

Marco Barlotti

Appunti di

# Teoria dei Grafi

per l'insegnamento di "Matematica discreta e logica"  
(corso di laurea triennale in Informatica)

Vers. 2.8

Anno Accademico 2017-2018



In copertina una vignetta di Paolo Mottura tratta da I TL 2482-4 “Topolino e il naufrago dello spazio” di Silvano Mezzavilla (© Disney).

## PERCHE' QUESTI APPUNTI, E COME USARLI

(Prefazione alla vers. 2.8)

Questi appunti vogliono costituire un supporto scritto alla parte di *Teoria dei grafi* delle lezioni che tengo per l'insegnamento di “Matematica discreta e Logica” per il Corso di Laurea triennale in Informatica presso l'Università di Firenze.

Si tratta di un *work in progress* ormai abbastanza stabile. Tuttavia è inevitabile la presenza di errori materiali; inoltre, per quanto mi sia sforzato di conciliare il rigore con la chiarezza, alcuni brani del testo possono risultare poco comprensibili. Sarò grato a tutti coloro, e specialmente agli studenti, che vorranno segnalarmi qualunque problema, dai più banali errori di stampa alle oscurità nell'esposizione.

Firenze, 06.03.2018

Marco Barlotti

## **BIBLIOGRAFIA**

- [1] M. Barlotti  
*Appunti di Algebra*  
*per l'insegnamento di Matematica discreta e logica*  
Firenze

### **AVVERTENZA**

Tutti i diritti di questa pubblicazione sono dell'autore.

È consentita la riproduzione integrale di questa pubblicazione a titolo gratuito.

È altresì consentita a titolo gratuito l'utilizzazione di parti di questa pubblicazione in altra opera all'inderogabile condizione che ne venga citata la provenienza e che della nuova opera nella sua interezza vengano consentite la riproduzione integrale a titolo gratuito e l'utilizzazione di parti a queste stesse condizioni.

L'uso di questa pubblicazione in qualsiasi forma comporta l'accettazione integrale e senza riserve di quanto sopra.

# SOMMARIO

## 1. - Generalità sui grafi

- 1.1 - Prime definizioni . . . . . pag. 1
- 1.2 - Da un grafo all'altro . . . . . pag. 4
- 1.3 - Prime proprietà . . . . . pag. 5
- 1.4 - Grafi bipartiti . . . . . pag. 8
- 1.5 - Isomorfismo . . . . . pag. 8
- 1.6 - Esempi di grafi . . . . . pag. 9
- 1.7 - Frammenti di topologia . . . . . pag. 11
- 1.8 - Grafi disegnati su una superficie . . . . . pag. 12
- 1.9 - Disegni sul piano di alcuni grafi considerati nella sez. 1.6 . . . . . pag. 12
- 1.10 - Sottografi . . . . . pag. 15
- 1.11 - Calibro . . . . . pag. 15

## 2. - Connessione

- 2.1 - Cammini, circuiti, cicli . . . . . pag. 17
- 2.2 - Connessione . . . . . pag. 19
- 2.3 - Distanza fra vertici. Una caratterizzazione dei grafi connessi bipartiti . . . . . pag. 23
- 2.4 - Matrice di adiacenza . . . . . pag. 26

**3. - Alberi**

3.1 - Alberi e foreste . . . . . pag. 33  
3.2 - Caratterizzazione degli alberi come grafi connessi minimali . . . . . pag. 34  
3.3 - Classi di isomorfismo degli alberi con “pochi” vertici . . . . . pag. 37

**4. - Grafi piani**

4.1 - Definizione e prime proprietà . . . . . pag. 39  
4.2 - Calibro e planarità . . . . . pag. 42  
4.3 - Il teorema di Kuratowski . . . . . pag. 44

**5. - Grafi euleriani**

5.1 - Definizione . . . . . pag. 45  
5.2 - La caratterizzazione dei grafi euleriani senza orientamento . . . . . pag. 45  
5.3 - La caratterizzazione dei grafi euleriani con orientamento . . . . . pag. 49

**6. - Grafi hamiltoniani**

6.1 - Definizione e prime proprietà . . . . . pag. 51  
6.2 - Qualche condizione sufficiente . . . . . pag. 53  
6.3 - Il caso dei grafi piani . . . . . pag. 60  
6.4 - Il caso dei grafi con orientamento . . . . . pag. 63

**7. - Colorazioni**

7.1 - Colorazione di carte geografiche . . . . . pag. 65  
7.2 - Il grafo duale di un grafo disegnato nel piano . . . . . pag. 67  
7.3 - Colorazione dei vertici di un grafo . . . . . pag. 70

# 1.- GENERALITÀ SUI GRAFI

## 1.1 - Prime definizioni.

Si dice *grafo* una terna  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove  $\mathcal{V}, \mathcal{L}$  sono insiemi e  $\iota$  è una funzione che a ogni  $\ell \in \mathcal{L}$  associa

- un insieme  $\{v_1, v_2\} \in \wp(\mathcal{V})$

oppure

- una coppia ordinata  $(v_1, v_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .

Nel primo caso si parla di *grafo senza orientamento*, nel secondo caso di *grafo con orientamento* (o, con terminologia meno felice: *grafo con direzione*) (in inglese: *digraph*, contrazione di “*directed graph*”). Gli elementi dell’insieme  $\mathcal{V}$  si dicono *vertici* di  $\mathcal{G}$ ; gli elementi dell’insieme  $\mathcal{L}$  si dicono *lati* di  $\mathcal{G}$  (oppure *archi* di  $\mathcal{G}$ , specialmente quando  $\mathcal{G}$  è un grafo con orientamento); la funzione  $\iota$  si dice *funzione di incidenza* fra lati e vertici di  $\mathcal{G}$ .

Sia  $\ell$  un lato di  $\mathcal{G}$ , e sia  $\iota(\ell) = \{v_1, v_2\}$  oppure  $\iota(\ell) = (v_1, v_2)$ ; se  $v_1 = v_2$ ,  $\ell$  si dice un *cappio* (in inglese: *loop*), se invece  $v_1 \neq v_2$ ,  $\ell$  si dice un *collegamento* (in inglese: *link*).

Un grafo nel quale la funzione di incidenza è iniettiva si dice *grafo semplice*, mentre (in contrapposizione) un grafo nel quale la funzione di incidenza non è iniettiva si dice un *multigrafo*. Un multigrafo con almeno un cappio si dice talvolta *pseudografo*.

Due lati  $\ell_1, \ell_2$  si dicono paralleli se  $\iota(\ell_1) = \iota(\ell_2)$ . Un grafo è semplice se e soltanto se non possiede alcuna coppia di lati distinti paralleli.

Un grafo  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  si dice *finito* se  $|\mathcal{V}|$  e  $|\mathcal{L}|$  sono numeri naturali. Se  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  è un grafo finito,  $|\mathcal{V}|$  si dice l’*ordine* di  $\mathcal{G}$ .

Si dice *grafo orientato* (o *grafo asimmetrico*: le due espressioni si equivalgono) un grafo con orientamento con la seguente proprietà:

- per ogni coppia di vertici  $v, w$ , se c’è un arco con primo estremo  $v$  e secondo estremo  $w$  allora non c’è nessun arco con primo estremo  $w$  e secondo estremo  $v$  (<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> Come si vede, la nozione di “grafo orientato” è diversa da quella di “grafo con orientamento”. È importante non confondere i due concetti!

Dunque col termine *grafo* si indicano due famiglie (la prima è quella dei grafi senza orientamento, la seconda è quella dei grafi con orientamento) che possono anche presentare situazioni molto diverse.

In questi appunti, specificheremo capitolo per capitolo (o addirittura sezione per sezione) se ci riferiamo a una sola delle due famiglie (e in tal caso a quale), oppure tratteremo in distinte sottosezioni il caso dei grafi senza orientamento e quello dei grafi con orientamento.

Cominciamo subito con le altre definizioni generali sui grafi, che diamo appunto separatamente nei due casi.

### 1.1.a - Altre prime definizioni per i grafi senza orientamento.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento.

Se  $\ell \in \mathcal{L}$  e  $v \in \iota(\ell)$ , si dice che il vertice  $v$  e il lato  $\ell$  sono *incidenti* (ma anche, confidenzialmente, che  $v$  è “un vertice di  $\ell$ ”).

Due vertici  $v, w$  si dicono *adiacenti* se esiste un lato  $\ell$  col quale sono entrambi incidenti. Si noti in particolare che un vertice risulta adiacente a se stesso se e soltanto se esiste un cappio incidente ad esso.

Due lati si dicono *consecutivi* se esiste un vertice incidente a entrambi.

Ad ogni vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  si associa un numero naturale  $gr_{\mathcal{G}}(v)$ , detto *grado* (o *valenza*) di  $v$  (in  $\mathcal{G}$ ), definito come il numero dei collegamenti (di  $\mathcal{G}$ ) incidenti con  $v$  più il doppio dei cappi (di  $\mathcal{G}$ ) incidenti con  $v$ . Tutte le volte che non è necessario evidenziare il grafo  $\mathcal{G}$  si scrive  $gr(v)$  anziché  $gr_{\mathcal{G}}(v)$ .

Un vertice di grado 0 si dice *isolato*. Un vertice di grado 1 si dice una *foglia*.

#### Osservazione 1.1.1

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento, e sia  $v$  un vertice di  $\mathcal{G}$ . Se  $\mathcal{G}$  è semplice e senza cappi,  $gr_{\mathcal{G}}(v)$  è il numero dei vertici di  $\mathcal{G}$  adiacenti a  $v$  e distinti da  $v$ .

*Dimostrazione* – Poiché  $\mathcal{G}$  non ha cappi,  $gr_{\mathcal{G}}(v)$  è il numero dei collegamenti incidenti a  $v$ ; poiché  $\mathcal{G}$  è semplice, i collegamenti incidenti a  $v$  sono in corrispondenza biunivoca con i vertici di  $\mathcal{G}$  adiacenti a  $v$  e distinti da  $v$ .



**Esercizio 1.1.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo finito senza orientamento, semplice e senza cappi. Si dimostri che in  $\mathcal{G}$  ci sono almeno due vertici con lo stesso grado.

*Suggerimento* – Si utilizzi il “principio dei buchi di piccionaia”. Si veda anche l’esempio 12.1.5 di [1].

**Esercizio 1.1.3**

Si dia un esempio di un grafo finito senza orientamento, semplice ma con cappi, nel quale tutti i vertici hanno grado diverso

1.1.b - Altre prime definizioni per i grafi con orientamento

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con orientamento.

Se  $\ell \in \mathcal{L}$  e  $\iota(\ell) = (v, w)$ , si dice che

- $v$  e  $\ell$  sono incidenti, e  $v$  è il *primo vertice* di  $\ell$  (detto anche *vertice di entrata* di  $\ell$ );
- $w$  e  $\ell$  sono incidenti,  $w$  è il *secondo vertice* di  $\ell$  (detto anche *vertice di uscita* di  $\ell$ );
- $w$  è adiacente a  $v$ .

In un grafo con orientamento, in particolare, non si dice che “ $v$  e  $w$  sono adiacenti” ma si precisa se è  $w$  ad essere adiacente a  $v$  o viceversa (naturalmente, in generale possono accadere entrambe le situazioni: ciò avviene se e soltanto se esistono due archi  $\ell_1, \ell_2$  tali che  $\iota(\ell_1) = (v, w)$  e  $\iota(\ell_2) = (w, v)$ ). Anche nei grafi con orientamento si ha che: un vertice risulta adiacente a se stesso se e soltanto se esiste un cappio incidente ad esso.

Siano  $\ell_1, \ell_2$  due lati di  $\mathcal{G}$ . Si dice che  $\ell_2$  è *consecutivo* a  $\ell_1$  se il secondo vertice di  $\ell_1$  coincide col primo vertice di  $\ell_2$ .

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con orientamento. Ad ogni vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  si associano due numeri naturali:

- $gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v)$ , detto *grado in entrata* di  $v$  (in  $\mathcal{G}$ ), definito come il numero degli archi di  $\mathcal{G}$  per i quali  $v$  è vertice di uscita;
- $gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v)$ , detto *grado in uscita* di  $v$  (in  $\mathcal{G}$ ), definito come il numero degli archi di  $\mathcal{G}$  per i quali  $v$  è vertice di entrata;

Tutte le volte che non è necessario evidenziare il grafo  $\mathcal{G}$  si scrive  $gr^{(e)}(v)$  e  $gr^{(u)}(v)$  anziché rispettivamente  $gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v)$  e  $gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v)$ .

Un vertice  $v$  si dice *isolato* se  $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v) = 0$ .

Un vertice  $v$  si dice una *foglia* se  $gr^{(e)}(v) + gr^{(u)}(v) = 1$ .

### Osservazione 1.1.2

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo con orientamento, e sia  $v$  un vertice di  $\mathcal{G}$ . Se  $\mathcal{G}$  è semplice e senza cappi,  $gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v)$  è il numero dei vertici di  $\mathcal{G}$  adiacenti a  $v$  distinti da  $v$ .

*Dimostrazione* – Poiché  $\mathcal{G}$  non ha cappi,  $gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v)$  è il numero dei collegamenti che hanno  $v$  come vertice di entrata; poiché  $\mathcal{G}$  è semplice, tali collegamenti sono in corrispondenza biunivoca con i vertici di  $\mathcal{G}$  adiacenti a  $v$ .

## 1.2 - Da un grafo all'altro.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con orientamento. Si dice *grafo senza orientamento associato a  $\mathcal{G}$*  il grafo senza orientamento  $\mathcal{G}_* := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota_*)$  per il quale la funzione di incidenza  $\iota_*$  è definita per ogni  $\ell \in \mathcal{L}$  ponendo

$$\iota_*(\ell) := \{v, w\} \text{ se e soltanto se } \iota(\ell) = (v, w).$$

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento, e sia  $\mathcal{L}_c$  il sottoinsieme di  $\mathcal{L}$  formato dai lati che sono incidenti a vertici distinti (quelli cioè che abbiamo chiamato “collegamenti”). Si dice *sostegno* di  $\mathcal{G}$  il grafo (senza orientamento)  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  semplice e senza cappi così definito:  $\mathcal{V}_0 := \mathcal{V}$ ;  $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_c$ ;  $\iota_0 := \mathbf{id}_{\mathcal{L}_0}$ .

Se  $\mathcal{G}$  è un grafo con orientamento, si dice *sostegno* di  $\mathcal{G}$  il sostegno del grafo senza orientamento associato a  $\mathcal{G}$ .

In altre parole, il sostegno di  $\mathcal{G}$  è ottenuto da  $\mathcal{G}$  mantenendo gli stessi vertici, eliminando i cappi e considerando un lato (e un solo lato!) per ogni coppia di vertici adiacenti in  $\mathcal{G}$ : tale lato viene identificato (come in generale si può fare per ogni grafo semplice e senza cappi) con la coppia di vertici a cui esso è incidente.

Ci sono importanti proprietà che sono verificate da un grafo se e soltanto se sono verificate dal suo sostegno: per lo studio di queste si possono pertanto, in molti casi, limitare le nostre considerazioni ai grafi semplici e senza cappi. Si vedano in proposito i capitoli 4 e 6. Per ora ci limitiamo ad osservare che l'osservazione 1.1.1 può essere così riformulata:

### Osservazione 1.2.1

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento, e sia  $v$  un vertice di  $\mathcal{G}$ . Il numero dei vertici di  $\mathcal{G}$  adiacenti a  $v$  è il grado di  $v$  nel sostegno di  $\mathcal{G}$ .

### 1.3 - Prime proprietà.

#### Teorema 1.3.1

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento con  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Si ha

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr(v) = 2\lambda.$$

*Dimostrazione* – Possiamo procedere per induzione su  $\lambda$ .

Se  $\lambda := 0$ , in  $\mathcal{G}$  non ci sono lati, cosicché ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado 0; dunque per  $\lambda := 0$  il teorema è vero.

Supponiamo che il teorema sia vero per  $\lambda := k - 1$ , e proviamolo per  $\lambda := k$ . Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con  $|\mathcal{L}| = k$ , e sia  $\mathcal{G}_0$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo un lato. Possono verificarsi due casi:

– il lato soppresso è un collegamento, incidente due vertici  $v_1$  e  $v_2$ ; allora

$gr_{\mathcal{G}_0}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}(v_1) - 1$ ,  $gr_{\mathcal{G}_0}(v_2) = gr_{\mathcal{G}}(v_2) - 1$  e  $gr_{\mathcal{G}_0}(v) = gr_{\mathcal{G}}(v)$  per tutti gli altri vertici  $v$ , cosicché

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}(v) - 2;$$

– il lato soppresso è un cappio, incidente il vertice  $v_1$ ; allora

$gr_{\mathcal{G}_0}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}(v_1) - 2$  e  $gr_{\mathcal{G}_0}(v) = gr_{\mathcal{G}}(v)$  per tutti gli altri vertici  $v$ , cosicché è ancora

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}(v) - 2.$$

Per l'ipotesi di induzione,

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}(v) = 2(k - 1)$$

da cui

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}(v) + 2 = 2(k - 1) + 2 = 2k$$

come si voleva dimostrare.

#### Teorema 1.3.2

In qualsiasi grafo senza orientamento, il numero dei vertici di grado dispari è pari.

*Dimostrazione* – Ovvio, perché in base al teorema 1.3.1 la somma dei gradi di tutti i vertici è un numero pari.

**Corollario 1.3.3 (“Teorema delle strette di mano”)**

Se alcune persone si scambiano, anche ripetutamente, una stretta di mano, allora

- (i) il numero delle persone che hanno dato un numero dispari di strette di mano è pari;
- (ii) il numero delle persone che hanno stretto la mano a un numero dispari di persone è pari.

*Dimostrazione* – Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  il grafo senza orientamento in cui  $\mathcal{V}$  è l’insieme delle persone date,  $\mathcal{L}$  è l’insieme delle strette di mano scambiate e la funzione di incidenza  $\iota$  associa a ogni stretta di mano le due persone che se la sono scambiata. La (i) segue dal teorema 1.3.2 applicato al grafo  $\mathcal{G}$ , la (ii) segue dal teorema 1.3.2 applicato al sostegno di  $\mathcal{G}$  (cfr. sez. 1.2 e oss. 1.2.1).

**Teorema 1.3.4**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento con  $|\mathcal{L}| = \lambda$  e  $|\mathcal{V}| = n$ . Se ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado almeno 2,

$$n \leq \lambda.$$

*Dimostrazione* – Ricordando il teorema 1.3.1,

$$2n = \sum_{v \in \mathcal{V}} 2 \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} gr(v) = 2\lambda$$

da cui immediatamente l’asserto.

L’analogo del teorema 1.3.1 per i grafi con orientamento è molto meno suggestivo e non ha conseguenze analoghe al corollario 1.3.3.

**Teorema 1.3.5**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con orientamento con  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Si ha

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) = \lambda.$$

*Dimostrazione* – Possiamo procedere per induzione su  $\lambda$ .

Se  $\lambda := 0$ , in  $\mathcal{G}$  non ci sono lati, cosicch  ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado in entrata 0 e grado in uscita 0; dunque per  $\lambda := 0$  il teorema   vero.

Supponiamo che il teorema sia vero per  $\lambda := k - 1$ , e proviamolo per  $\lambda := k$ . Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con orientamento con  $|\mathcal{L}| = k$ , e sia  $\mathcal{G}_0$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo un lato. Possono verificarsi due casi:

– il lato soppresso   un collegamento, con primo vertice  $v_1$  e secondo vertice  $v_2$ ; allora

$$gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v_1) - 1, \quad gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v_2) = gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v_2) - 1$$

e naturalmente

$$gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v) = gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) \quad \text{e} \quad gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v) = gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) \quad \text{per tutti gli altri vertici } v,$$

cosicch 

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) - 1;$$

– il lato soppresso   un cappio, incidente il vertice  $v_1$ ; allora

$$gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v_1) - 1, \quad gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v_1) - 1$$

e naturalmente

$$gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v) = gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) \quad \text{e} \quad gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v) = gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) \quad \text{per tutti gli altri vertici } v,$$

cosicch    ancora

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) - 1.$$

In ogni caso, per l’ipotesi di induzione,

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(u)}(v) = k - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}_0}^{(e)}(v) = k - 1$$

da cui

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) - 1 = k - 1 \quad \text{e} \quad \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) - 1 = k - 1$$

e infine

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(u)}(v) = \sum_{v \in \mathcal{V}} gr_{\mathcal{G}}^{(e)}(v) = k$$

come si voleva dimostrare.

### 1.4 - Grafi bipartiti.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento. Si dice che  $\mathcal{G}$  è *bipartito* se esistono  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$  tali che

$$(i) \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \text{ e } \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset \text{ (ossia: } \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\} \text{ è una partizione di } \mathcal{V} \text{ (}^2\text{))}$$

e inoltre

(ii) per ogni  $\ell \in \mathcal{L}$ , se  $\iota(\ell) = \{v, w\}$  allora  $v \in \mathcal{V}_1$  e  $w \in \mathcal{V}_2$  oppure  $w \in \mathcal{V}_1$  e  $v \in \mathcal{V}_2$  (ossia: gli estremi di ogni lato appartengono a elementi diversi della partizione  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$ ).

