essere 2, 4, 6, ..., oppure 98; essi possono dunque essere suddivisi in 49 categorie (a secondo del numero di persone a cui hanno stretto la mano: ci sono appunto 49 possibilità). Per il principio dei buchi di piccionaia, se 99 invitati vengono suddivisi in 49 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque anche in questo secondo caso si è dimostrato che almeno tre invitati hanno stretto la mano allo stesso numero di persone.

Se $n_0 = 2$, gli altri 98 invitati hanno stretto la mano ciascuno a un numero di persone che può essere 2, 4, 6, ..., oppure 96 (perché ciascuno può aver stretto la mano ad al massimo 97 altri invitati, ed i numeri dispari sono esclusi); essi possono dunque essere suddivisi in 48 categorie (a secondo del numero di persone a cui hanno stretto la mano: ci sono appunto 48 possibilità). Per il principio dei buchi di piccionaia, se 98 invitati vengono suddivisi in 48 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque anche in questo terzo caso si è dimostrato che almeno tre invitati hanno stretto la mano allo stesso numero di persone.

Se infine $n_0 \geq 3$, non c'è altro da dimostrare.

Esercizio 11.4

Si dimostri che: comunque presi 18 numeri primi, fra essi ce ne sono almeno 5 che a due a due sono congrui modulo 5.

Soluzione – Suddividiamo i 18 numeri dati a seconda del resto che si ottiene dividendoli per 5. Resto 0 significa “multiplo di 5”, quindi questo può avvenire in al più un caso (cioè se si è scelto il numero 5). Restano almeno 17 numeri primi che si suddividono fra le quattro possibilità “resto 1”, “resto 2”, “resto 3”, e “resto 4”; una delle quattro possibilità deve quindi verificarsi almeno 5 volte, e i 5 numeri corrispondenti sono a due a due congrui modulo 5.

Esercizio 11.5

Cinque persone stanno esplorando un deserto rettangolare di dimensioni 12 Km. \times 16 Km. . Ciascun esploratore ha un walkie-talkie col quale cerca di contattare gli altri; ma il raggio di azione di ciascun walkie-talkie è di soli 10 Km.

Si dimostri, spiegando bene il ragionamento seguito, che in ogni momento dell'esplorazione ci sono almeno due esploratori in grado di stabilire un contatto fra loro.

Soluzione – Dividiamo idealmente la foresta in 4 zone rettangolari di dimensioni 6 Km. \times 8 Km. \therefore ciascuna di esse ha diametro 10 Km., cosicché due persone in una stessa zona sono in contatto. Poiché gli esploratori sono 5, per il principio dei buchi di piccionaia almeno due esploratori stanno nella stessa zona e dunque sono in contatto, come si voleva.

Esercizio 11.6

Si dimostri che: comunque presi 32 numeri primi, fra essi ce ne sono almeno 4 che a due a due sono congrui modulo 11.

Soluzione – Suddividiamo i 32 numeri dati a seconda del resto che si ottiene dividendoli per 11. Resto 0 significa “multiplo di 11”, quindi questo può avvenire in al più un caso (cioè se si è scelto il numero 11). Restano almeno 31 numeri primi che si suddividono fra le dieci possibilità “resto 1”, “resto 2”, “resto 3”, “resto 4”, “resto 5”, “resto 6”, “resto 7”, “resto 8”, “resto 9”, e “resto 10”; una delle dieci possibilità deve quindi verificarsi almeno 4 volte, e i 4 numeri corrispondenti sono a due a due congrui modulo 11.

Esercizio 11.7

Ad un ricevimento partecipano 100 persone; ciascuno dei partecipanti conosce **un numero pari di altri partecipanti** (eventualmente nessuno, può infatti accadere che ci siano alcuni “imbucati”). Si suppone che l’eventuale conoscenza sia reciproca (se Tizio conosce Caio, anche Caio conosce Tizio).

Si dimostri che almeno tre fra i partecipanti alla festa conoscono lo stesso numero di altri partecipanti.

Soluzione – Sia n_0 il numero delle persone che non conoscono nessun altro partecipante alla festa.

Se $n_0 = 0$, ciascuno dei 100 invitati conosce un numero di altri partecipanti che può essere 2, 4, 6, \dots , oppure 98; essi possono dunque essere suddivisi in 49 categorie (a secondo del numero di altri partecipanti che conoscono: ci sono appunto 49 possibilità). Per il principio dei buchi di piccionaia, se 100 invitati vengono suddivisi in 49 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque in questo primo caso si è dimostrato che almeno tre invitati conoscono lo stesso numero di altri partecipanti.

Se $n_0 = 1$, gli altri 99 invitati conoscono ciascuno un numero di altri partecipanti che può essere 2, 4, 6, \dots , oppure 98; essi possono dunque essere suddivisi in 49 categorie (a secondo del numero di altri partecipanti che conoscono: ci sono appunto 49 possibilità). Per il principio dei buchi di piccionaia, se 99 invitati vengono suddivisi in 49 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque anche in questo secondo caso si è dimostrato che almeno tre invitati conoscono lo stesso numero di altri partecipanti.

Se $n_0 = 2$, gli altri 98 invitati conoscono ciascuno un numero di altri partecipanti che può essere 2, 4, 6, ..., oppure 96 (perché ciascuno può conoscere al massimo 97 altri partecipanti, ed i numeri dispari sono esclusi); essi possono dunque essere suddivisi in 48 categorie (a secondo del numero di altri partecipanti che conoscono: ci sono appunto 48 possibilità). Per il principio dei buchi di piccioniaia, se 98 invitati vengono suddivisi in 48 categorie almeno tre invitati appartengono alla stessa categoria: dunque anche in questo terzo caso si è dimostrato che almeno tre invitati conoscono lo stesso numero di altri partecipanti.

Se infine $n_0 \geq 3$, non c'è altro da dimostrare.

Esercizio 11.8

Si dimostri che: comunque presi 20 numeri primi, fra essi ce ne sono almeno 4 che a due a due sono congrui modulo 7.

Soluzione – Suddividiamo i 20 numeri dati a seconda del resto che si ottiene dividendoli per 7. Resto 0 significa “multiplo di 7”, quindi questo può avvenire in al più un caso (cioè se si è scelto il numero 7). Restano almeno 19 numeri primi che si suddividono fra le sei possibilità “resto 1”, “resto 2”, “resto 3”, “resto 4”, “resto 5”, e “resto 6”; una delle sei possibilità deve quindi verificarsi almeno 4 volte, e i 4 numeri corrispondenti sono a due a due congrui modulo 7.