#### Osservazione 1.4.1

Un grafo bipartito non ha cappi.

#### Esempio 1.4.2

Il seguente grafo è bipartito:  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove

$$\mathcal{V} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$$

$$\mathcal{L} := \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\};$$

$$\iota := \text{id}_{\mathcal{L}}.$$

### 1.5 - Isomorfismo.

Siano  $\mathcal{G}_1 := (\mathcal{V}_1, \mathcal{L}_1, \iota_1)$  e  $\mathcal{G}_2 := (\mathcal{V}_2, \mathcal{L}_2, \iota_2)$  grafi. Si dice *isomorfismo* tra  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  una coppia  $(\varphi, \psi)$  tale che:

$$(i) \quad \varphi \text{ è una corrispondenza biunivoca tra } \mathcal{V}_1 \text{ e } \mathcal{V}_2;$$

$$(ii) \quad \psi \text{ è una corrispondenza biunivoca tra } \mathcal{L}_1 \text{ e } \mathcal{L}_2;$$

$$(iii) \quad \text{per ogni } \ell \in \mathcal{L}_1, \varphi(\iota_1(\ell)) = \iota_2(\psi(\ell)).$$

Un isomorfismo tra un grafo  $\mathcal{G}$  e se stesso si dice un *automorfismo* di  $\mathcal{G}$ .

<sup>2</sup> cfr. [1], sez. 1.11.

### 1.6 - Esempi di grafi.

In questa sezione presentiamo alcuni grafi non orientati, semplici e senza cappi, ai quali nel seguito farà comodo poter fare riferimento.

#### i grafi $P_n$

Per ogni numero naturale  $n$ , si indica con  $P_n$  (e si dice *cammino* di lunghezza  $n$ ) il grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove

$$\mathcal{V} := \{0, 1, \dots, n\};$$

$$\mathcal{L} := \{\{h, h+1\} \in P(\mathcal{V}) / 0 \leq h < n\};$$

$$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}.$$

#### i grafi $C_n$

Per ogni numero naturale  $n \geq 3$ , si indica con  $C_n$  (e si dice *ciclo* di lunghezza  $n$ ) il grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove

$$\mathcal{V} := \{1, 2, \dots, n\};$$

$$\mathcal{L} := \{\{h, h+1\} \in P(\mathcal{V}) / 1 \leq h < n\} \cup \{\{1, n\}\};$$

$$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}.$$

Si considerano anche i grafi  $C_1$  (*ciclo di lunghezza 1*, consistente in un vertice con un cappio) e  $C_2$  (*ciclo di lunghezza 2*, consistente in due vertici con due collegamenti che li hanno come estremi).

#### i grafi $K_n$

Per ogni numero naturale  $n \geq 1$ , si indica con  $K_n$  (e si dice *grafo completo* su  $n$  vertici) il grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove

$$\mathcal{V} := \{1, 2, \dots, n\};$$

$$\mathcal{L} := \{\{h, k\} \in P(\mathcal{V}) / 1 \leq h < k \leq n\};$$

$$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}.$$

L'aggettivo “*completo*” nel nome di  $K_n$  sta a indicare che  $K_n$  possiede tutti i lati possibili compatibilmente con la condizione di essere un grafo semplice e senza cappi.

**i grafi  $K_{m,n}$** 

Per ogni coppia di numeri naturali  $\{m, n\}$  con  $m, n \geq 1$ , si ponga

$$v_i := (i, 0) \text{ per } i := 1, \dots, m$$

e

$$w_j := (0, j) \text{ per } j := 1, \dots, n.$$

Si indica con  $K_{m,n}$  (e si dice *grafo completo bipartito* su  $m$  e  $n$  vertici) il grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  dove

$$\mathcal{V} := \{v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n\};$$

$$\mathcal{L} := \{\{v_i, w_j\} \in P(\mathcal{V}) / 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\};$$

$$\iota := \mathbf{id}_{\mathcal{L}}.$$

L'aggettivo “*completo*” nel nome di  $K_{m,n}$  sta a indicare che  $K_{m,n}$  possiede tutti i lati possibili compatibilmente con la condizione di essere un grafo bipartito semplice.

**Esercizio 1.6.1**

Si dimostri che

$$(i) \quad P_0 \text{ è isomorfo a } K_1 \text{ e } P_1 \text{ è isomorfo a } K_2;$$

$$(ii) \quad C_3 \text{ è isomorfo a } K_3;$$

(iii)  $K_{1,1}$  è isomorfo a  $P_1$  (e quindi a  $K_2$ ),  $K_{1,2}$  è isomorfo a  $P_2$  e  $K_{2,2}$  è isomorfo a  $C_4$ ;

(iv)  $K_{m,n}$  è isomorfo a  $K_{n,m}$  per ogni coppia di numeri naturali  $\{m, n\}$  con  $m, n \geq 1$ .



## 1.7 - Frammenti di topologia.

In questa sezione riportiamo nella forma più semplice (che certo non è quella più “elegante”) nozioni essenziali senza le quali non potremmo procedere.

Sia  $\mathcal{S}$  una superficie <sup>(3)</sup>, e sia  $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$ . Sia  $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1\}$ .

Si dice *arco di curva in  $\mathcal{W}$*  l’immagine di una funzione continua  $\mathbf{f}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}$  <sup>(4)</sup>. I punti  $\mathbf{f}(0)$  e  $\mathbf{f}(1)$  si dicono *estremi* dell’arco di curva. Se  $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{f}(1)$ , l’arco di curva si dice *aperto*; se  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(1)$ , l’arco di curva si dice *chiuso*. Se  $\mathbf{f}$  è iniettiva (fatta salva comunque la possibilità che sia  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{f}(1)$ , cioè che l’arco sia chiuso) l’arco di curva si dice *semplice*.

Sia  $\mathcal{W} \subset \mathcal{S}$ . Due punti  $A, B \in \mathcal{W}$  si dicono *connessi* se esiste un arco di curva in  $\mathcal{W}$  che li ha per estremi.  $\mathcal{W}$  si dice *connesso* se due suoi punti qualsiasi sono connessi. Non è difficile vedere che la connessione così definita è una relazione di equivalenza in  $\mathcal{W}$ : le classi di equivalenza si dicono *componenti connesse* di  $\mathcal{W}$ ; si dimostra che tali componenti connesse sono sottoinsiemi connessi di  $\mathcal{W}$ , ed anzi, nell’insieme dei sottoinsiemi connessi di  $\mathcal{W}$  ordinato rispetto all’inclusione, esse sono massimali.

È intuitivo, ma tutt’altro che facile a provarsi, il seguente importante teorema del quale omettiamo la dimostrazione:

### Teorema 1.7.1 (“di Jordan”)

Sia  $\mathcal{P}$  il piano euclideo <sup>(5)</sup>. Ogni curva semplice chiusa in  $\mathcal{P}$  divide  $\mathcal{P}$  in due sottoinsiemi connessi, uno limitato <sup>(6)</sup> (detto *regione interna alla curva*) e uno non limitato (detto *regione esterna alla curva*).

---

<sup>3</sup> Una corretta definizione generale di *superficie* esula dagli scopi e dalle possibilità di questo insegnamento; del resto gli unici esempi che avremo motivo di considerare sono il piano, la superficie sferica e la superficie toroidale. Intuitivamente, si pensi al “contorno” (qualunque cosa ciò significhi...) di un “corpo solido” (qualunque cosa ciò significhi...). Tecnicamente, col termine “superficie” intendiamo riferirci a una varietà differenziabile di dimensione 2. In ogni caso, una superficie deve essere dotata di una metrica.

<sup>4</sup> La continuità è riferita alla metrica di  $\mathcal{W}$  indotta da quella che si sta considerando in  $\mathcal{S}$ .

<sup>5</sup> cioè  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

<sup>6</sup> cioè contenuto in un cerchio opportunamente scelto.

### 1.8 - Grafi disegnati su una superficie.

Sia  $\mathcal{S}$  una superficie. Un grafo  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  si dice *disegnato su  $\mathcal{S}$*  se:

- (i)  $\mathcal{V}$  è un insieme di punti di  $\mathcal{S}$ ;
- (ii)  $\mathcal{L}$  è un insieme di archi di curve semplici su  $\mathcal{S}$  (ai quali può essere assegnato un verso);
- (iii)  $\iota$  associa a ogni elemento di  $\mathcal{L}$  l'insieme dei suoi due estremi (oppure la coppia ordinata dei suoi due estremi, se agli elementi di  $\mathcal{L}$  è associato un verso).

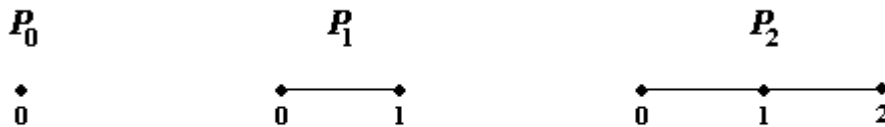
Siano  $\mathcal{G}$  un grafo e  $\mathcal{S}$  una superficie. Si dice *disegno di  $\mathcal{G}$  su  $\mathcal{S}$*  un grafo disegnato su  $\mathcal{S}$  isomorfo a  $\mathcal{G}$ .

#### Osservazione 1.8.1

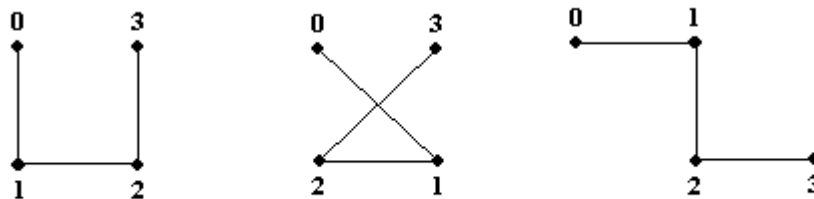
Per ogni grafo  $\mathcal{G}$  esiste un disegno di  $\mathcal{G}$  sul piano.

### 1.9 - Disegni sul piano di alcuni grafi considerati nella sez. 1.6.

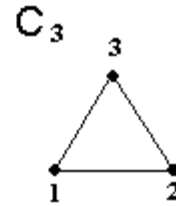
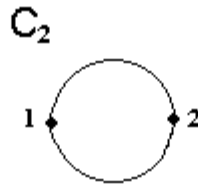
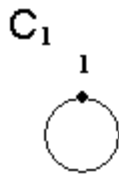
Disegno sul piano dei grafi  $P_0, P_1$  e  $P_2$ :



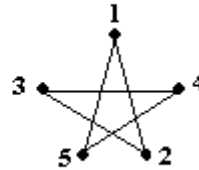
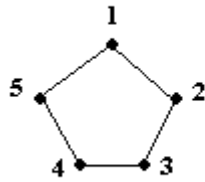
Tre disegni sul piano del grafo  $P_3$ :



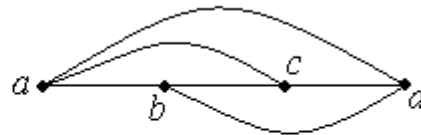
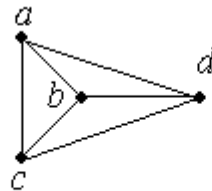
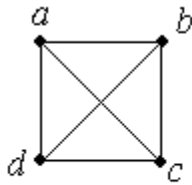
Disegni sul piano dei grafi  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ :



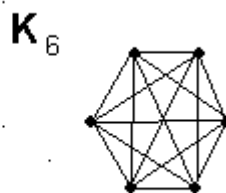
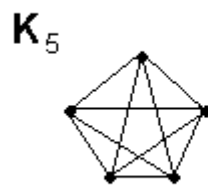
Due disegni nel piano del grafo  $C_5$ :



Tre disegni sul piano del grafo  $K_4$ :



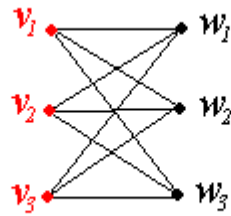
Disegni nel piano dei grafi  $K_5$  e  $K_6$ :



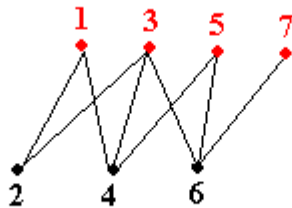
Due disegni nel piano del grafo  $K_{2,3}$ :



Un disegno nel piano del grafo  $K_{3,3}$ :



Il grafo dell'esempio 1.4.2 disegnato nel piano:



**1.10 - Sottografi.**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Si dice *sottografo* di  $\mathcal{G}$  un grafo  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  tale che  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$  e  $\iota_0$  è la restrizione di  $\iota$  a  $\mathcal{L}_0$ .

**Osservazione 1.10.1**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Per ogni  $\ell \in \mathcal{L}$ , si ottiene un sottografo di  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $\ell$  dall'insieme dei lati di  $\mathcal{G}$ ; per ogni  $v \in \mathcal{V}$ , si ottiene un sottografo di  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $v$  dall'insieme dei vertici di  $\mathcal{G}$  e contestualmente tutti i lati incidenti a  $v$  dall'insieme dei lati di  $\mathcal{G}$ .

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo, e sia  $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$ . Si dice *sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto da  $\mathcal{X}$*  il grafo  $(\mathcal{X}, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  dove  $\mathcal{L}_0$  è l'insieme di tutti i lati di  $\mathcal{G}$  incidenti soltanto a vertici di  $\mathcal{X}$  (e  $\iota_0$  è la restrizione di  $\iota$  a  $\mathcal{L}_0$ ).

Siano  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo e  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  un sottografo di  $\mathcal{G}$ . Si dice *sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto da  $\mathcal{G}_0$*  il sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto da  $\mathcal{V}_0$ .

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Un sottografo  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}_0, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  di  $\mathcal{G}$  si dice *indotto* (tout-court) se è il sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto da  $\mathcal{V}_0$ .

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento. Un sottografo di  $\mathcal{G}$  si dice *ciclico* se ha  $n$  vertici (con  $n \in \mathbb{Z}^+$ ) ed è isomorfo al grafo  $\mathcal{C}_n$  (cfr. sez. 1.6).

**1.11 - Calibro.**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento. Si dice *calibro* di  $\mathcal{G}$  (in inglese: *girth*, letteralmente “giro-vita”) il minimo intero positivo  $n$  tale che  $\mathcal{G}$  ha un sottografo ciclico isomorfo a  $\mathcal{C}_n$ .

**Osservazione 1.11.1**

Un grafo senza orientamento ha cappi se e soltanto se ha calibre 1. Un grafo senza orientamento privo di cappi è un multigrafo se e soltanto se ha calibre 2. Il calibre di un grafo senza orientamento semplice e privo di cappi (che non sia privo di cicli, cfr. sez. 3.1) è almeno 3.

**Esercizio 1.11.2**

Si determini il calibro dei grafi completi  $K_n$  e dei grafi completi  $K_{m,n}$ .

## 2.- CONNESSIONE

### 2.1 - Cammini, circuiti, cicli.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo.

Si dice *passeggiata* (in inglese: *walk*) in  $\mathcal{G}$  una sequenza finita

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, v_3, \dots, \ell_s, v_s$$

nella quale  $s \geq 1$ ,  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathcal{V}$ ,  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s \in \mathcal{L}$  e  $\iota(\ell_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$  (se  $\mathcal{G}$  è senza orientamento) oppure  $\iota(\ell_i) = (v_{i-1}, v_i)$  (se  $\mathcal{G}$  è con orientamento) per  $i := 1, 2, \dots, s$ .

I vertici  $v_0$  e  $v_s$  si dicono gli *estremi* della passeggiata. Se  $v_s = v_0$ , la passeggiata si dice chiusa.

Il numero naturale  $s$  si dice *lunghezza* della passeggiata.

Una passeggiata in cui i lati sono tutti distinti si dice *cammino* (in inglese: *trail*). Un cammino chiuso nel quale compare almeno un lato si dice *circuito* (in inglese: *circuit*).

Una passeggiata in cui i vertici e i lati sono tutti distinti (fatta comunque salva la possibilità che gli estremi coincidano) si dice *cammino semplice* (in inglese: *path*). Un cammino semplice chiuso si dice *circuito semplice* oppure *ciclo* (in inglese: *cycle*).

#### Osservazione 2.1.1

Una passeggiata che non sia della forma

$$v, \ell, w, \ell, v$$

se ha i vertici tutti distinti (fatta comunque salva la possibilità che gli estremi coincidano) è un cammino semplice.

*Dimostrazione* – Sia

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{j-1}, \ell_j, v_j, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = w$$

una passeggiata con i vertici tutti distinti (tranne la possibilità che sia  $v = w$ ). Se fosse  $\ell_i = \ell_j$  con  $0 \leq i < j \leq s$ , dovrebbe essere  $v_{i-1} = v_{j-1}$  (ma questo è impossibile perché per ipotesi i vertici sono tutti distinti) oppure  $v_i = v_{j-1}$  e  $v_{i-1} = v_j$ ; questo è compatibile con la nostra ipotesi (che i vertici siano tutti distinti, tranne eventualmente gli estremi della passeggiata) solo se  $i = 1$  e  $j = 2 = s$ , cioè se la nostra passeggiata è della forma

$$v, \ell, w, \ell, v.$$

**Teorema 2.1.2**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Siano  $v, w \in \mathcal{V}$  con  $v \neq w$ , e supponiamo che esista in  $\mathcal{G}$  una passeggiata di estremi  $v$  e  $w$ .

Una passeggiata in  $\mathcal{G}$  che abbia lunghezza minima fra tutte quelle di estremi  $v$  e  $w$  è un cammino semplice (di estremi  $v$  e  $w$ ).

*Dimostrazione* – Sia  $P$

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, \dots, \ell_j, v_j, \ell_{j+1}, \dots, \ell_s, v_s = w$$

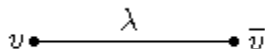
una passeggiata che abbia lunghezza minima fra tutte quelle di estremi  $v$  e  $w$ . Supponiamo per assurdo che  $P$  non sia un cammino semplice, cioè (tenendo conto dell’osservazione 2.1.1 e dell’ipotesi  $v \neq w$ ) che sia  $v_i = v_j$  per una scelta opportuna di  $i$  e  $j$  tra 0 e  $s$  (con, per fissare le idee,  $i < j$ ). Allora, poiché per ipotesi non può essere sia  $i = 0$  sia  $j = s$ ,

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_i, v_i = v_j, \ell_{j+1}, \dots, \ell_s, v_s = w$$

sarebbe una passeggiata di estremi  $v$  e  $w$  avente lunghezza  $s - (j - i)$  con  $0 < s - (j - i) < s$ , assurdo per come abbiamo scelto  $P$ .

**Osservazione 2.1.3**

Il teorema 2.1.2 non si può estendere al caso in cui  $v = w$ : infatti nel grafo seguente



c’è la passeggiata chiusa  $v, \ell, \bar{v}, \ell, v$  ma non ci sono circuiti.

**Teorema 2.1.4**

Sia  $v \in \mathcal{V}$ . Un circuito in  $\mathcal{G}$  che abbia lunghezza minima fra tutti quelli passanti per  $v$  è un ciclo.

*Dimostrazione* – Sia  $C$

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = v$$

un circuito che abbia lunghezza minima fra tutti quelli passanti per  $v$ . Se  $v_{s-1} = v$ , per la minimalità di  $C$  deve essere  $s = 1$ , cosicché  $\ell_1$  è un cappio e  $C$  è un ciclo, come si voleva. Se invece  $v_{s-1} \neq v$ , il cammino

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}$$

è una passeggiata di lunghezza minima (per la minimalità di  $C$ ) fra gli estremi distinti  $v$  e  $v_{s-1}$ , quindi (per il teorema 2.1.2) è un cammino semplice; in particolare, anche  $v_1, v_2, \dots, v_{s-2}$  sono distinti fra loro, da  $v$  e da  $v_{s-1}$ . Ciò prova che  $C$  è un ciclo, come si voleva.



**2.2 - Connessione.**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento.

Siano  $P_1$

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, v_3, \dots, \ell_s, v_s = \bar{v}$$

una passeggiata di estremi  $v$  e  $\bar{v}$ , e  $P_2$

$$\bar{v} = v'_0, \ell'_1, v'_1, \ell'_2, v'_2, \ell'_3, v'_3, \dots, \ell'_s, v'_s = \overline{\bar{v}}$$

una passeggiata di estremi  $\bar{v}$  e  $\overline{\bar{v}}$ .

Indicheremo con  $P_1^{-1}$  (e chiameremo *passaggiata inversa* di  $P_1$ ) la passeggiata

$$\bar{v} = v_s, \ell_s, v_{s-1}, \ell_{s-1}, v_{s-2}, \dots, \ell_2, v_1, \ell_1, v_0 = v$$

di estremi  $\bar{v}$  e  $v$  (tale passeggiata esiste perché  $\mathcal{G}$  è senza orientamento).

Indicheremo con  $P_1 + P_2$  (e chiameremo *passaggiata somma* di  $P_1$  e  $P_2$ ) la passeggiata

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_s, v_s = \bar{v} = v'_0, \ell'_1, v'_1, \ell'_2, v'_2, \dots, \ell'_s, v'_s = \overline{\bar{v}}$$

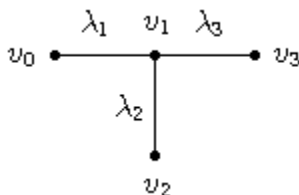
di estremi  $v$  e  $\overline{\bar{v}}$ .

Si noti che la somma così definita non è un'operazione nell'insieme delle passeggiate in  $\mathcal{G}$ : si può fare la somma di due passeggiate, infatti, soltanto se il secondo estremo della prima coincide col primo estremo della seconda.

**Osservazione 2.2.1**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento. L'inverso di un cammino [semplice] di  $\mathcal{G}$  è anch'esso un cammino [semplice] di  $\mathcal{G}$ . La somma di due cammini (anche se semplici) di  $\mathcal{G}$  non è in generale un cammino di  $\mathcal{G}$ .

*Dimostrazione* – Sia  $P$  una passeggiata: poiché  $P^{-1}$  ha gli stessi vertici e gli stessi lati di  $P$ , se  $P$  è un cammino [semplice] anche  $P^{-1}$  lo è. Per convincersi che in generale la somma di due cammini (anche semplici) non è un cammino, si consideri il seguente grafo  $\mathcal{G}$ :



La somma tra il cammino semplice  $C_1 := v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2$  e il cammino semplice  $C_2 := v_2, \ell_2, v_1, \ell_3, v_3$  è una passeggiata ma non un cammino.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento. Due vertici  $v, w \in \mathcal{V}$  si dicono connessi (in  $\mathcal{G}$ ) se esiste (almeno) una passeggiata di estremi  $v$  e  $w$ , oppure se  $v = w$  (cosicché anche i vertici di grado zero sono connessi a se stessi).

### Osservazione 2.2.2

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento. Due vertici  $v, w \in \mathcal{V}$  con  $v \neq w$  sono connessi (in  $\mathcal{G}$ ) se e soltanto se esiste in  $\mathcal{G}$  un cammino semplice di estremi  $v$  e  $w$ .

*Dimostrazione* – Poiché un cammino semplice è una particolare passeggiata, è chiaro che se esiste in  $\mathcal{G}$  un cammino semplice di estremi  $v$  e  $w$  allora  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}$ . Viceversa, supponiamo che  $v$  e  $w$  siano connessi in  $\mathcal{G}$  e che sia  $v \neq w$ : allora esistono in  $\mathcal{G}$  passeggiate di estremi  $v$  e  $w$ ; scegliendone una di lunghezza minima abbiamo, per il teorema 2.1.2, un cammino semplice di estremi  $v$  e  $w$ .

Un grafo senza orientamento si dice *connesso* se comunque presi due suoi vertici essi sono connessi. Un grafo con orientamento si dice connesso se il suo sostegno (cfr. sez. 1.2) è connesso.

### Teorema 2.2.3

Un grafo è connesso se e soltanto se il suo sostegno è connesso.

*Dimostrazione* – Se  $\mathcal{G}$  è un grafo con orientamento, l’asserto si limita a ripetere la definizione di “grafo connesso”, quindi possiamo supporre che  $\mathcal{G}$  sia un grafo senza orientamento.

Supponiamo che il sostegno di  $\mathcal{G}$  sia connesso. Siano  $u, v$  vertici di  $\mathcal{G}$ ; per ipotesi, nel sostegno di  $\mathcal{G}$  c’è una passeggiata di estremi  $u$  e  $v$ ; poiché ogni lato del sostegno di  $\mathcal{G}$  è (identificabile con un opportuno) lato di  $\mathcal{G}$ , tale passeggiata esiste anche in  $\mathcal{G}$ , dunque (per l’arbitrarietà di  $u$  e  $v$ )  $\mathcal{G}$  è connesso.

Supponiamo infine che  $\mathcal{G}$  sia connesso. Siano  $u, v$  vertici del sostegno di  $\mathcal{G}$ ; essi sono anche vertici di  $\mathcal{G}$  e, per ipotesi, in  $\mathcal{G}$  c’è una passeggiata di estremi  $u$  e  $v$ ; eliminando in tale passeggiata gli eventuali cappi e sostituendo, se necessario, a un lato quello ad esso parallelo che appartiene al sostegno di  $\mathcal{G}$ , da tale passeggiata di estremi  $u$  e  $v$  si ottiene una passeggiata nel sostegno di  $\mathcal{G}$  ancora di estremi  $u$  e  $v$ ; dunque (per l’arbitrarietà di  $u$  e  $v$ ) il sostegno di  $\mathcal{G}$  è connesso.

**Teorema 2.2.4**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo connesso. Se  $\mathcal{G}$  ha una foglia  $\bar{v}$ , il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $\bar{v}$  (e l'unico lato di  $\mathcal{G}$  incidente con  $\bar{v}$ ) è connesso.

*Dimostrazione* – Per il teorema 2.2.3, possiamo supporre che  $\mathcal{G}$  sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi.

Sia  $\mathcal{G}_1$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $\bar{v}$  (e l'unico lato di  $\mathcal{G}$  incidente con  $\bar{v}$ ) e siano  $v, w$  due vertici di  $\mathcal{G}_1$ : dobbiamo dimostrare che  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}_1$ . Poiché  $\mathcal{G}_1$  è un sottografo di  $\mathcal{G}$ ,  $v$  e  $w$  sono anche vertici di  $\mathcal{G}$ ; poiché  $\mathcal{G}$  è connesso,  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}$  e quindi (osservazione 2.2.2) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino semplice

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = w$$

di estremi  $v$  e  $w$ . Ma non può essere  $\bar{v} = v_i$  per nessun  $i$  compreso tra 1 e  $s - 1$ : infatti, essendo  $\bar{v}$  una foglia, c'è un solo lato incidente con  $\bar{v}$  e se fosse  $\bar{v} = v_i$  questo lato dovrebbe coincidere sia con  $\ell_i$  sia con  $\ell_{i+1}$ , assurdo perché in un cammino non può comparire due volte lo stesso lato. Dunque  $C$  è di fatto un cammino in  $\mathcal{G}_1$ , e si è così provato che  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}_1$ , come si voleva.

**Teorema 2.2.5**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo connesso. Se in  $\mathcal{G}$  c'è un ciclo, ciascun grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo un qualsiasi lato del ciclo è un grafo connesso.

*Dimostrazione* – Per il teorema 2.2.3, possiamo supporre che  $\mathcal{G}$  sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi. Sia

$$\bar{v} = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = \bar{v}$$

un ciclo di  $\mathcal{G}$ . Sia  $\mathcal{G}_1$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $\ell_i$ , e proviamo che comunque presi due vertici  $v$  e  $w$  di  $\mathcal{G}_1$  essi sono connessi in  $\mathcal{G}_1$ . Poiché  $\mathcal{G}_1$  è un sottografo di  $\mathcal{G}$ ,  $v$  e  $w$  sono anche vertici di  $\mathcal{G}$ ; poiché  $\mathcal{G}$  è connesso,  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}$  e quindi (osservazione 2.2.2) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino semplice  $C_0$  di estremi  $v$  e  $w$ . Se ogni lato di  $C_0$  è diverso da  $\ell_i$ ,  $C_0$  è anche un cammino di  $\mathcal{G}_1$ ; in caso contrario è  $C_0 = C_1 + C_2 + C_3$  dove

- $C_1$  è un cammino semplice di estremi  $v$  e  $v_{i-1}$  (oppure  $v$  e  $v_i$ ), costituito dai vertici e lati che si susseguono in  $C_0$  fino a  $\ell_i$  escluso;
- $C_2$  è il cammino semplice  $v_{i-1}, \ell_i, v_i$  (oppure  $v_i, \ell_i, v_{i-1}$ );
- $C_3$  è un cammino semplice di estremi  $v_{i-1}$  e  $w$  (oppure  $v_i$  e  $w$ ), costituito dai vertici e lati che si susseguono in  $C_0$  a partire dal vertice che segue  $\ell_i$ .

Indichiamo con  $C'_2$  il cammino semplice che si ottiene “percorrendo” il ciclo dato da  $v_{i-1}$  a  $v_i$  senza passare per  $\ell_i$ , cioè

$$v_{i-1}, \ell_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1, \ell_1, \bar{v}, \ell_s, v_{s-1}, \ell_{s-1}, v_{s-2}, \dots, v_{i+1}, \ell_{i+1}, v_i.$$

Allora  $C_1 + C'_2 + C_3$  (oppure  $C_1 + (C'_2)^{-1} + C_3$ ) è una passeggiata in  $\mathcal{G}_1$  di estremi  $v$  e  $w$ : pertanto  $v$  e  $w$  sono connessi in  $\mathcal{G}_1$  e la dimostrazione è completata.

**Teorema 2.2.6**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$ , con  $|\mathcal{V}| = n$  e  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è connesso,

$$\lambda \geq n - 1.$$

*Dimostrazione* – Per il teorema 2.2.3, e poiché il numero dei lati di un grafo non è inferiore a quello del suo sostegno, basterà dimostrare l’asserto per il sostegno di  $\mathcal{G}$ , ossia supporre che  $\mathcal{G}$  sia un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi.

Poiché l’asserto è banalmente vero se  $\mathcal{G}$  ha un solo vertice, possiamo procedere per induzione sul numero dei vertici di  $\mathcal{G}$ . Supponiamo dunque che il teorema sia vero per tutti i grafi con  $n_0 - 1$  vertici, e proviamo che è vero anche per ogni grafo con  $n_0$  vertici. Sia  $\mathcal{G}_0$  un grafo connesso con  $\lambda_0$  lati e  $n_0$  vertici. Se ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado almeno 2, è addirittura  $\lambda_0 \geq n_0$  in base al teorema 1.3.4; in caso contrario, c’è almeno una foglia  $\bar{v}$  (infatti, poiché  $\mathcal{G}$  è connesso, non ci possono essere vertici di grado zero).

Per il teorema 2.2.4, il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $\bar{v}$  (e l’unico lato di  $\mathcal{G}$  incidente con  $\bar{v}$ ) è ancora connesso, ed ha  $n_0 - 1$  vertici e  $\lambda_0 - 1$  lati; applicando ad esso l’ipotesi di induzione, si ottiene che  $\lambda_0 - 1 \geq (n_0 - 1) - 1$  da cui  $\lambda_0 \geq n_0 - 1$  come si voleva.

**Teorema 2.2.7**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento. La relazione  $\sim$  in  $\mathcal{V}$  definita da

$$v \sim w \Leftrightarrow v \text{ e } w \text{ sono connessi in } \mathcal{G}$$

è una relazione di equivalenza in  $\mathcal{G}$ .

*Dimostrazione* – La  $\sim$  è riflessiva per definizione; è simmetrica perché l’inversa di una passeggiata è una passeggiata; ed è transitiva perché la somma di due passeggiate è una passeggiata.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo, e sia  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  il suo sostegno. I sottografi di  $\mathcal{G}$  indotti dalle classi di equivalenza in cui si ripartisce  $\mathcal{V}$  rispetto alla relazione  $\sim$  considerata nel teorema 2.2.7 per  $\mathcal{G}_0$  si dicono *componenti connesse* di  $\mathcal{G}$ .

**Teorema 2.2.8**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo. Ogni componente connessa di  $\mathcal{G}$  è un sottografo connesso di  $\mathcal{G}$ . Ogni sottografo di  $\mathcal{G}$  di cui una componente connessa sia sottografo proprio non è connesso.

Il contenuto del teorema 2.2.8 si usa esprimere dicendo che: le componenti connesse di un grafo sono i suoi sottografi connessi massimali.

Sia  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ . Un grafo si dice  $k$  – connesso se, comunque scelti  $k - 1$  suoi vertici, il grafo ottenuto sopprimendo tali vertici (e, ovviamente, tutti i lati ad essi incidenti) è connesso. Ovviamente, un grafo è 1 – connesso se e soltanto se è connesso. Più avanti (capitolo 6) ci farà comodo il seguente risultato, la cui dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella del teorema 2.2.5:

### Teorema 2.2.9

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo. Se  $\mathcal{G}$  è indotto da un suo sottografo ciclico, allora  $\mathcal{G}$  è 2 – connesso.

*Dimostrazione* – Sia  $C_0$

$$\bar{v} = v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_n = \bar{v}$$

il ciclo che induce  $\mathcal{G}$ . Dobbiamo dimostrare che il grafo  $\mathcal{G}_0$  ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $v_i$  (e tutti i lati ad esso incidenti) è connesso, cioè che presi comunque due vertici  $v, w$  di  $\mathcal{G}_0$  esiste in  $\mathcal{G}_0$  un cammino di estremi  $v$  e  $w$ . Per ipotesi, nel ciclo  $C_0$  compaiono tutti i vertici di  $\mathcal{G}$ , dunque sarà  $v = v_h$  e  $w = v_k$  per certi numeri naturali  $h, k$  compresi tra 1 e  $n$  (ma diversi da  $i$ ).

Se  $h, k$  sono entrambi minori di  $i$  (o entrambi maggiori di  $i$ ), un cammino in  $\mathcal{G}_0$  di estremi  $v_h$  e  $v_k$  si “legge” direttamente in quel che resta di  $C_0$  dopo la soppressione di  $v_i$  (e di tutti i lati ad esso incidenti); se invece (ad esempio)  $h$  è minore di  $i$  mentre  $k$  è maggiore di  $i$ , per trovare in  $\mathcal{G}_0$  un cammino di estremi  $v_h$  e  $v_k$  basta percorrere “a ritroso”  $C_0$  da  $v_h$  a  $\bar{v}$  e poi ancora da  $\bar{v}$  a  $v_k$ .

## 2.3 - Distanza fra vertici. Una caratterizzazione dei grafi connessi bipartiti.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento, e siano  $v, w \in \mathcal{V}$ .

Se  $v$  e  $w$  sono connessi, l’insieme delle lunghezze delle passeggiate di estremi  $v$  e  $w$  è un insieme non vuoto di numeri naturali e dunque <sup>(7)</sup> ha minimo; tale minimo si dice *distanza* tra  $v$  e  $w$  e si indica con  $d(v, w)$ . Se  $v$  e  $w$  non sono connessi, si dice che *hanno distanza infinita*, e si scrive  $d(v, w) = \infty$ .

Per il teorema 2.1.2, se  $d(v, w) = n \in \mathbb{N}$  esiste un cammino semplice di lunghezza  $n$  di estremi  $v$  e  $w$  (ed esiste un cammino semplice di lunghezza  $n$  di estremi  $w$  e  $v$ ).

<sup>7</sup> cfr. [1], teor. 7.1.2.

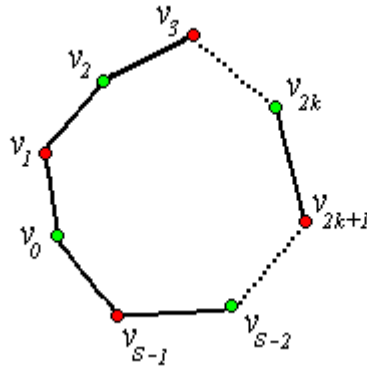
**Teorema 2.3.1**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo connesso senza orientamento.  $\mathcal{G}$  è un grafo bipartito se e solo se ogni ciclo di  $\mathcal{G}$  ha lunghezza pari.

*Dimostrazione* – Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  bipartito, e sia  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$  la partizione di  $\mathcal{V}$  tale che ogni  $\ell \in \mathcal{L}$  ha un estremo in  $\mathcal{V}_1$  e l’altro in  $\mathcal{V}_2$ . Sia  $C$

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = v$$

un ciclo di  $\mathcal{G}$  (di lunghezza  $s$ ), e supponiamo (per fissare le idee) che sia  $v_0 \in \mathcal{V}_1$ .



Poiché ogni  $\ell_i$  ha un estremo in  $\mathcal{V}_1$  e l’altro in  $\mathcal{V}_2$ , devono appartenere a  $\mathcal{V}_1$  anche  $v_2, v_4, v_6, \dots$  e ogni  $v_j$  con  $j$  pari; mentre devono appartenere a  $\mathcal{V}_2$  i vertici  $v_3, v_5, v_7, \dots$  e ogni  $v_k$  con  $k$  dispari. Poiché  $v_s = v = v_0$ , è  $v_s \in \mathcal{V}_1$  e dunque  $s$  è pari, cioè  $C$  è un ciclo di lunghezza pari.

Viceversa, supponiamo che ogni ciclo di  $\mathcal{G}$  abbia lunghezza pari, e sia  $v_0 \in \mathcal{V}$ . Poniamo

$$\mathcal{V}_1 := \{v \in \mathcal{V} / d(v_0, v) \text{ è pari}\}, \quad \mathcal{V}_2 := \{v \in \mathcal{V} / d(v_0, v) \text{ è dispari}\}.$$

Poiché  $\mathcal{G}$  è connesso, ogni  $v \in \mathcal{V}$  è connesso a  $v_0$ , e dunque  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ ; ovviamente  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ , cosicché  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2\}$  è una partizione di  $\mathcal{V}$ .

Supponiamo per assurdo che esista un  $\ell \in \mathcal{L}$  con gli estremi  $w_1, w_2$  entrambi appartenenti allo stesso  $\mathcal{V}_i$ ; allora esiste un cammino semplice  $C_1$  di lunghezza  $s = d(v_0, w_1)$  di estremi  $v_0$  e  $w_1$

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = w_1$$

ed esiste un cammino semplice  $C_2$  di lunghezza  $t = d(v_0, w_2)$  di estremi  $w_2$  e  $v_0$

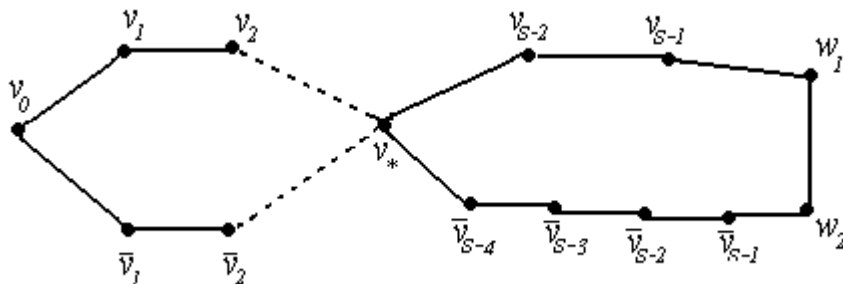
$$v_0, \bar{\ell}_1, \bar{v}_1, \bar{\ell}_2, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{t-1}, \bar{\ell}_t, \bar{v}_t = w_2$$

dove i numeri naturali  $s$  e  $t$  sono entrambi pari (se  $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_1$ ) oppure entrambi dispari (se  $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_2$ ).

Può naturalmente accadere che  $C_1$  e  $C_2$  abbiano qualche vertice in comune; sia  $v_*$  quello fra essi avente massima distanza da  $v_0$ : allora i cammini

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_* \quad \text{e} \quad v_0, \bar{\ell}_1, \bar{v}_1, \bar{\ell}_2, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{t-1}, \bar{\ell}_t, v_*$$

devono avere la stessa lunghezza  $l_0$ , altrimenti si potrebbe sostituire il più breve al più lungo ottenendo un cammino di lunghezza minore della distanza fra gli estremi.



Ne segue che i cammini semplici

$$(D_1) \quad v_*, \ell_i, v_i, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s = w_1 \quad \text{e} \quad (D_2) \quad v_*, \bar{\ell}_j, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_{t-1}, \bar{\ell}_t, \bar{v}_t = w_2$$

hanno rispettivamente lunghezza  $s - l_0$  e  $t - l_0$ , e tali lunghezze sono entrambe pari oppure entrambe dispari (perché per ipotesi  $s$  e  $t$  erano entrambi numeri pari oppure entrambi numeri dispari). Ma allora  $D_1 + \ell + D_2$  è un ciclo di lunghezza dispari (pari + pari + 1, oppure dispari + dispari + 1) contro l'ipotesi che ogni circuito di  $\mathcal{G}$  abbia lunghezza pari.

Dunque ogni lato di  $\mathcal{G}$  ha un estremo in  $\mathcal{V}_1$  e l'altro in  $\mathcal{V}_2$ , e quindi  $\mathcal{G}$  è un grafo bipartito, come si voleva dimostrare.

**Esercizio 2.3.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo connesso senza orientamento. Si dimostri che  $\mathcal{G}$  è un grafo bipartito se e solo se ogni circuito di  $\mathcal{G}$  ha lunghezza pari.

*Suggerimento* – Si dimostri che in un grafo esiste un ciclo di lunghezza dispari se e solo se esiste un circuito di lunghezza dispari.

## 2.4 - Matrice di adiacenza.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo, e siano  $v, w \in \mathcal{V}$ . Ricordiamo che si dice che  $w$  è *adiacente a*  $v$  se esiste  $\ell \in \mathcal{L}$  di estremi  $v$  e  $w$ . In particolare:

- un vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  è adiacente a se stesso se e soltanto se esiste un cappio incidente  $v$ ;
- se  $\mathcal{G}$  è un grafo senza orientamento, il vertice  $w$  è adiacente al vertice  $v$  se e soltanto se il vertice  $v$  è adiacente al vertice  $w$ ;
- se  $\mathcal{G}$  è un grafo con orientamento, dal fatto che il vertice  $w$  è adiacente al vertice  $v$  non possiamo ricavare alcuna informazione sull'eventualità che il vertice  $v$  sia adiacente al vertice  $w$ ;
- se  $\mathcal{G}$  è un grafo orientato (ossia asimmetrico), dal fatto che il vertice  $w$  è adiacente al vertice  $v$  possiamo dedurre che il vertice  $v$  non è adiacente al vertice  $w$ .

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo finito con  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Si dice *matrice di adiacenza* di  $\mathcal{G}$  la matrice  $(a_{i,j})$  così definita:

$$a_{i,j} \text{ è il numero dei } \ell \in \mathcal{L} \text{ di estremi } v_i \text{ e } v_j.$$

### Teorema 2.4.1

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo finito con  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , e sia  $A = (a_{i,j})$  la matrice di adiacenza di  $\mathcal{G}$ .

(1)  $\mathcal{G}$  è un grafo semplice se e soltanto se

$$a_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\};$$

(2)  $\mathcal{G}$  è privo di cappi se e soltanto se

$$a_{i,i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

(cioè se e soltanto se tutti gli elementi della diagonale principale di  $A$  sono nulli);

(3) se  $\mathcal{G}$  è un grafo senza orientamento,

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

(cioè  $A$  è una matrice simmetrica).

*Dimostrazione* – Ovvio.



**Teorema 2.4.2**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo finito con  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , e sia  $A = (a_{i,j})$  la matrice di adiacenza di  $\mathcal{G}$ . Per ogni  $k \in \mathbb{Z}^+$ , sia  $A^k = (b_{i,j})$  il prodotto righe per colonne

$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ copie di } A}.$$

Per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , l'elemento  $b_{i,j}$  è il numero delle passeggiate distinte di lunghezza  $k$  di estremi  $v_i$  e  $v_j$ .

*Dimostrazione* – Procediamo per induzione su  $k$ . Se  $k = 1$ , l'asserto segue dalla definizione di  $A$ . Supponiamo allora che l'asserto sia vero per  $k - 1$ , cioè che il numero delle passeggiate distinte di lunghezza  $k - 1$  di estremi  $v_i$  e  $v_j$  sia l'elemento  $c_{i,j}$  di posto  $(i, j)$  nella matrice  $A^{k-1}$ .

Ogni passeggiata di lunghezza  $k$  di estremi  $v_i$  e  $v_j$  si decompone in una passeggiata di lunghezza  $k - 1$  di estremi  $v_i$  e  $v_h$  e in una passeggiata di lunghezza 1 di estremi  $v_h$  e  $v_j$  (per ogni vertice  $v_h$  tale che  $v_j$  è adiacente a  $v_h$ ). Al variare di  $v_h$  in  $\mathcal{V}$ , il numero delle passeggiate distinte di estremi  $v_i$  e  $v_j$  è dunque

$$\sum_{v_h \in \mathcal{V}} (\# \text{ passeggiate di lunghezza } k - 1 \text{ di estremi } v_i \text{ e } v_h) \cdot (\# \text{ lati incidenti } v_h \text{ e } v_j)$$

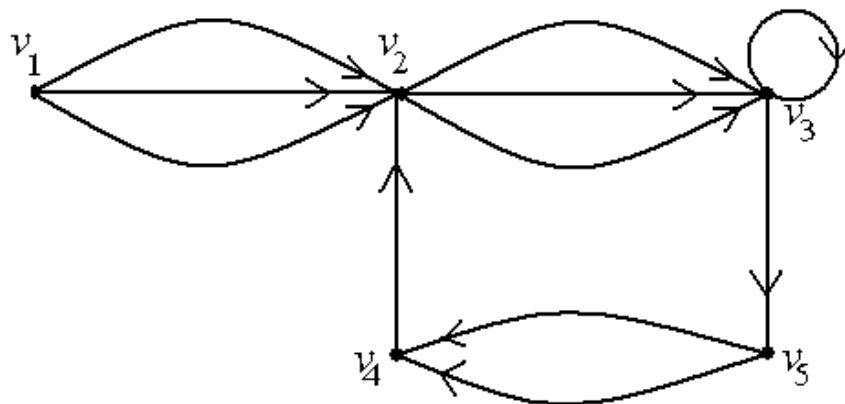
ossia, tenendo conto dell'ipotesi di induzione,

$$\sum_{h=1}^n c_{i,h} \cdot a_{h,j}$$

essendo  $c_{i,h}$  l'elemento di posto  $(i, h)$  della matrice  $A^{k-1}$ . Ma questo, per definizione di prodotto “righe per colonne”, è appunto l'elemento di posto  $(i, j)$  della matrice  $A^k$ , come si voleva dimostrare.

**Esempio 2.4.3**

Sia  $\mathcal{G}$  il (multi)grafo con (cappi e) orientamento disegnato qui sotto.



La matrice di adiacenza  $A$  di  $\mathcal{G}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

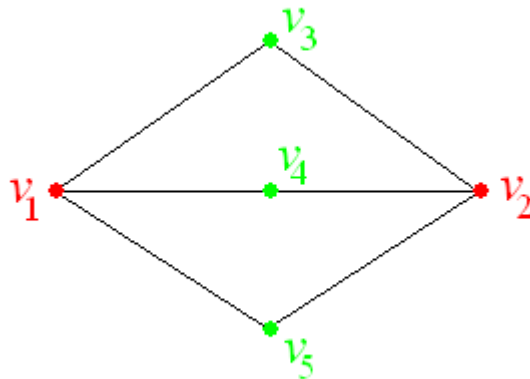
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 63 & 18 & 9 \\ 0 & 6 & 39 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 19 & 14 & 13 \\ 0 & 6 & 21 & 6 & 3 \\ 0 & 12 & 6 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dunque, ad esempio: nel grafo dato, non esiste nessuna passeggiata di lunghezza 6 che finisca in  $v_1$ ; esistono 13 passeggiate distinte di lunghezza 6 che iniziano in  $v_3$  e finiscono in  $v_5$ ; ed esistono 63 passeggiate distinte di lunghezza 6 che iniziano in  $v_1$  e finiscono in  $v_3$ .

## Esempio 2.4.4

Sia  $\mathcal{K}_{2,3}$  il grafo completo bipartito su sottoinsiemi di 2 e 3 vertici (dunque, un grafo semplice, senza cappi e senza orientamento) disegnato qui sotto.



La matrice di adiacenza  $A$  di  $\mathcal{K}_{2,3}$  è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix};$$

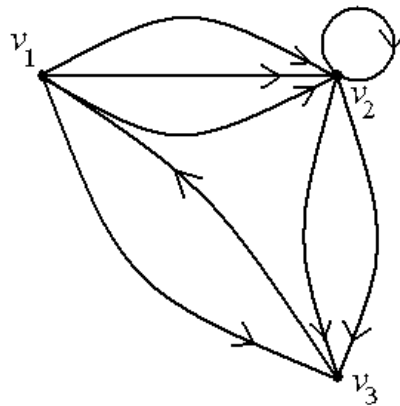
$$A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 36 & 36 & 36 \\ 0 & 0 & 36 & 36 & 36 \\ 36 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 36 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 48 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 72 & 72 \\ 0 & 0 & 72 & 72 & 72 \\ 0 & 0 & 72 & 72 & 72 \end{pmatrix}.$$

come (in questo caso particolare) sarebbe peraltro stato facile calcolare a priori.

**Esempio 2.4.5**

Sia  $\mathcal{G}$  il (multi)grafo con (cappi e) orientamento disegnato qui sotto.



Ci chiediamo quante siano le passeggiate di lunghezza 6 da  $v_1$  a  $v_2$ . Per rispondere, scriviamo la matrice di adiacenza  $A$  di  $\mathcal{G}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dalla quale potremmo ricavare tutte le informazioni sulle passeggiate di lunghezza 2 fra i vari vertici. Calcoliamo poi

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 24 & 18 \\ 4 & 13 & 16 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

dalla quale potremmo ricavare tutte le informazioni sulle passeggiate di lunghezza 4 fra i vari vertici.

A questo punto ci basta calcolare l'elemento di posto (1, 2) della matrice  $A^6 = A^4 \cdot A^2$ , cioè ci basta “moltiplicare” la prima riga di  $A^4$  per la seconda colonna di  $A^2$ :

$$7 \cdot 3 + 24 \cdot 1 + 18 \cdot 3 = 99.$$

Naturalmente avremmo ottenuto lo stesso risultato osservando che  $A^6 = A^2 \cdot A^4$  e quindi “moltiplicando” la prima riga di  $A^2$  per la seconda colonna di  $A^4$ :

$$1 \cdot 24 + 3 \cdot 13 + 6 \cdot 6 = 99.$$



## 3.- ALBERI

*In questo capitolo considereremo soltanto grafi senza orientamento.*

### 3.1 - Alberi e foreste.

Si dice *albero* un grafo connesso senza cicli. Si dice *foresta* un grafo senza cicli.

#### Osservazione 3.1.1

Ciascuna componente connessa di una foresta è un albero.

*Dimostrazione* – Ovvio per il teorema 2.2.8.

#### Osservazione 3.1.2

Una foresta è semplice e priva di cappi.

*Dimostrazione* – Sia  $\mathcal{G}$  un grafo: proviamo che se non è semplice, oppure ha cappi, ha cicli e dunque non è una foresta. In effetti, se in  $\mathcal{G}$  esistono due lati distinti  $\ell_1$  e  $\ell_2$  incidenti la stessa coppia di vertici  $\{v, w\}$ , c'è il ciclo

$$v, \ell_1, w, \ell_2, v;$$

se in  $\mathcal{G}$  c'è un cappio  $\ell$  incidente un certo vertice  $v$ , c'è il ciclo

$$v, \ell, v.$$

#### Osservazione 3.1.3

Una foresta non ha circuiti.

*Dimostrazione* – Per il teorema 2.1.4, un circuito di lunghezza minima è un ciclo.

### 3.2 - Caratterizzazione degli alberi come grafi connessi minimali.

#### Teorema 3.2.1

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Sono fatti equivalenti:

- (i)  $\mathcal{G}$  è un albero;
- (ii)  $\mathcal{G}$  è privo di cappi, e comunque presi due vertici distinti di  $\mathcal{G}$ , in  $\mathcal{G}$  esiste esattamente un cammino che li ha per estremi;
- (iii)  $\mathcal{G}$  è connesso, ma togliendo un lato qualsiasi il grafo risultante non è connesso.

*Dimostrazione* –

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Per l’osservazione 3.1.2,  $\mathcal{G}$  è privo di cappi. Per definizione di albero,  $\mathcal{G}$  è connesso; dunque comunque presi due vertici distinti esiste almeno un cammino che li ha per estremi: resta da provare che ce n’è uno solo. Supponiamo per assurdo che esistano due vertici distinti  $v, w$  di  $\mathcal{G}$  tali che esistono in  $\mathcal{G}$  due diversi cammini

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{r-1}, \ell_r, v_r = w$$

e

$$v = v_0, \ell_1^*, v_1^*, \ell_2^*, v_2^*, \dots, v_{s-1}^*, \ell_s^*, v_s^* = w$$

di estremi  $v$  e  $w$ . Scegliamo  $v$  e  $w$  in modo che la loro distanza sia minima: questo comporta che i vertici  $v_i$  e  $v_j^*$  sono a due a due tutti distinti tra loro. Ma allora “percorrendo” il primo cammino da  $v$  a  $w$  e poi (“a ritroso”) il secondo cammino da  $w$  a  $v$  si ottiene un circuito in  $\mathcal{G}$ , e ciò è assurdo (come volevamo) perché  $\mathcal{G}$  è un albero.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Per la (ii), comunque presi due vertici distinti di  $\mathcal{G}$  esiste un cammino che li ha per estremi: dunque  $\mathcal{G}$  è connesso. Sia  $\mathcal{G}_1$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo un lato  $\ell$  qualsiasi, e sia  $\iota(\ell) = \{v, w\}$ ; poiché in  $\mathcal{G}$  non ci sono cappi,  $v \neq w$  e dunque in  $\mathcal{G}$  c’è il cammino

$$v, \ell, w.$$

Per la (ii), non ci sono altri cammini di estremi  $v$  e  $w$ . Dunque in  $\mathcal{G}_1$   $v$  e  $w$  non sono connessi e pertanto  $\mathcal{G}_1$  non è connesso.

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Per la (iii)  $\mathcal{G}$  è connesso; se in  $\mathcal{G}$  ci fosse un ciclo, per il teorema 2.2.5 ciascun grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo un qualsiasi lato del ciclo sarebbe ancora un grafo connesso, e ciò sarebbe assurdo per la (iii): dunque in  $\mathcal{G}$  non ci sono cicli, e quindi  $\mathcal{G}$  è un albero, come si voleva.

#### Teorema 3.2.2

In un albero finito che non consista di un solo vertice ci sono almeno due foglie.

*Dimostrazione* – Poiché l’albero è finito, si possono trovare due vertici  $v$  e  $w$  che hanno distanza massima  $d$  (cfr. sez. 2.3). Proviamo che  $v$  e  $w$  hanno grado 1.



Supponiamo per assurdo che (ad esempio)  $v$  non abbia grado 1: poiché l'albero non consiste di un solo vertice, se  $v$  non ha grado 1 ha grado almeno 2; sia allora  $\ell$  un lato incidente a  $v$  diverso da  $\ell_1$  e sia  $\iota(\ell) = \{v, \bar{v}\}$ . Sia

$$v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_d, v_d = w$$

un cammino di lunghezza  $d$  con estremi  $v$  e  $w$ . Se  $\bar{v} = v_{i_0}$  per qualche  $i_0$  compreso tra 0 e  $d$  si ha un circuito

$$\bar{v} = v_{i_0}, \ell, v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_{i_0}, v_{i_0}$$

assurdo per definizione di albero. Se invece  $\bar{v} \neq v_i$  per  $i := 0, \dots, d$ ,  $\bar{v}$  e  $w$  sono due vertici dell'albero aventi distanza  $d + 1$ : infatti

$$\bar{v}, \ell, v = v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, \ell_d, v_d = w$$

è un cammino di lunghezza  $d + 1$  con estremi  $v$  e  $w$  (ed è necessariamente l'unico cammino di estremi  $v$  e  $w$ , per la (ii) del teorema 3.2.1). Ma ciò è assurdo, perché avevamo scelto  $v$  e  $w$  in modo che avessero distanza massima.

In ogni caso si raggiunge un assurdo, dunque  $v$  ha grado 1; ed esattamente allo stesso modo si dimostra che  $w$  ha grado 1.

### Esempio 3.2.3

Sia  $\mathcal{G} := (\mathbb{Z}, \mathcal{L}, \mathbf{id}_{\mathcal{L}})$  il grafo (infinito) che ha per vertici i numeri interi relativi e per lati le coppie  $\{n, n + 1\}$  con l'identità come funzione di incidenza.  $\mathcal{G}$  è un albero (infinito) senza foglie.

### Teorema 3.2.4

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo finito con  $|\mathcal{V}| = n$  e  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Sono fatti equivalenti:

- (i)  $\mathcal{G}$  è un albero;
- (ii)  $\mathcal{G}$  è connesso, e  $\lambda = n - 1$ ;

*Dimostrazione* –

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Un albero è connesso per definizione, dunque resta da dimostrare che un albero con  $n$  vertici ha esattamente  $n - 1$  lati.

Procediamo per induzione su  $n$ . Per  $n := 1$ , l'albero consiste di un solo vertice e zero lati, come si voleva. Supponiamo che (ipotesi di induzione) ogni albero con  $n - 1$  vertici abbia  $n - 2$  lati, e sia  $\mathcal{G}$  un albero con  $n$  vertici e  $\lambda$  lati. Per il teorema 3.2.2,  $\mathcal{G}$  ha almeno due foglie; sia  $\mathcal{G}_1$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo una foglia e l'unico lato ad essa incidente.

Allora  $\mathcal{G}_1$  è un albero (perché sopprimendo una foglia un grafo connesso rimane tale, teorema 2.2.4, e certamente sopprimendo qualsiasi cosa non si introducono cicli), con  $n - 1$  vertici e  $\lambda - 1$  lati; per l’ipotesi d’induzione si ha

$$\lambda - 1 = (n - 1) - 1$$

da cui immediatamente

$$\lambda = n - 1$$

come si voleva.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). La (ii) ci assicura che  $\mathcal{G}$  è connesso. Supponiamo per assurdo che  $\mathcal{G}$  abbia un ciclo, e sia  $\mathcal{G}_1 := (\mathcal{V}, \mathcal{L}^*, \iota^*)$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo una qualsiasi lato di tale ciclo: per il teorema 2.2.5,  $\mathcal{G}_1$  è un grafo connesso, e si ha  $|\mathcal{V}| = n$  e  $|\mathcal{L}^*| = \lambda - 1$ ; esso ha  $n$  vertici e  $\lambda - 1$  lati; per il teorema 2.2.6, deve essere

$$\lambda - 1 \geq n - 1$$

ossia  $\lambda \geq n$ , contro la (ii). Si è così ottenuto un assurdo, e ciò prova che  $\mathcal{G}$  non ha cicli, come si voleva.

### Teorema 3.2.5

In una foresta con  $n$  vertici,  $\lambda$  lati e  $k$  componenti connesse, si ha

$$n = \lambda + k.$$

*Dimostrazione* – Siano  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$  le componenti connesse della foresta data. Per  $i := 1, 2, \dots, k$  siano  $n_i$  e  $\lambda_i$  rispettivamente il numero di vertici e il numero di lati di  $\mathcal{A}_i$ . Ricordando l’osservazione 3.1.1 e applicando l’equivalenza tra (i) e (ii) del teorema 3.2.4, si ha

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda_1 + 1; \\ n_2 &= \lambda_2 + 1; \\ &\dots \\ n_k &= \lambda_k + 1. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro, e ricordando che  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  e  $\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ , si ha l’asserto.

### Teorema 3.2.6

Sia  $\mathcal{A}$  un albero con  $n$  vertici. Qualunque grafo  $\mathcal{G}$  semplice e senza cappi in cui ogni vertice ha grado almeno  $n - 1$  ha un sottografo isomorfo ad  $\mathcal{A}$ .

*Dimostrazione* – Procediamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$ ,  $\mathcal{A}$  consiste di un vertice isolato e certamente è (isomorfo a un) sottografo di qualsiasi grafo dato.

Supponiamo dunque che l’asserto sia vero per  $n - 1$ . Sia  $v$  un vertice di grado 1 (“una foglia”) di  $\mathcal{A}$ , sia  $\ell$  il lato (l’unico lato!) incidente con  $v$ , e sia  $w$  l’altro vertice incidente con  $\ell$ ; sia  $\mathcal{A}_1$  l’albero ottenuto da  $\mathcal{A}$  sopprimendo  $v$  e  $\ell$ . Poiché  $\mathcal{A}_1$  è un albero con  $n - 1$  vertici, per l’ipotesi di induzione c’è un isomorfismo  $(\varphi, \psi)$  tra  $\mathcal{A}_1$  e un sottografo di  $\mathcal{G}$ .

Sia  $w_0 = \varphi(w)$ :  $w_0$  è un vertice di  $\mathcal{G}$  e quindi, per ipotesi, ha grado almeno  $n - 1$ ; poiché  $\mathcal{G}$  è un grafo semplice e senza cappi, per l’osservazione 1.1.1 ci sono in  $\mathcal{G}$  almeno  $n - 1$  vertici adiacenti a  $w_0$ , dunque in  $\varphi$  uno almeno di essi non corrisponde a nessun vertice di  $\mathcal{A}_1$ : è dunque possibile “estendere”  $\varphi$  a tutto  $\mathcal{A}$ , e il teorema è così dimostrato.

### 3.3 - Classi di isomorfismo degli alberi con “pochi” vertici.

È un utile esercizio individuare tutti gli alberi con un (“piccolo”) numero assegnato di vertici, naturalmente a meno di isomorfismo.

Con un solo vertice, c’è soltanto il grafo  $\mathbf{K}_1$  che consiste in un vertice isolato.

Con due vertici, c’è soltanto il grafo completo  $\mathbf{K}_2$  ( $=\mathbf{P}_1$ ) formato da due vertici e un lato incidente entrambi.

Con tre vertici, c’è soltanto il cammino  $\mathbf{P}_2$  formato da tre vertici  $v_1, v_2, v_3$  e da due lati  $\ell_1, \ell_2$  tali che  $\iota(\ell_1) = \{v_1, v_2\}$  e  $\iota(\ell_2) = \{v_2, v_3\}$ .

Con quattro vertici, ci sono due alberi non isomorfi: il cammino  $\mathbf{P}_3$  (formato da quattro vertici  $v_1, v_2, v_3, v_4$  e da tre lati  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  tali che  $\iota(\ell_1) = \{v_1, v_2\}$ ,  $\iota(\ell_2) = \{v_2, v_3\}$  e  $\iota(\ell_3) = \{v_3, v_4\}$ ); e la stella  $\mathbf{S}_3$  formata da un vertice di grado 3 adiacente a tre vertici di grado 1.

Lasciamo al lettore la determinazione dei tre alberi non isomorfi con 5 vertici, dei sei alberi non isomorfi con 6 vertici e degli undici alberi non isomorfi con 7 vertici.



## 4.- GRAFI PIANI

### 4.1 - Definizione e prime proprietà.

Un grafo  $\mathcal{G}$  disegnato nel piano (cfr. sez. 1.8) si dice *senza sovrapposizione di lati* se comunque presi due lati di  $\mathcal{G}$  la loro intersezione è vuota o consiste in alcuni dei loro estremi. Un grafo si dice *piano* (o *planare*) se è isomorfo a un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati.

#### Teorema 4.1.1

Un grafo è piano se e soltanto se il suo sostegno (cfr. sez. 1.2) è piano.

*Dimostrazione* – Sia  $\mathcal{G}$  un grafo piano, e sia  $\mathcal{G}_0$  un disegno di  $\mathcal{G}$  nel piano senza sovrapposizione di lati. Un disegno nel piano del sostegno di  $\mathcal{G}$  si ottiene in modo ovvio da  $\mathcal{G}_0$  eliminando alcuni lati, e quindi tale disegno è ancora senza sovrapposizione di lati.

Viceversa, sia  $\mathcal{G}$  un grafo il cui sostegno  $\overline{\mathcal{G}}$  è piano; allora esiste un disegno  $\overline{\mathcal{G}}_0$  di  $\overline{\mathcal{G}}$  nel piano senza sovrapposizione di lati. Un disegno di  $\mathcal{G}$  nel piano si può ottenere da  $\overline{\mathcal{G}}_0$  aggiungendo eventualmente lati paralleli a lati già esistenti e/o cappi e/o assegnando un orientamento a tutti i lati così disegnati: poiché le linee non hanno spessore, ciascuna di queste aggiunte può avvenire senza creare sovrapposizione di lati. Dunque anche  $\mathcal{G}$  è un grafo piano.

*Per il teor. 4.1.1, in questo capitolo considereremo soltanto grafi senza orientamento, semplici e privi di cappi.*

**Teorema 4.1.2**

Ogni albero è un grafo piano.

*Dimostrazione* – Dimostriamo il teorema per gli alberi finiti, procedendo per induzione sul numero  $n$  dei vertici. Se  $n = 1$ , l’asserto è ovvio. Supposto vero il teorema per tutti gli alberi con  $n - 1$  vertici, sia  $\mathcal{A}$  un albero con  $n (> 1)$  vertici. Per il teorema 3.2.2,  $\mathcal{A}$  ha almeno due foglie: sia  $\mathcal{A}^*$  l’albero ottenuto da  $\mathcal{A}$  sopprimendo una foglia; per l’ipotesi di induzione esiste un grafo  $\mathcal{G}^*$  disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati isomorfo ad  $\mathcal{A}^*$ , e  $\mathcal{G}^*$  può certamente essere completato (aggiungendo un segmento opportunamente piccolo) in modo da ottenere un grafo  $\mathcal{G}$  disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati isomorfo ad  $\mathcal{A}$ .

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo disegnato nel piano, e sia  $\mathcal{W}$  l’insieme dei punti del piano che non sono vertici di  $\mathcal{G}$  e non appartengono ad alcun lato di  $\mathcal{G}$ . Le componenti connesse di  $\mathcal{W}$  (nel senso considerato nella sez. 1.7) si dicono *facce* di  $\mathcal{G}$ . In generale, il numero delle facce di un grafo dipende dal particolare disegno nel piano che stiamo considerando; ecco due disegni nel piano di  $\mathcal{K}_4$  che hanno rispettivamente 5 e 4 facce (non si dimentichi la faccia illimitata, detta *esterna!*):



Però se un grafo è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati il *numero* delle facce non dipende dal particolare disegno che stiamo considerando ma soltanto dal numero dei suoi vertici e dal numero dei suoi lati:

**Teorema 4.1.3 (“formula di Eulero”)**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo connesso con  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con  $f$  facce, si ha

**4.1.F1** 
$$n - \lambda + f = 2.$$

*Dimostrazione* – Procediamo per induzione sul numero  $\lambda$  dei lati di  $\mathcal{G}$ . Se  $\lambda = 0$ ,  $\mathcal{G}$  consiste di un solo vertice: dunque  $n = 1$ ,  $\lambda = 0$  e  $f = 1$ , cosicché vale la **4.1.F1**. Supponiamo (ipotesi di induzione) che la **4.1.F1** valga per tutti i grafi piani connessi con  $\lambda - 1$  lati.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo piano connesso con  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è un albero,  $f = 1$  e (per il teorema 3.2.4)  $\lambda = n - 1$ , cosicché  $n - \lambda + f = n - (n - 1) + 1 = 2$  e quindi vale la [4.1.F1](#). Se  $\mathcal{G}$  non è un albero, in  $\mathcal{G}$  esiste un ciclo; sia  $\mathcal{G}_1$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  togliendo un lato da tale ciclo. Allora  $\mathcal{G}_1$  ha  $n$  vertici,  $\lambda - 1$  lati e  $f - 1$  facce (perché togliendo un lato da un ciclo la faccia “interna” e la faccia “esterna” individuate da tale ciclo si fondono in una faccia sola); poiché per l’ipotesi d’induzione la [4.1.F1](#) vale per  $\mathcal{G}_1$ , si ha

$$n - (\lambda - 1) + (f - 1) = 2$$

ossia

$$n - \lambda + f = 2$$

come si voleva.

**Corollario 4.1.4**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è disegnato nel piano con  $f$  facce e  $k$  componenti connesse, si ha

[4.1.F2](#) 
$$n - \lambda + f = k + 1.$$

*Dimostrazione* – Per ciascuna componente connessa  $\mathcal{G}_i$  di  $\mathcal{G}$ , siano  $n_i$  il numero dei vertici,  $\lambda_i$  il numero dei lati e  $f_i$  il numero delle facce. Per il teorema 4.1.3 si ha

$$n_i - \lambda_i + f_i = 2 \quad \text{per } i := 1, \dots, k$$

e quindi

(\*) 
$$\sum_{i=1}^k (n_i - \lambda_i + f_i) = 2k.$$

Si ha

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda$$

mentre

$$\sum_{i=1}^k f_i = f + (k - 1)$$

perché la “faccia esterna” viene conteggiata  $k$  volte anziché una sola. Dalla (\*) si ricava dunque che

$$2k = \sum_{i=1}^k (n_i - \lambda_i + f_i) = \sum_{i=1}^k n_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{i=1}^k f_i = n - \lambda + f + k - 1.$$

da cui subito la [4.1.F2](#).

## 4.2 - Calibro e planarità.

Una importante e utile condizione necessaria di planarità può essere espressa mediante il calibro (cfr. sez.1.11).

### Teorema 4.2.1

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo con  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è piano e ha calibro non inferiore a  $c$ ,

$$\lambda \leq \frac{c}{c-2}(n-2).$$

*Dimostrazione* – Supponiamo che  $\mathcal{G}$  sia piano e un (qualsiasi) suo disegno nel piano senza sovrapposizione di lati abbia  $f$  facce. Ognuna di esse ha un contorno formato da almeno  $c$  lati, quindi

$$cf \leq 2\lambda$$

perché ogni lato di  $\mathcal{G}$  appartiene al contorno di al più due facce (eventualmente di nessuna, ad esempio se uno dei suoi estremi è una foglia).

Ricordando che per la [4.1.F2](#) è  $f \geq \lambda + 2 - n$ , si ha che

$$c(\lambda + 2 - n) \leq cf \leq 2\lambda$$

ossia

$$(c-2)\lambda \leq c(n-2)$$

da cui immediatamente l'asserto.

### Corollario 4.2.2

Se  $n \geq 5$ , il grafo completo  $K_n$  non è piano.

*Dimostrazione* – Per  $n \geq 3$ , il grafo completo  $K_n$  ha calibro 3,  $n$  vertici e  $\frac{n(n-1)}{2}$  lati. Se è un grafo piano, per il teorema 4.2.1 deve essere

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 3(n-2)$$

ossia

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0$$

cioè

$$(n-3)(n-4) \leq 0$$

e questa condizione, se  $n \geq 5$ , non è verificata.



**Corollario 4.2.3**

Se  $n$  e  $m$  sono numeri interi positivi entrambi maggiori di 2, il grafo completo bipartito  $K_{n,m}$  non è piano. In particolare, il grafo completo bipartito  $K_{3,3}$  non è piano.

*Dimostrazione* – Il grafo completo bipartito  $K_{n,m}$  ha calibro 4,  $n + m$  vertici e  $nm$  lati. Se è piano, per il teorema 4.2.1 deve essere

$$nm \leq 2(n + m - 2).$$

Poiché  $K_{n,m} = K_{m,n}$ , possiamo supporre che sia  $n \leq m$ . Se fosse  $n \geq 4$ , si avrebbe

$$4m \leq nm \leq 2(2m - 2) = 4(m - 1),$$

assurdo. Se fosse invece  $n = 3$ , si avrebbe

$$nm = 3m \leq 2(m + 1) = 2m + 2$$

da cui  $m \leq 2$ , assurdo perché abbiamo supposto  $3 = n \leq m$ .

**Corollario 4.2.4**

Il grafo di Petersen non è piano.

*Dimostrazione* – Il grafo di Petersen ha calibro 5, 10 vertici e 15 lati. Se fosse un grafo piano, per il teorema 4.2.1 dovrebbe essere

$$15 \leq \frac{5}{3} \cdot 10$$

ossia  $45 \leq 40$ , assurdo.

**Corollario 4.2.5**

In un grafo piano semplice e senza cappi c'è almeno un vertice di grado non superiore a 5.

*Dimostrazione* – Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo piano con  $|\mathcal{V}| = n$ ,  $|\mathcal{L}| = \lambda$ . Se  $\mathcal{G}$  è semplice e senza cappi ha calibro almeno 3, quindi per il teorema 4.2.1 deve essere

$$\lambda \leq 3n - 6.$$

D'altro lato, per il teorema 1.3.1 si ha  $\sum_{v \in \mathcal{V}} gr(v) = 2\lambda$  e quindi, se ogni vertice avesse grado almeno 6, sarebbe

$$6n \leq \sum_{v \in \mathcal{V}} gr(v) = 2\lambda \leq 6n - 12$$

assurdo.

### 4.3 - Il teorema di Kuratowski.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Si dice *suddivisione* di  $\mathcal{G}$  qualunque grafo  $(\mathcal{V}^*, \mathcal{L}^*, \iota^*)$  ottenuto da  $\mathcal{G}$  applicando un numero finito di volte il seguente procedimento:

$$\mathcal{V}^* := \mathcal{V} \cup \{v_0\}, \mathcal{L}^* := (\mathcal{L} \setminus \{\lambda_0\}) \cup \{\lambda_1, \lambda_2\}, \iota(\lambda_0) = \{v_1, v_2\}, \iota^*(\lambda_1) = \{v_1, v_0\}, \iota^*(\lambda_2) = \{v_2, v_0\}.$$

Al di là dei formalismi, il procedimento descritto consiste nell’eliminare un lato e poi aggiungere un nuovo vertice  $v_0$  e due lati incidenti ciascuno  $v_0$  e, rispettivamente, uno degli estremi del lato eliminato. Se è dato un disegno nel piano di  $\mathcal{G}$ , un disegno del grafo ottenuto con un’applicazione del procedimento descritto si ottiene utilizzando gli stessi archi di curve semplici piane e semplicemente “evidenziando” un punto che corrisponda al vertice aggiunto: dunque  $\mathcal{G}$  è un grafo piano se e soltanto se ogni sua suddivisione è un grafo piano.

In particolare, se  $\mathcal{G}$  ha come sottografo una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ , allora  $\mathcal{G}$  non è un grafo piano. Il matematico polacco Kazimierz Kuratowski (1896-1980) ha dimostrato che vale anche l’inverso, ottenendo così una significativa caratterizzazione dei grafi piani:

#### Teorema 4.3.1 (Kuratowski)

Un grafo è piano se e soltanto se nessun suo sottografo è (isomorfo a) una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$ .

*Dimostrazione* – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

#### Esercizio 4.3.2

Si trovi un sottografo del grafo di Petersen isomorfo a una suddivisione di  $K_5$  o di  $K_{3,3}$  (poiché il grafo di Petersen non è piano, come si è visto nel corollario 4.2.4, un tale sottografo deve esistere per il teorema di Kuratowski).

## 5.- GRAFI EULERIANI

### 5.1 - Definizione.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo. Un cammino di  $\mathcal{G}$  (eventualmente chiuso, cioè eventualmente un circuito)

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s$$

si dice *euleriano* se  $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_i, \dots, \ell_s\}$  (cioè se vi compaiono tutti i lati di  $\mathcal{G}$ ). Poiché in un cammino i lati sono tutti diversi fra loro, in un cammino euleriano di  $\mathcal{G}$  ogni lato di  $\mathcal{G}$  compare esattamente una volta. Se  $\mathcal{G}$  non ha vertici isolati, in un cammino euleriano di  $\mathcal{G}$  compare ogni vertice di  $\mathcal{G}$  (eventualmente più volte); in particolare, tranne il caso che  $\mathcal{G}$  abbia infiniti vertici isolati, se esiste in  $\mathcal{G}$  un cammino euleriano allora  $\mathcal{G}$  è un grafo finito.

Un grafo si dice *euleriano* se in esso esiste un circuito euleriano.

### 5.2 - La caratterizzazione dei grafi euleriani senza orientamento.

#### Teorema 5.2.1 (Euler)

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

- (i) in  $\mathcal{G}$  esiste un circuito euleriano;
- (ii)  $\mathcal{G}$  è connesso, e ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari.

*Dimostrazione* – (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $C$  un circuito euleriano di  $\mathcal{G}$ . Poiché  $\mathcal{G}$  non ha vertici isolati, in  $C$  compare ogni vertice di  $\mathcal{G}$ : dunque  $\mathcal{G}$  è connesso. Sia ora  $v$  un vertice di  $\mathcal{G}$ ; ogni volta che  $v$  compare in  $C$  vi compaiono anche due collegamenti di  $\mathcal{G}$  incidenti  $v$  oppure un cappio di  $\mathcal{G}$  incidente  $v$ ; poiché ogni lato di  $\mathcal{G}$  compare una e una sola volta in  $C$ , il grado di  $v$  deve essere pari.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Procediamo per induzione sul numero  $\lambda$  di lati di  $\mathcal{G}$ . Se  $\lambda = 1$ ,  $\mathcal{G}$  consiste di un vertice con un cappio, quindi è euleriano. Sia allora  $\lambda > 1$ , e supponiamo (ipotesi di induzione) che ogni grafo connesso privo di vertici isolati con tutti i vertici di grado pari che abbia meno di  $\lambda$  lati sia euleriano.

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo connesso con tutti i vertici di grado pari e  $\lambda$  lati (necessariamente privo di vertici isolati). Allora (per il teorema 1.3.4)  $\mathcal{G}$  è finito e (per il teorema 3.2.2) non può essere un albero, dunque ha almeno un circuito; sia  $C_0$  un circuito di lunghezza massima in  $\mathcal{G}$ .

Dimostriamo che  $C_0$  è un circuito euleriano di  $\mathcal{G}$  procedendo per assurdo: se non lo fosse, il grafo  $\mathcal{G}^*$  ottenuto da  $\mathcal{G}$  eliminando tutti i lati che compaiono in  $C_0$  avrebbe almeno un lato  $\ell$ ; sia  $\mathcal{G}_1^*$  la componente connessa di  $\mathcal{G}^*$  a cui appartiene  $\ell$ . Poiché ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari e per passare a  $\mathcal{G}^*$  abbiamo tolto i lati di un circuito (quindi uno o più cappi e una o più coppie di collegamenti per ogni vertice), anche in  $\mathcal{G}^*$  (e quindi in  $\mathcal{G}_1^*$ ) ogni vertice ha grado pari; inoltre  $\mathcal{G}_1^*$  è un grafo connesso con meno di  $\lambda$  lati, quindi per l'ipotesi di induzione esiste in  $\mathcal{G}_1^*$  un circuito euleriano  $C_1$ .

Siano  $v$  e  $w$  due vertici di  $\mathcal{G}$  scelti rispettivamente in  $C_0$  e in  $C_1$  in modo che abbiano distanza minima (esistono certamente perché  $\mathcal{G}$  è connesso). Deve essere  $v = w$ : altrimenti nel cammino di minima lunghezza avente per estremi  $v$  (in  $C_0$ ) e  $w$  (in  $C_1$ )

$$v, \ell_1, v_1, \ell_2, v_2, \dots, v_{s-1}, \ell_s, w$$

il lato  $\ell_s$  dovrebbe appartenere a  $\mathcal{G}_1^*$  (che, ricordiamo, è una componente connessa di  $\mathcal{G}^*$ ) e quindi a  $C_1$  (che per ipotesi è un circuito euleriano di  $\mathcal{G}_1^*$ ); ma allora anche  $v_{s-1}$  appartenerrebbe a  $C_1$ , assurdo per come abbiamo scelto  $v$  e  $w$ . Poiché  $v = w$ , tale vertice è comune a  $C_0$  e  $C_1$  e quindi percorrendo a partire da  $v$  tutto  $C_0$  e poi tutto  $C_1$  avremmo un circuito di  $\mathcal{G}$  di lunghezza maggiore di quella di  $C_0$ . Però noi avevamo scelto  $C_0$  in modo che avesse lunghezza massima fra tutti i circuiti di  $\mathcal{G}$ : dall'ipotesi che  $C_0$  non fosse un circuito euleriano di  $\mathcal{G}$  si è così raggiunto un assurdo, come si voleva.

Poiché un cammino è un caso particolare di circuito, in ogni grafo euleriano esistono cammini euleriani (il cui vertice di inizio può essere scelto arbitrariamente). Ma il teorema 5.2.1 consente anche una caratterizzazione dei grafi (senza orientamento) in cui esiste un cammino euleriano.

### Corollario 5.2.2

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento privo di vertici isolati, e siano  $v, w$  due vertici di  $\mathcal{G}$  con  $v \neq w$ . Sono fatti equivalenti:

- (i) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano di estremi  $v$  e  $w$ ;
- (ii)  $\mathcal{G}$  è connesso,  $v$  e  $w$  hanno grado dispari e ogni altro vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari.

*Dimostrazione* – (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $C$  un cammino euleriano di  $\mathcal{G}$ . Poiché  $\mathcal{G}$  non ha vertici isolati, in  $C$  compare ogni vertice di  $\mathcal{G}$ : dunque  $\mathcal{G}$  è connesso. Sia ora  $\mathcal{G}^*$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  aggiungendo un nuovo lato  $\ell$  incidente  $v$  e  $w$ . In  $\mathcal{G}^*$  esiste un circuito euleriano (ottenuto “completando” con  $\ell$  il cammino euleriano di estremi  $v$  e  $w$  esistente per ipotesi in  $\mathcal{G}$ ), dunque (per il teorema 5.2.1) ogni vertice di  $\mathcal{G}^*$  ha grado pari in  $\mathcal{G}^*$ . Per come si è costruito  $\mathcal{G}^*$ , i vertici di  $\mathcal{G}^*$  sono gli stessi di  $\mathcal{G}$ , e si ha che:

$$- gr_{\mathcal{G}}(v) = gr_{\mathcal{G}^*}(v) - 1, \text{ dunque } gr_{\mathcal{G}}(v) \text{ è dispari};$$

$$- gr_{\mathcal{G}}(w) = gr_{\mathcal{G}^*}(w) - 1, \text{ dunque } gr_{\mathcal{G}}(w) \text{ è dispari};$$

-  $gr_{\mathcal{G}}(\bar{v}) = gr_{\mathcal{G}^*}(\bar{v})$  per ogni altro vertice  $\bar{v}$ , dunque ogni altro vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari in  $\mathcal{G}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Sia  $\mathcal{G}^*$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  aggiungendo un nuovo lato  $\ell$  incidente  $v$  e  $w$ . Poiché  $\mathcal{G}^*$  è connesso e ogni suo vertice ha grado pari (infatti aggiungendo  $\ell$  il grado di  $v$  e  $w$  è aumentato di uno), per il teorema 5.2.1 in  $\mathcal{G}^*$  esiste un circuito euleriano  $C$ . Togliendo da  $C$  il lato  $\ell$ , si ottiene un cammino euleriano di  $\mathcal{G}$  di estremi  $v$  e  $w$ .

### Corollario 5.2.3

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano;

(ii)  $\mathcal{G}$  è connesso e ogni vertice di  $\mathcal{G}$ , tranne al più due, ha grado pari.

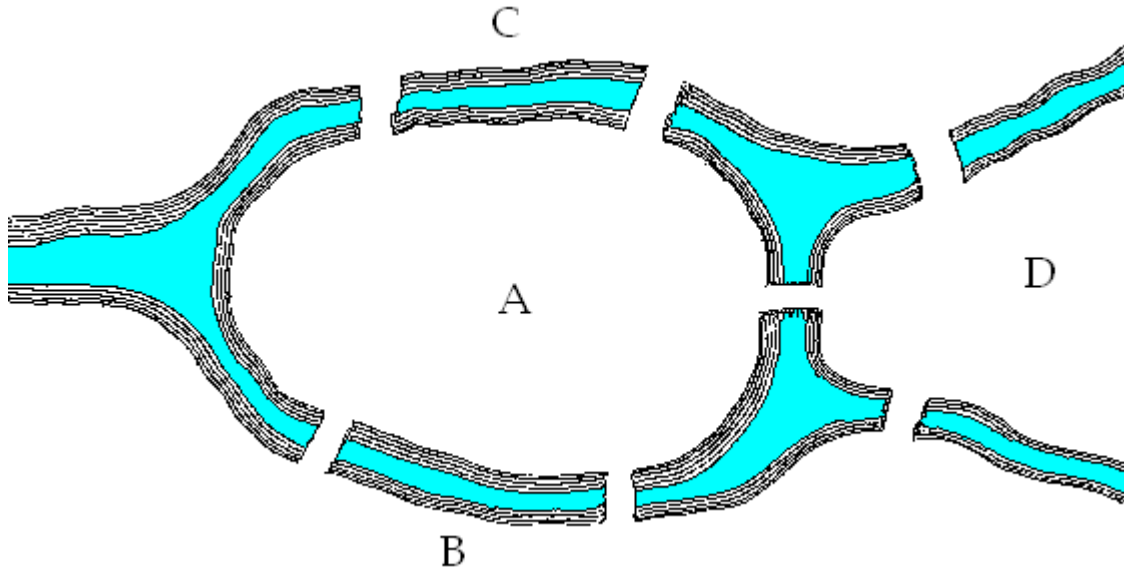
*Dimostrazione* – (i)  $\Rightarrow$  (ii). Sia  $C$  un cammino euleriano di  $\mathcal{G}$  e siano  $v$  e  $w$  i suoi estremi. Se  $v = w$ ,  $C$  è un circuito: dunque  $\mathcal{G}$  è un grafo euleriano e quindi (per il teorema 5.2.1) è connesso e ogni suo vertice ha grado pari. Se invece  $v \neq w$ , per il corollario 5.2.2  $\mathcal{G}$  è connesso,  $v$  e  $w$  hanno grado dispari e ogni altro vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Supponiamo che  $\mathcal{G}$  sia connesso. Se ogni vertice di  $\mathcal{G}$  ha grado pari, per il teorema 5.2.1 in  $\mathcal{G}$  esiste un circuito euleriano, che è in particolare un cammino euleriano. Se invece in  $\mathcal{G}$  esistono vertici di grado dispari, per il teorema 1.3.2 questi devono essere almeno 2, e quindi, poiché vale la (ii), devono essere esattamente 2; si può quindi applicare il corollario 5.2.2 e concludere anche in questo caso che in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano.

### Esempio 5.2.4 (i ponti di Königsberg)

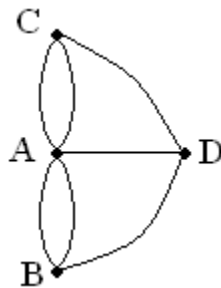
La città di Kaliningrad, attraversata dal fiume Pregolya, è un'enclave russa di 430 000 abitanti situata tra la Polonia e la Lituania. Fondata nel 1255 col nome tedesco di Königsberg, è appartenuta alla Prussia e poi alla Germania fino al 1945, quando fu occupata dall'Armata Rossa; ha assunto il nome attuale in onore di Mikhail Kalinin (1875-1946) alla morte di quest'ultimo.

Nella Königsberg del diciottesimo secolo c'erano due isolotti sul fiume Pregolya collegati alla terraferma da sette ponti, grosso modo così:



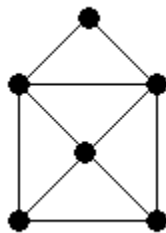
Nelle giornate non troppo fredde (siamo a  $54^\circ$  di latitudine nord...) gli abitanti di Königsberg passeggiavano tra gli isolotti, e a poco a poco si diffuse questa domanda: sarà possibile trovare un percorso che attraversi una e una sola volta ciascuno dei sette ponti?

La risposta (negativa) fu data da Leonhard Euler in una nota del 1736 (“Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis”, in *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, pagg. 128-140) considerata il primo lavoro che precorre la teoria dei grafi (tant'è vero che ad Eulero vengono accreditati il teorema 5.2.1 e il corollario 5.2.2). Per noi naturalmente è oggi banale osservare che il (multi)grafo che schematizza la situazione dei ponti di Königsberg (vedi sotto) ha quattro vertici tutti di grado dispari, cosicché non è possibile percorrere i sette ponti una e una sola volta nemmeno se si accetta di terminare il percorso in una regione territoriale diversa da quella dalla quale si è partiti.



**Esempio 5.2.5**

Un classico (quanto facile) rompicapo chiede di disegnare la “busta” qui sotto riprodotta senza mai staccare la penna dal foglio e senza mai ripassare su uno stesso tratto (è lecito però ritornare su singoli punti già tracciati):



Interpretando il disegno come un grafo disegnato sul piano che ha per lati i segmenti tracciati e per vertici i punti comuni ad almeno due di tali segmenti, il problema si traduce nel cercare un cammino euleriano: per il corollario 5.2.2 tale cammino esiste, parte da uno dei due vertici di grado dispari e termina sull’altro vertice di grado dispari.

**5.3 - La caratterizzazione dei grafi euleriani con orientamento.****Teorema 5.3.1**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo con orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

- (i) in  $\mathcal{G}$  esiste un circuito euleriano
- (ii)  $\mathcal{G}$  è connesso, e per ogni vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  si ha  $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$ .

*Dimostrazione* – È analoga a quella del teor. 5.2.1, e si lascia al lettore quale utile esercizio.

**Corollario 5.3.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo con orientamento privo di vertici isolati, e siano  $v_1, v_2$  due vertici di  $\mathcal{G}$  con  $v_1 \neq v_2$ . Sono fatti equivalenti:

- (i) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano di estremi  $v_1$  e  $v_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{G}$  è connesso,  $gr^{(u)}(v_1) = gr^{(e)}(v_1) + 1$ ,  $gr^{(e)}(v_2) = gr^{(u)}(v_2) + 1$  e per ogni altro vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  si ha  $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$ .

*Dimostrazione* – È analoga a quella del corollario 5.2.2 (utilizzando il teorema 5.3.1 in luogo del teorema 5.2.1), e si lascia al lettore quale utile esercizio.

Corollario 5.3.3

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo con orientamento privo di vertici isolati. Sono fatti equivalenti:

(i) in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino euleriano;

(ii)  $\mathcal{G}$  è connesso, e per ogni vertice  $v$  di  $\mathcal{G}$  si ha  $gr^{(e)}(v) = gr^{(u)}(v)$  tranne eventualmente per due,  $v_1$  e  $v_2$ , per i quali si ha  $gr^{(u)}(v_1) = gr^{(e)}(v_1) + 1$  e  $gr^{(e)}(v_2) = gr^{(u)}(v_2) + 1$ .



## 6.- GRAFI HAMILTONIANI

### 6.1 - Definizione e prime proprietà.

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo (che, per evitare inutili distinguo e complicazioni, supporremo avere almeno tre vertici). Un cammino semplice di  $\mathcal{G}$  (eventualmente chiuso, cioè eventualmente un ciclo)

$$v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{n-1}, \ell_n, v_n$$

si dice un *cammino hamiltoniano* se  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n\}$  (cioè se vi compaiono tutti i vertici di  $\mathcal{G}$ ). Poiché in un cammino semplice i vertici sono tutti diversi fra loro (fatta salva la possibilità che gli estremi coincidano, cioè che sia un ciclo), in un cammino hamiltoniano di  $\mathcal{G}$  ogni vertice di  $\mathcal{G}$  compare esattamente una volta (mentre ogni lato di  $\mathcal{G}$  compare, come in qualsiasi cammino, al più una volta). In particolare, se esiste in  $\mathcal{G}$  un cammino hamiltoniano allora  $\mathcal{V}$  è un insieme finito.

Un ciclo che sia un cammino hamiltoniano si dice un *ciclo hamiltoniano*. Un grafo si dice *hamiltoniano* se in esso esiste un ciclo hamiltoniano.

#### Osservazione 6.1.1

Un grafo senza orientamento con  $n$  ( $\geq 3$ ) vertici è hamiltoniano se e soltanto se è indotto da un suo sottografo isomorfo al ciclo  $C_n$ .

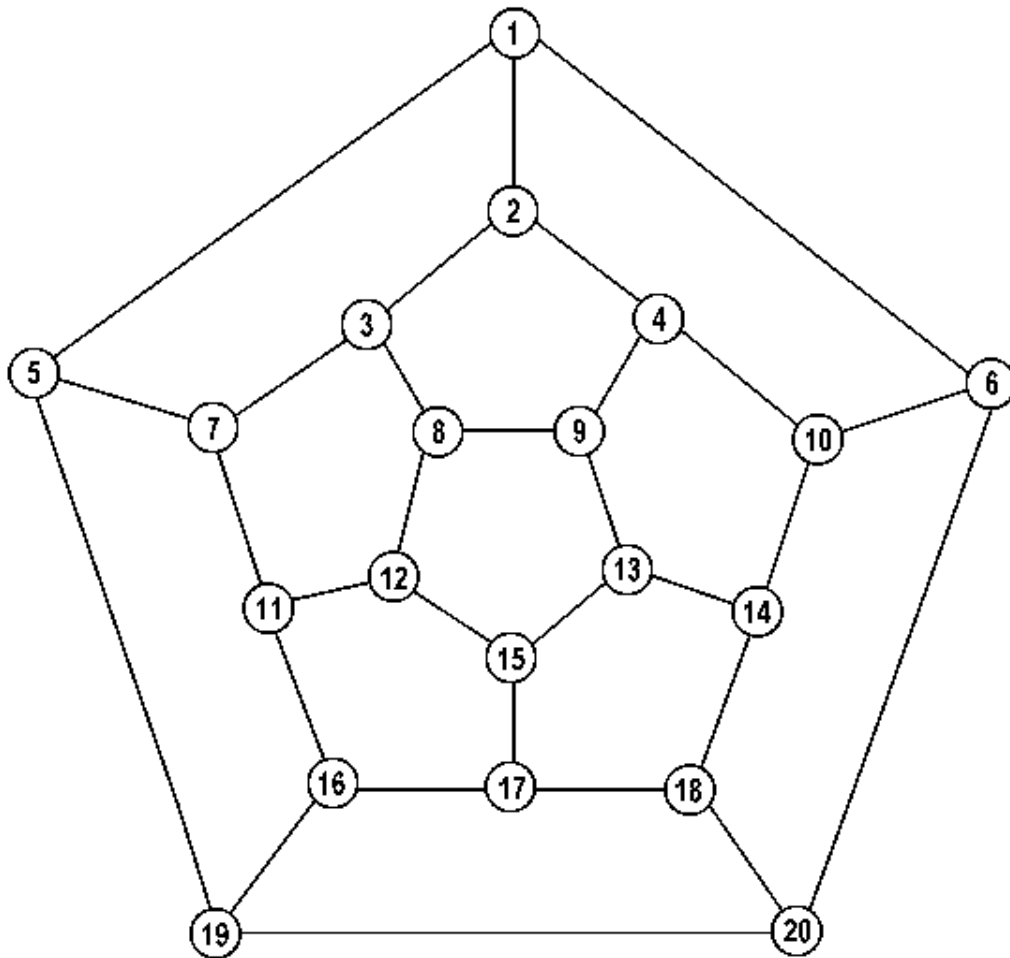
#### Osservazione 6.1.2

Un grafo senza orientamento (con almeno tre vertici) è hamiltoniano se e soltanto se il suo sostegno è hamiltoniano.

## Esempio 6.1.3 (Il giro del mondo su un icosaedro)

Anche i matematici, qualche volta, cercano di fare fortuna con gli affari. Il matematico inglese William Rowland Hamilton (1805 – 1865) cercò nel 1857 di commercializzare col nome di “Icosian game” un gioco basato sulla proiezione nel piano di un dodecaedro, i cui vertici e spigoli possono essere interpretati come vertici e lati di un grafo (piano, fra l’altro). Ogni vertice era etichettato col nome di una grande città del mondo, e bisognava “fare il giro del mondo” toccando una e una sola volta tutte le città e tornando a quella di partenza. Erano previste anche varianti, fra le quali la possibilità di un gioco per due giocatori; ma l’iniziativa non ebbe successo, e nonostante l’alta qualità del materiale (prodotto da J. Jacques and Sons) solo pochi esemplari furono venduti.

Potete anche voi divertirvi a “fare il giro del mondo” cercando un ciclo hamiltoniano nel grafo del dodecaedro qui di seguito riportato:



*Nel seguito di questo capitolo (esclusa la sez. 6.4) considereremo sempre grafi senza orientamento. Per l'osservazione 6.1.2, potremo supporli semplici e senza cappi.*

**Osservazione 6.1.4**

Per ogni numero naturale  $n$  ( $\geq 3$ ) il grafo completo  $K_n$  è hamiltoniano.

*Dimostrazione* – Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  i lati del grafo. Comunque presi  $v_i$  e  $v_j$ , per definizione di  $K_n$  esiste un lato  $\ell_{ij}$  incidente con essi, e tali lati sono a due a due distinti perché hanno estremi distinti. Dunque

$$v_1, \ell_{12}, v_2, \ell_{23}, \dots, v_{n-1}, \ell_{(n-1)n}, v_n, \ell_{1n}, v_1$$

è un ciclo hamiltoniano di  $K_n$ .

## **6.2 - Qualche condizione sufficiente.**

In questa sezione diamo qualche condizione sufficiente affinché un grafo (senza orientamento, semplice, senza cappi e con almeno tre vertici) sia hamiltoniano o abbia un cammino hamiltoniano.

L'idea di partenza è: se in un grafo c'è un cammino semplice nel quale gli estremi hanno grado “abbastanza grande”, allora in quel grafo c'è un ciclo con gli stessi vertici.

**Lemma 6.2.1**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento semplice e senza cappi, e sia

$$v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s$$

un cammino semplice di estremi  $v_1$  e  $v_s$  in  $\mathcal{G}$ .

Sia  $\alpha_1$  il numero dei vertici di  $\mathcal{G}$  a cui è adiacente  $v_1$  che appartengono al cammino; e sia  $\alpha_s$  il numero dei vertici di  $\mathcal{G}$  a cui è adiacente  $v_s$  che appartengono al cammino.

Se

$$\alpha_1 + \alpha_s \geq s$$

allora in  $\mathcal{G}$  esiste un ciclo i cui vertici sono esattamente  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_s$  (non necessariamente in quest'ordine).

*Dimostrazione* – Posto  $\mathcal{V}_0 := \{v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_s\}$ , sia

$A := \{v_i \in \mathcal{V}_0 / v_{i+1} \text{ è adiacente a } v_i \text{ in } \mathcal{G}\}$

e sia

$B := \{v_i \in \mathcal{V}_0 / v_i \text{ è adiacente a } v_s \text{ in } \mathcal{G}\}$ .

Se dimostriamo che  $A \cap B \neq \emptyset$ , otteniamo un ciclo di  $\mathcal{G}$  i cui vertici sono esattamente  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_s$  considerando un qualsiasi elemento  $v_i \in A \cap B$ ; detti infatti rispettivamente

$l_1$  il lato incidente  $v_{i+1}$  e  $v_1$

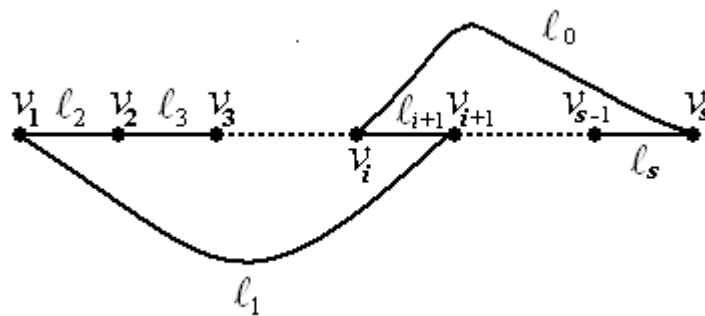
e

$l_0$  il lato incidente  $v_i$  e  $v_s$

si ha il ciclo

$v_{i+1}, l_1, v_1, l_2, v_2, l_3, \dots, v_{i-1}, l_i, v_i, l_0, v_s, l_s, v_{s-1}, \dots, l_{i+2}, v_{i+1}$

come si voleva.



Per dimostrare che  $A \cap B \neq \emptyset$ , cioè che  $|A \cap B| > 0$ , utilizziamo la nota relazione

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

che vale qualunque siano gli insiemi A e B. Da essa si ricava che

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$

e nel nostro caso si ha:

$|A| = \alpha_1$  (si noti che l'unico vertice del cammino che non è della forma  $v_{i+1}$  è  $v_1$ , che non è adiacente a se stesso poiché non ci sono cappi);

$$|B| = \alpha_s;$$

$$|A \cup B| < s \text{ (perché } v_s \text{ non appartiene né ad A né a B)}.$$

Pertanto (ricordando che per ipotesi  $\alpha_1 + \alpha_s \geq s$ )

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = \alpha_1 + \alpha_s - |A \cup B| \geq s - |A \cup B| > 0$$

e il lemma è completamente provato.

**Corollario 6.2.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con  $n$  ( $\geq 3$ ) vertici, e siano  $v, w$  due vertici di  $\mathcal{G}$  tali che

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n.$$

Se in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino hamiltoniano di estremi  $v$  e  $w$ , allora in  $\mathcal{G}$  esiste un ciclo hamiltoniano (ossia  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano).

*Dimostrazione* – Sia

$$v = v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_n = w$$

un cammino hamiltoniano di estremi  $v$  e  $w$  in  $\mathcal{G}$ . Con riferimento alle ipotesi del lemma 6.2.1, si ha  $\alpha_1 = gr_{\mathcal{G}}(v_1) = gr_{\mathcal{G}}(v)$  e  $\alpha_n = gr_{\mathcal{G}}(v_n) = gr_{\mathcal{G}}(w)$  (perché in un cammino hamiltoniano compaiono tutti i vertici del grafo); poiché per ipotesi

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$$

possiamo applicare il lemma 6.2.1 per concludere che esiste in  $\mathcal{G}$  un ciclo i cui vertici sono esattamente  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, v_n$ , cioè un ciclo hamiltoniano.

La seguente condizione sufficiente affinché un grafo sia hamiltoniano è dovuta al matematico norvegese Øystein Ore (1899-1968).

**Teorema 6.2.3 (Ore)**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con  $n$  ( $\geq 3$ ) vertici. Se comunque presi due vertici  $v, w$  di  $\mathcal{G}$  non adiacenti si ha

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$$

$\mathcal{G}$  è hamiltoniano.

*Dimostrazione* – Possiamo pensare di avere ottenuto  $\mathcal{G}$  a partire dal grafo completo  $K_n$  su  $n$  vertici sopprimendo  $j$  lati (eventualmente  $j = 0$ ); dimostriamo che  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano per induzione su  $j$ .

Per  $j := 0$ ,  $\mathcal{G}$  coincide con  $K_n$  e dunque è hamiltoniano per l’osservazione 6.1.4. Possiamo allora supporre, per l’ipotesi di induzione, che sia hamiltoniano ogni grafo ottenuto da  $K_n$  sopprimendo  $j - 1$  lati (e quindi ogni grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  aggiungendo un lato incidente due vertici non adiacenti).

Siano  $v, w$  due vertici non adiacenti in  $\mathcal{G}$ , e sia  $\mathcal{G}^* := \mathcal{G} + vw$ ; notiamo che  $\mathcal{G}^*$  è ancora un grafo semplice (perché  $v$  e  $w$  non erano adiacenti in  $\mathcal{G}$ ) e non ha cappi (perché non ne aveva  $\mathcal{G}$ ); poiché due vertici non adiacenti in  $\mathcal{G}^*$  non sono adiacenti nemmeno in  $\mathcal{G}$ , e poiché il grado di ogni vertice in  $\mathcal{G}^*$  non è inferiore al suo grado in  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G}^*$  verifica l’ipotesi del teorema e dunque (per l’ipotesi di induzione) ha un ciclo hamiltoniano  $C_0$ .

Se in  $C_0$  non compare il lato di estremi  $v$  e  $w$  che abbiamo aggiunto in  $\mathcal{G}^*$ ,  $C_0$  è un ciclo hamiltoniano di  $\mathcal{G}$  e dunque  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano; in caso contrario, togliendo tale lato da  $C_0$  otteniamo un cammino hamiltoniano di  $\mathcal{G}$  di estremi  $v$  e  $w$ ; poiché sono verificate le ipotesi del corollario 6.2.2, possiamo comunque concludere che  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano. Il teorema è così completamente provato.

Non è sorprendente che una condizione leggermente più debole di quella del teorema di Ore garantisca comunque l'esistenza di un cammino hamiltoniano. La dimostrazione utilizza anch'essa il lemma 6.2.1:

**Teorema 6.2.4**

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con  $|\mathcal{V}| = n$ . Se comunque presi due vertici  $v, w$  di  $\mathcal{G}$  non adiacenti si ha

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n - 1$$

allora in  $\mathcal{G}$  esiste un cammino hamiltoniano.

*Dimostrazione* – Osserviamo in primo luogo che  $\mathcal{G}$  è connesso. Siano infatti  $v, w$  due vertici distinti di  $\mathcal{G}$  e supponiamo per assurdo che appartengano a componenti connesse distinte  $\mathcal{G}_v, \mathcal{G}_w$  di  $\mathcal{G}$ , aventi rispettivamente  $n_v$  e  $n_w$  vertici; allora

$$gr_{\mathcal{G}}(v) \leq n_v - 1, \quad gr_{\mathcal{G}}(w) \leq n_w - 1, \quad n_v + n_w \leq n$$

cosicché

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \leq (n_v - 1) + (n_w - 1) = n_v + n_w - 2 \leq n - 2$$

contro la nostra ipotesi.

Ora prendiamo in  $\mathcal{G}$  un cammino semplice  $P_0$

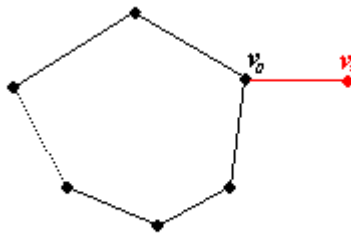
$$v_1, \ell_2, v_2, \ell_3, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \ell_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s$$

di lunghezza massima, e supponiamo per assurdo che esista in  $\mathcal{V}$  un  $v_{\star}$  non appartenente a  $P_0$  (cosicché in particolare  $s < n$  e quindi  $s \leq n - 1$ ).

Osserviamo ora che in  $\mathcal{G}$  esiste un ciclo  $C_0$  i cui vertici sono esattamente  $v_1, v_2, \dots, v_s$  (anche se non necessariamente in quest'ordine). Se  $v_1$  e  $v_s$  sono adiacenti, ciò è ovvio; in caso contrario possiamo applicare il lemma 6.2.1 perché  $v_1$  e  $v_s$  ne verificano le ipotesi con  $\alpha_1 = gr_{\mathcal{G}}(v_1)$  e  $\alpha_s = gr_{\mathcal{G}}(v_s)$ : se infatti (ad esempio)  $v_s$  fosse adiacente a un vertice  $v_{s+1}$  non appartenente a  $P_0$ , si potrebbe prolungare  $P_0$  fino a  $v_{s+1}$  contro l'ipotesi che  $P_0$  abbia lunghezza massima in  $\mathcal{G}$ ; inoltre, per ipotesi,

$$gr_{\mathcal{G}}(v_1) + gr_{\mathcal{G}}(v_s) \geq n - 1 \geq s.$$

Dunque in  $\mathcal{G}$  esiste un ciclo  $C_0$  i cui vertici sono esattamente  $v_1, v_2, \dots, v_s$  (anche se non necessariamente in quest'ordine).



Poiché  $\mathcal{G}$  è connesso, ogni vertice di  $C_0$  è connesso a  $v_*$ . Sia  $v_0$  il vertice di  $C_0$  che ha distanza minima da  $v_*$ : allora al cammino di minima lunghezza che ha per estremi  $v_*$  e  $v_0$  non appartengono altri vertici di  $C_0$ . Questo fatto ci fornisce la desiderata contraddizione: infatti andando da  $v_*$  a  $v_0$  e poi percorrendo tutto  $C_0$  fino a tornare a  $v_0$  si ottiene un cammino semplice di lunghezza maggiore di  $s$ , contro l'ipotesi che questa fosse la lunghezza massima di un cammino semplice in  $\mathcal{G}$ .

Sia  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  un grafo senza orientamento, semplice e senza cappi, e siano  $v, w$  vertici distinti non adiacenti di  $\mathcal{G}$ . Si dice grafo *ottenuto da  $\mathcal{G}$  aggiungendo il lato  $vw$*  (e si indica con  $\mathcal{G} + vw$ ) il grafo  $(\mathcal{V}, \mathcal{L}^*, \iota^*)$  tale che

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{\ell^*\}; \quad \iota^* \Big|_{\mathcal{L}} = \iota; \quad \iota^*(\ell^*) := \{v, w\}.$$

**Teorema 6.2.5**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con  $n$  ( $\geq 3$ ) vertici. Comunque presi due vertici  $v, w$  di  $\mathcal{G}$  (non adiacenti) tali che

$$gr_{\mathcal{G}}(v) + gr_{\mathcal{G}}(w) \geq n$$

$\mathcal{G}$  è hamiltoniano se e soltanto se  $\mathcal{G} + vw$  è hamiltoniano.

*Dimostrazione* – Se  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano, aggiungendo un lato si ottiene ancora un grafo hamiltoniano. Per dimostrare l'implicazione opposta, vale il ragionamento che abbiamo usato nella dimostrazione del teorema 6.2.3: supponiamo che  $\mathcal{G} + vw$  sia hamiltoniano, e sia  $C_0$  un ciclo hamiltoniano di  $\mathcal{G} + vw$ ; se fra i lati di  $C_0$  non c'è il lato  $\ell^*$  che abbiamo aggiunto per passare da  $\mathcal{G}$  a  $\mathcal{G} + vw$ ,  $C_0$  è un ciclo hamiltoniano di  $\mathcal{G}$  e non c'è altro da dimostrare; altrimenti, togliendo  $\ell^*$  si ottiene da  $C_0$  un cammino hamiltoniano di estremi  $v$  e  $w$ ; per il lemma 6.2.2, si conclude comunque che  $\mathcal{G}$  è hamiltoniano.

Sia  $\mathcal{G}_0 := (\mathcal{V}, \mathcal{L}_0, \iota_0)$  un grafo senza orientamento con  $|\mathcal{V}| = n$ , e si definisca ricorsivamente

$\mathcal{G}_{i+1} := \mathcal{G}_i + v_i w_i$  con  $v_i, w_i$  vertici non adiacenti di  $\mathcal{G}_i$  tali che  $gr_{\mathcal{G}_i}(v) + gr_{\mathcal{G}_i}(w) \geq n$  finché esistono in  $\mathcal{G}_i$  due vertici  $v_i, w_i$  non adiacenti tali che  $gr_{\mathcal{G}_i}(v) + gr_{\mathcal{G}_i}(w) \geq n$ .

Questo procedimento termina dopo meno di  $\binom{n}{2}$  passi (infatti il numero di lati che si possono aggiungere è inferiore al numero di lati di  $K_n$ , che è appunto  $\binom{n}{2}$ ). L'ultimo grafo ottenuto si dice *chiusura* di  $\mathcal{G}$ .

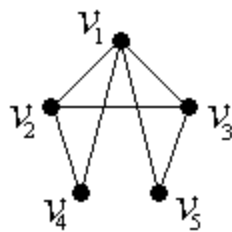
**Osservazione 6.2.6**

La chiusura di un grafo come sopra introdotta è ben definita, cioè non dipende dalla scelta delle coppie  $v_i, w_i$  di vertici non adiacenti in  $\mathcal{G}_i$  tali che  $gr_{\mathcal{G}_i}(v) + gr_{\mathcal{G}_i}(w) \geq n$ .

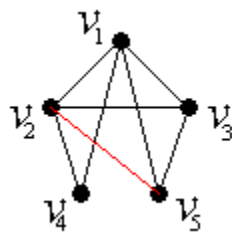
*Dimostrazione* – Omettiamo questa dimostrazione.

**Esempio 6.2.7**

Determiniamo la chiusura del grafo  $\mathcal{G}$  disegnato qui di seguito:

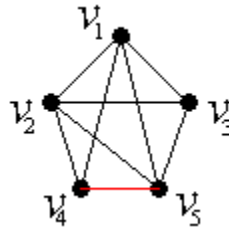


Poiché  $n = 5$ ,  $gr_{\mathcal{G}}(v_2) = 3$  e  $gr_{\mathcal{G}}(v_5) = 2$ , aggiungiamo un lato di estremi  $v_2$  e  $v_5$ :

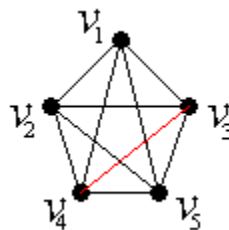




Si noti che avremmo anche potuto aggiungere un lato di estremi  $v_3$  e  $v_4$ : non però un lato di estremi  $v_4$  e  $v_5$  (perché  $gr_g(v_4) + gr_g(v_5) = 2 + 2 = 4 < 5 = n$ ). Adesso però, nel nuovo grafo,  $v_5$  ha grado 3; ora possiamo dunque aggiungere un lato di estremi  $v_4$  e  $v_5$ :



Infine possiamo aggiungere un lato di estremi  $v_3$  e  $v_4$ , ottenendo



In questo grafo non ci sono vertici non adiacenti per i quali la somma dei gradi sia almeno  $n$ : il procedimento perciò termina, e il grafo a cui siamo arrivati è la chiusura di quello da cui siamo partiti. Si noti che abbiamo ottenuto il grafo completo  $K_5$  sui cinque vertici del grafo iniziale.

**Teorema 6.2.8**

Un grafo senza orientamento (semplice e senza cappi, con almeno 3 vertici) è hamiltoniano se e soltanto se la sua chiusura è hamiltoniana.

*Dimostrazione* – Ovvio per il teorema 6.2.5.

**Corollario 6.2.9**

Condizione sufficiente affinché un grafo senza orientamento semplice e senza cappi con  $n$  ( $\geq 3$ ) vertici sia hamiltoniano è che la sua chiusura sia il grafo completo  $K_n$ .

*Dimostrazione* – Ovvio per il teorema 6.2.8 e l’osservazione 6.1.4.

**Esempio 6.2.10**

Il grafo  $\mathcal{G}$  considerato nell'esempio 6.2.7 è hamiltoniano, perché la sua chiusura è il grafo completo  $K_5$ . Un ciclo hamiltoniano di  $\mathcal{G}$  incontra, nell'ordine, i vertici  $v_1, v_4, v_2, v_3, v_5$  e infine di nuovo  $v_1$ .

**6.3 - Il caso dei grafi piani.**

È interessante avere a disposizione qualche condizione necessaria affinché un grafo sia hamiltoniano. Una, banale, è la seguente:

**Teorema 6.3.1**

Ogni grafo hamiltoniano è 2 – connesso

*Dimostrazione* – Per l'osservazione 6.1.1, questo teorema è semplicemente una riformulazione del teorema 2.2.9.

Più interessante è il seguente risultato, che però si applica soltanto ai grafi piani (cfr. capitolo 4):

**Teorema 6.3.2 (Grinberg)**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo piano semplice e senza cappi, e sia  $C_0$  un ciclo hamiltoniano in  $\mathcal{G}$ . Fissato un disegno di  $\mathcal{G}$  nel piano senza sovrapposizione di lati, sia  $s$  il numero massimo dei lati nelle facce di  $\mathcal{G}$  e per  $j := 3, 4, \dots, s$  sia

- $i_j$  il numero delle facce interne a  $C_0$  col contorno formato da  $j$  lati;
- $e_j$  il numero delle facce esterne a  $C_0$  col contorno formato da  $j$  lati.

Allora

$$(i_3 - e_3) + 2(i_4 - e_4) + 3(i_5 - e_5) + \dots + (s - 2)(i_s - e_s) = 0.$$

*Dimostrazione* – Chiamiamo *diagonali* di  $\mathcal{G}$  i lati che non appartengono a  $C_0$ .

Cominciamo a ragionare sulle facce interne a  $C_0$ , contandole in due modi diversi. Se ci sono  $d$  diagonali interne a  $C_0$ , le facce interne a  $C_0$  sono  $d + 1$ . Ma sono anche  $i_3 + i_4 + \dots + i_s$ . Dunque:

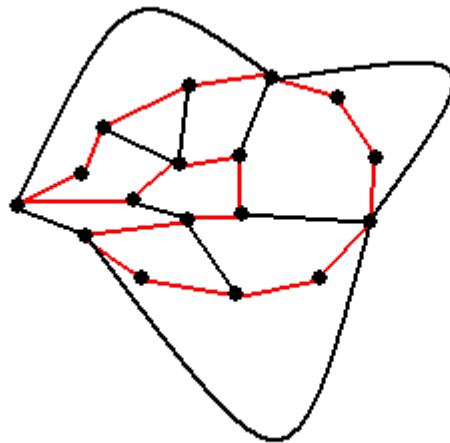
$$i_3 + i_4 + \dots + i_s = d + 1.$$

Ora contiamo in due modi diversi i lati delle facce interne a  $C_0$ . Se sommiamo i lati di tutte le facce, ottenendo  $3i_3 + 4i_4 + \dots + si_s$ , contiamo due volte ciascuna delle  $d$  diagonali interne a  $C_0$  e una volta sola ciascuno degli  $n$  lati di  $C_0$ ; dunque:

$$3i_3 + 4i_4 + \dots + si_s = 2d + n.$$

Sottraendo membro a membro da questa uguaglianza il doppio della precedente, otteniamo un'uguaglianza nella quale non compare più il numero  $d$  delle diagonali interne a  $C_0$ :

$$i_3 + 2i_4 + \dots + (s - 2)i_s = n - 2.$$



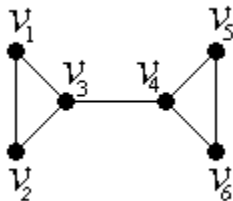
Possiamo ora ripetere lo stesso conteggio ragionando sulle facce esterne a  $C_0$ , sui loro lati e sulle diagonali esterne a  $C_0$ . Si ottiene che

$$e_3 + 2e_4 + \dots + (s - 2)e_s = n - 2$$

e infine, sottraendo membro a membro, si ha l'asserto.

**Esempio 6.3.3**

In questo grafo tutti gli  $i_j$  e tutti gli  $e_j$  sono nulli tranne per  $j = 3$  e  $j = 7$ ; inoltre, certamente  $i_7 = 0$  e  $e_7 = 1$ .



Se nel grafo ci fosse un ciclo hamiltoniano, per il teorema di Grinberg dovrebbe essere

$$(i_3 - e_3) + 5(-1) = 0$$

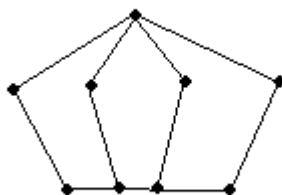
ossia

$$i_3 - e_3 = 5$$

assurdo perché la coppia  $(i_3, e_3)$  può assumere soltanto i valori  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 2)$ . Possiamo dunque concludere che il grafo non è hamiltoniano; ma allo stesso risultato saremmo potuti giungere ancor più facilmente usando il teorema 6.3.1 anziché il teorema 6.3.2 e osservando che il grafo non è 2-connesso (perché il grafo ottenuto sopprimendo, ad esempio,  $v_3$ , non è connesso).

**Esempio 6.3.4**

In questo grafo tutti gli  $i_j$  e tutti gli  $e_j$  sono nulli tranne per  $j = 5$  e  $j = 7$ ; inoltre, certamente  $i_7 = 0$  e  $e_7 = 1$ .



Se nel grafo ci fosse un ciclo hamiltoniano, per il teorema di Grinberg dovrebbe essere

$$3(i_5 - e_5) + 5(-1) = 0$$

ossia

$$3(i_5 - e_5) = 5$$

assurdo perché 3 non divide 5. Possiamo dunque concludere che il grafo non è hamiltoniano. Osserviamo che questa volta il teorema 6.3.1 non sarebbe stato di alcun aiuto perché il grafo proposto è 2-connesso.

## 6.4 - Il caso dei grafi con orientamento.

### Teorema 6.4.1

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo ottenuto da un grafo completo  $K_n$  assegnando un orientamento a ciascuno dei suoi lati. In  $\mathcal{G}$  esiste un cammino hamiltoniano.

*Dimostrazione* – Sia  $C_0$

$$v_0, \ell_1, v_1, \ell_2, \dots, v_{i-1}, \ell_i, v_i, \dots, v_{s-1}, \ell_s, v_s$$

un cammino di  $\mathcal{G}$  di lunghezza massima, e supponiamo per assurdo che  $C_0$  non sia hamiltoniano; sia  $v_\star$  un vertice di  $\mathcal{G}$  non appartenente a  $C_0$ . Proveremo che  $C_0$  si può prolungare (contro l'ipotesi che abbia lunghezza massima) inserendovi opportunamente  $v_\star$ .

Per ognuno dei vertici  $v_i$  che compaiono in  $C_0$  deve esistere un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_i, v_\star)$  oppure un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_\star, v_i)$ . Distinguiamo tre casi:

(a) per nessun valore di  $i$  esiste un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_\star, v_i)$ : allora esiste un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_s, v_\star)$ , quindi  $C_0$  può essere prolungato aggiungendo  $v_\star$  dopo  $v_s$ ;

(b) esiste un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_\star, v_0)$ : allora  $C_0$  può essere prolungato aggiungendo  $v_\star$  prima di  $v_0$ ;

(c) il minimo valore di  $i$  per il quale esiste un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_\star, v_i)$  è maggiore di 0: allora nessun lato di  $\mathcal{G}$  è incidente la coppia ordinata  $(v_\star, v_{i-1})$ , e quindi esiste un lato di  $\mathcal{G}$  incidente la coppia ordinata  $(v_{i-1}, v_\star)$ ; in questo caso  $C_0$  può essere prolungato inserendo  $v_\star$  tra  $v_{i-1}$  e  $v_i$ .

In ogni caso  $C_0$  può essere prolungato, e questo è assurdo perché lo abbiamo scelto di lunghezza massima. Pertanto a  $C_0$  appartengono tutti i vertici di  $\mathcal{G}$ , cioè  $C_0$  è un cammino hamiltoniano di  $\mathcal{G}$ .



## 7.- COLORAZIONI

### 7.1 - Colorazione di carte geografiche.

Gli stampatori di carte geografiche preferiscono usare colori diversi per regioni confinanti, in modo da renderle più facilmente distinguibili (due regioni si dicono confinanti se hanno in comune uno o più tratti di curva che non si riducono a un solo punto). L'esperienza di secoli ha convinto che qualsiasi carta geografica nel piano possa essere colorata (usando colori diversi per regioni confinanti) con al più quattro colori; ma la dimostrazione di questo fatto è tutt'altro che banale.

Iniziamo con un risultato abbastanza sorprendente.

#### Teorema 7.1.1

Sia  $\mathcal{C}$  una carta geografica che si possa disegnare tracciando, in una zona delimitata da una curva semplice chiusa, tratti di curve semplici che

- sono chiuse, oppure
- uniscono due punti del confine della zona.

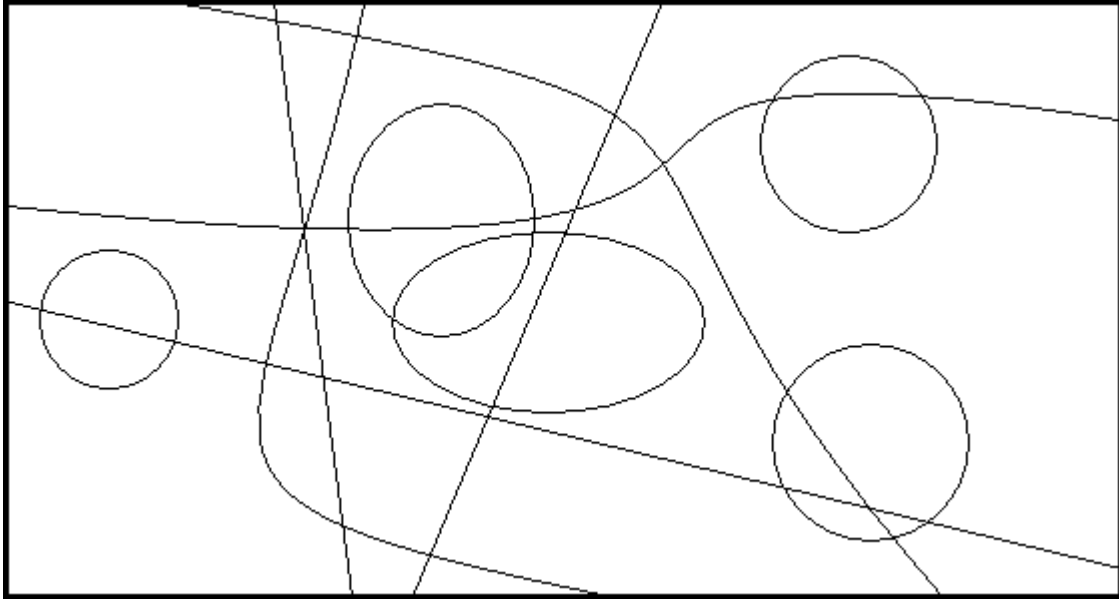
Allora  $\mathcal{C}$  può essere colorata (usando colori diversi per regioni confinanti) con due colori.

*Dimostrazione* – Diamo il semplice algoritmo di colorazione con due colori ( $r$  e  $b$ ). All'inizio coloriamo in  $r$  l'intera zona che ospita la carta geografica. Per ogni linea che si traccia per disegnare la carta geografica, operiamo come segue:

- se è una linea chiusa, cambiamo colore a tutte le regioni interne a tale linea chiusa;
- se è una linea che unisce due punti del confine della zona (e quindi la divide in due parti), cambiamo colore a tutte le regioni di una delle due parti (a nostra scelta).

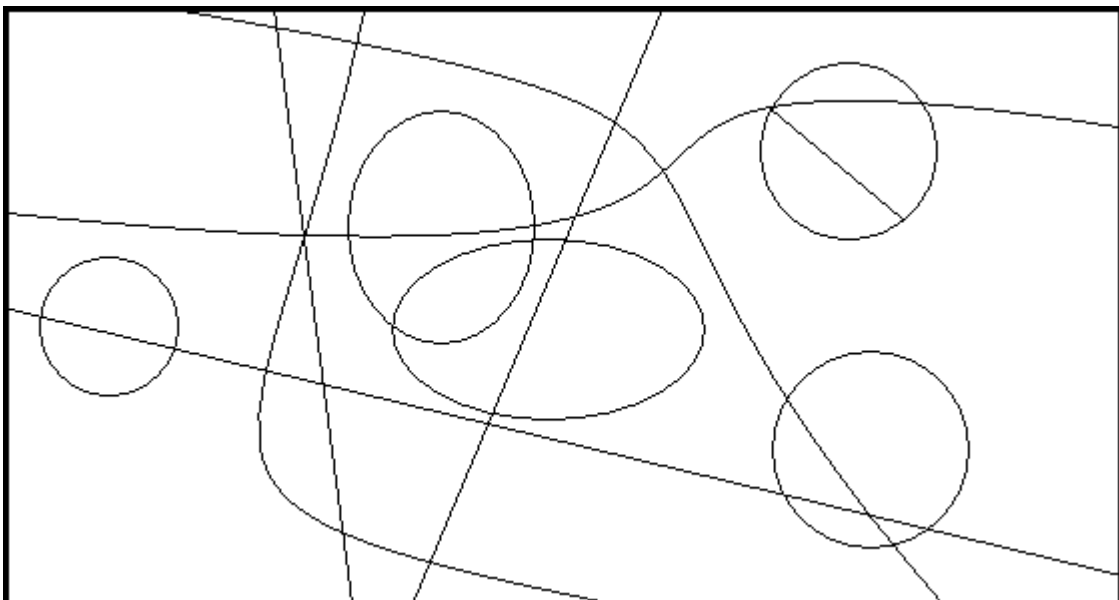
**Esempio 7.1.2**

Per colorare questa carta geografica (usando colori diversi per regioni confinanti) sono sufficienti due colori:



**Esempio 7.1.3**

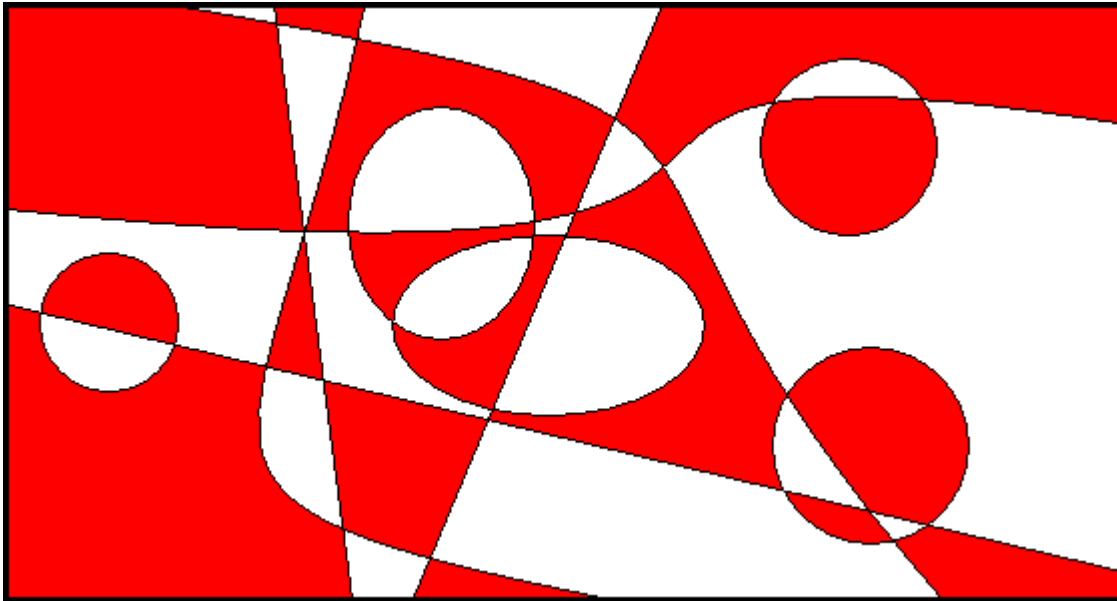
Per colorare questa carta geografica (usando colori diversi per regioni confinanti) due colori non bastano:





**Esempio 7.1.4**

La carta geografica dell'esempio 7.1.2 colorata in bianco e rosso:

**7.2 - Il grafo duale di un grafo disegnato nel piano.**

Noi dimostreremo che ogni carta geografica si può colorare (usando colori diversi per regioni confinanti) con al più cinque colori. Per far ciò, ricondurremo il problema di colorare le regioni di una carta geografica a quello di colorare i vertici di un grafo piano (senza orientamento) in modo che a vertici adiacenti vengano assegnati colori diversi.

Le regioni di una carta geografica  $\mathcal{C}$  si possono pensare come le facce interne di un grafo  $\mathcal{G}$  (senza orientamento) disegnato nel piano (senza sovrapposizione di lati) i cui vertici sono i punti di intersezione delle linee di confine mentre i lati sono i tratti di linea di confine compresi fra due vertici:  $\mathcal{G}$  si dirà il grafo associato alla carta geografica  $\mathcal{C}$ .

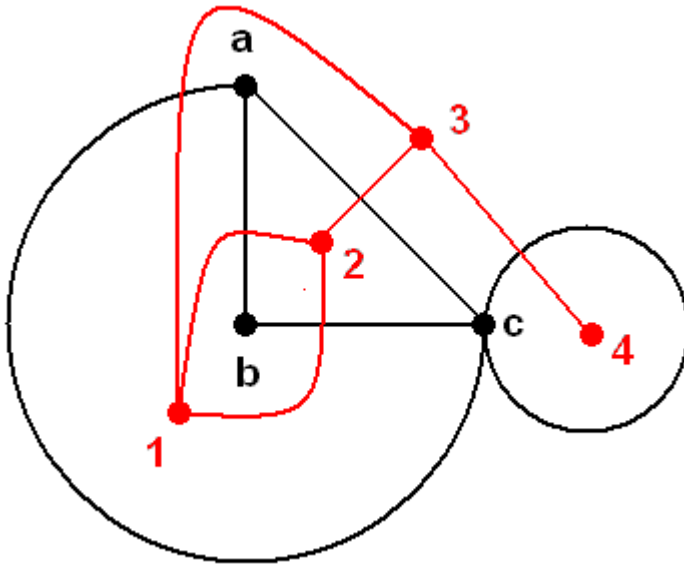
Ad ogni grafo  $\mathcal{G}$  senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati associamo un (multi)grafo (con cappi)  $\mathcal{G}^*$  senza orientamento (detto *duale* di  $\mathcal{G}$ ) disegnato nel piano come segue:

- per ogni faccia di  $\mathcal{G}$  (interna o esterna) scegliamo un punto, che sarà un vertice di  $\mathcal{G}^*$ ;
- per ogni linea di confine (compresa fra due vertici adiacenti di  $\mathcal{G}$ ) fra due facce di  $\mathcal{G}$ , disegniamo attraverso di essa un arco di curva semplice che unisce i vertici di  $\mathcal{G}^*$  corrispondenti a quelle due facce di  $\mathcal{G}$ : tale arco di curva semplice sarà un lato di  $\mathcal{G}^*$ .

Il (multi)grafo (con cappi)  $\mathcal{G}^*$  così costruito non è ovviamente determinato in modo univoco, ma è facile convincersi che tutti i duali di  $\mathcal{G}$  sono fra loro isomorfi. Inoltre, poiché  $\mathcal{G}$  è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati anche  $\mathcal{G}^*$  è disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati.

**Esempio 7.2.1**

Il grafo rosso (di vertici 1, 2, 3, 4) è duale del grafo nero (di vertici  $a, b, c$ ). Il grafo nero (di vertici  $a, b, c$ ) è duale del grafo rosso (di vertici 1, 2, 3, 4).



La situazione vista nell'esempio 7.2.1 è del tutto generale. Vale infatti il seguente

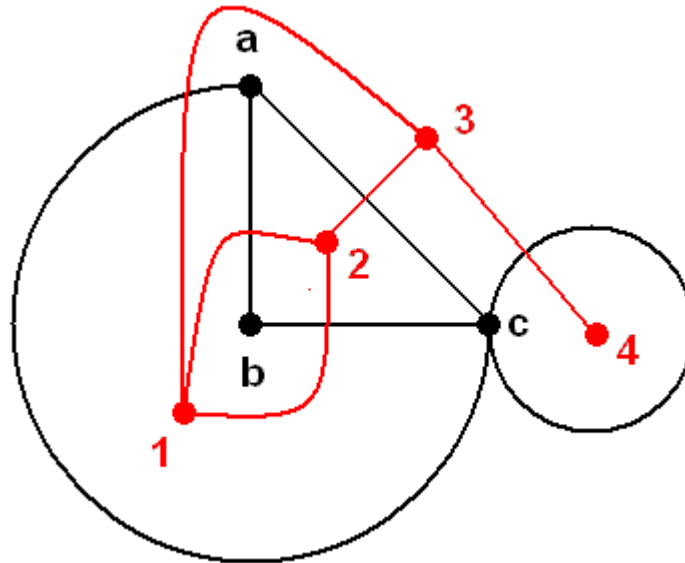
**Teorema 7.2.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento disegnato nel piano. Ogni grafo duale di qualsiasi grafo duale di  $\mathcal{G}$  è isomorfo a  $\mathcal{G}$ .

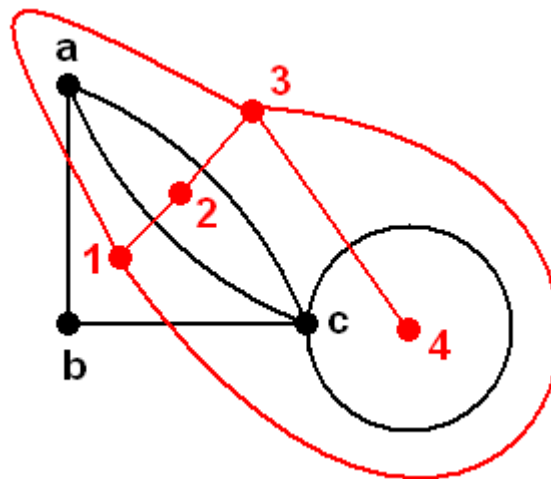
*Dimostrazione* – Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

**Osservazione 7.2.3**

Due duali di uno stesso grafo sono senz’altro isomorfi. Tuttavia, abbastanza sorprendentemente, grafi isomorfi possono avere duali non isomorfi. Sia  $\mathcal{G}_1$  il seguente grafo (in nero)



e sia  $\mathcal{G}_2$  il seguente grafo (sempre in nero, isomorfo a  $\mathcal{G}_1$ )



Nel duale di  $\mathcal{G}_1$  (in rosso) ogni vertice ha grado al più 3 (per la precisione: i vertici corrispondenti alle facce 1, 2 e 3 hanno grado 3 mentre il vertice corrispondente alla faccia 4 ha grado 1). Invece, nel duale di  $\mathcal{G}_2$  (sempre in rosso) il vertice corrispondente alla faccia 3 ha grado 4 (mentre i vertici corrispondenti alle facce 4, 2 e 1 hanno grado rispettivamente 1, 2 e 3). Dunque il duale di  $\mathcal{G}_1$  e il duale di  $\mathcal{G}_2$  non sono isomorfi!

### 7.3 - Colorazione dei vertici di un grafo.

Sia  $\mathcal{C} ( := \{c_1, c_2, \dots, c_k\} )$  un insieme finito (i cui elementi sono detti *colori*).

Se  $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{L}, \iota)$  è un grafo senza orientamento, si dice *colorazione dei vertici* di  $\mathcal{G}$  una qualsiasi funzione  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}$ . Una colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}$  si dice una *buona colorazione* se a vertici adiacenti assegna colori diversi.

#### Teorema 7.3.1

Sia  $n$  un numero intero positivo. Sono fatti equivalenti:

- (a) ogni grafo piano ammette una buona colorazione dei vertici con al più  $n$  colori;
- (b) ogni carta geografica nel piano si può colorare con al più  $n$  colori in modo che a regioni confinanti restino assegnati colori diversi.

*Dimostrazione* – Supponiamo che valga la (a). Sia  $\mathcal{C}$  una carta geografica nel piano, e sia  $\mathcal{G}_0$  il grafo associato a  $\mathcal{C}$ : allora  $\mathcal{G}_0$  è un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, e tale è anche un suo qualsiasi duale  $\mathcal{D}$ , nel quale vertici adiacenti corrispondono a regioni confinanti di  $\mathcal{C}$ . Per la (a), esiste una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{D}$  con  $m \leq n$  colori che può essere interpretata come una colorazione di  $\mathcal{C}$  con gli stessi  $m$  colori, nella quale a regioni confinanti restano assegnati colori diversi.

Viceversa, supponiamo che valga la (b). Sia  $\mathcal{G}$  un grafo piano, che possiamo supporre disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, e sia  $\mathcal{D}$  un suo duale: come si è osservato nella sez. 7.2, anche  $\mathcal{D}$  è un grafo disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati, quindi possiamo considerare la carta geografica  $\mathcal{C}$  le cui regioni sono le facce di  $\mathcal{D}$ : per la (b), tali regioni possono essere colorate con  $m \leq n$  colori in modo che a regioni confinanti restino associati colori diversi. Ma tale colorazione delle regioni di  $\mathcal{C}$ , cioè della facce di  $\mathcal{D}$ , dà luogo ad una buona colorazione dei vertici di ogni duale di  $\mathcal{D}$ ; e poiché qualsiasi duale di  $\mathcal{D}$  è isomorfo a  $\mathcal{G}$  (per il teorema 7.2.2) si è provato che  $\mathcal{G}$  ammette una buona colorazione dei vertici con  $m \leq n$  colori.

Il prossimo risultato prova, in base al teorema 7.3.1, che ogni carta geografica nel piano si può colorare con 5 colori in modo che a regioni confinanti restino assegnati colori diversi. In realtà, i matematici sono ormai convinti che 4 colori bastino: nel 1976 infatti lo statunitense Kenneth Appel (1932 – 2013) e il tedesco Wolfgang Haken (1928 – vivente) hanno ricondotto la dimostrazione di questo fatto a un alto, ma finito, elenco di casi particolari (1936) che sono stati poi uno a uno controllati con un elaboratore elettronico.

**Teorema 7.3.2**

Sia  $\mathcal{G}$  un grafo senza orientamento disegnato nel piano. Esiste una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}$  con al più 5 colori.

*Dimostrazione* – Procediamo per induzione sul numero dei vertici di  $\mathcal{G}$ . Possiamo supporre che  $\mathcal{G}$  sia semplice e senza cappi; dunque, per il corollario 4.2.5 esiste un vertice  $v_0$  di  $\mathcal{G}$  di grado al più 5.

Sia  $\mathcal{G}_0$  il grafo ottenuto da  $\mathcal{G}$  sopprimendo  $v_0$  e tutti i lati (al più 5) incidenti  $v_0$ . Per l'ipotesi di induzione, esiste una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}_0$  con al più 5 colori. Siano  $v_1, v_2, \dots, v_s$  i vertici adiacenti a  $v_0$  in  $\mathcal{G}$ : se  $s < 5$  o se comunque la buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}_0$  assegna a  $v_1, v_2, \dots, v_s$  meno di 5 colori, possiamo assegnare il quinto colore a  $v_0$  e ottenere così dalla buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}_0$  una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}$ : in questo caso non c'è altro da dimostrare.

Resta da considerare il caso in cui  $s = 5$  e la buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}_0$  assegna a  $v_1, v_2, \dots, v_5$  cinque colori distinti  $c_1, c_2, \dots, c_5$ . Supponiamo che i cinque lati di  $\mathcal{G}$  che hanno primo estremo in  $v_0$  e secondo estremo in  $v_1, v_2, \dots, v_5$  si susseguano proprio in quest'ordine in senso orario.

Sia  $\mathcal{G}_{1,3}$  il sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto dai vertici colorati con  $c_1$  e  $c_3$ , e sia  $\mathcal{G}_{1,3}^*$  la componente connessa di  $\mathcal{G}_{1,3}$  a cui appartiene  $v_1$ . Se  $v_3$  non è un vertice di  $\mathcal{G}_{1,3}^*$ , scambiando fra loro i colori  $c_1$  e  $c_3$  in tutti i vertici di  $\mathcal{G}_{1,3}^*$  si ottiene ancora una buona colorazione di  $\mathcal{G}_0$  nella quale però questa volta per i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_5$  si usano soltanto i colori  $c_2, c_3, c_4$  e  $c_5$  (infatti dopo lo scambio dei colori  $c_1$  e  $c_3$  al vertice  $v_1$  resta assegnato il colore  $c_3$ ); assegnando a  $v_0$  il colore  $c_1$  si ottiene dunque una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}$  con i colori  $c_1, c_2, \dots, c_5$ .

Resta da considerare il caso in cui  $v_3$  è un vertice di  $\mathcal{G}_{1,3}^*$ . In questo caso (per il teorema 2.1.2) c'è in  $\mathcal{G}_{1,3}^*$  (e quindi in  $\mathcal{G}_0$ ) un cammino semplice di estremi  $v_1$  e  $v_3$  i cui vertici sono colorati soltanto con  $c_1$  e  $c_3$ ; considerando anche i lati di estremi  $\{v_0, v_1\}$  e  $\{v_0, v_3\}$  si trova in  $\mathcal{G}$  un ciclo i cui vertici (a parte  $v_0$ ) sono colorati soltanto con  $c_1$  e  $c_3$ : il vertice  $v_2$  è interno a tale ciclo, mentre il vertice  $v_4$  è esterno a tale ciclo.

Sia allora  $\mathcal{G}_{2,4}$  il sottografo di  $\mathcal{G}$  indotto dai vertici colorati con  $c_2$  e  $c_4$ , e sia  $\mathcal{G}_{2,4}^*$  la componente connessa di  $\mathcal{G}_{2,4}$  a cui appartiene  $v_2$ . Il vertice  $v_4$  non può essere un vertice di  $\mathcal{G}_{2,4}^*$ , perché non ci può essere un cammino semplice di estremi  $\{v_2, v_4\}$  i cui vertici sono colorati soltanto con  $c_2$  e  $c_4$ : infatti, come si è osservato nel paragrafo precedente,  $v_2$  è interno e  $v_4$  è esterno a un ciclo i cui vertici (a parte  $v_0$ ) sono colorati soltanto con  $c_1$  e  $c_3$ .

Poiché  $v_4$  non può essere un vertice di  $\mathcal{G}_{2,4}^*$ , scambiando fra loro i colori  $c_2$  e  $c_4$  in tutti i vertici di  $\mathcal{G}_{2,4}^*$  si ottiene ancora una buona colorazione di  $\mathcal{G}_0$  nella quale però questa volta per i vertici  $v_1, v_2, \dots, v_5$  si usano soltanto i colori  $c_1, c_3, c_4$  e  $c_5$  (infatti dopo lo scambio dei colori  $c_2$  e  $c_4$  al vertice  $v_2$  resta assegnato il colore  $c_4$ ); assegnando a  $v_0$  il colore  $c_2$  si ottiene dunque una buona colorazione dei vertici di  $\mathcal{G}$  con i colori  $c_1, c_2, \dots, c_5$ , come si voleva dimostrare.

Esercizio 7.3.3

Qual è il minimo numero di colori con i quali si possono colorare le regioni della seguente carta geografica in modo che a regioni confinanti restino assegnati colori diversi?

