

Primo Compitino Sistemi Dinamici

24 Febbraio 2020

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa $m = 1$ è vincolato in modo liscio sull'asse delle x di un sistema di riferimento fissato. Il punto è soggetto alla forza elastica smorzata $\mathbf{F}_A = -2xe^{-x}\mathbf{e}_x$, con \mathbf{e}_x versore dell'asse x , e ad alla forza di allontanamento $\mathbf{F}_B = x^2e^{-x}\mathbf{e}_x$.

- (i) Calcolare l'energia potenziale complessiva $V(x)$ relativa alla forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$.
- (ii) A partire da $x(0) = 0$, determinare la velocità iniziale $\dot{x}(0) > 0$ in modo che il moto si inverta in $x = 1$ e tracciare la corrispondente orbita sul piano delle fasi (x, \dot{x}) (solo questa orbita), appurando che essa non è simmetrica rispetto all'asse \dot{x} , ovvero la retta $x = 0$.
- (iii) Sempre a partire da $x(0) = 0$, determinare le velocità iniziali $\dot{x}(0)$ affinché il moto sia limitato e non periodico. Anche in questo caso tracciare separatamente le corrispondenti orbite sul piano delle fasi.

Secondo esercizio

Un punto materiale P di massa m è soggetto simultaneamente alle forze centrali elastica $-\kappa r\mathbf{e}_r$ e newtoniana $-\frac{\gamma}{r^2}\mathbf{e}_r$, con κ e γ costanti positive, $r = |P - O|$, O centro del moto, \mathbf{e}_r versore radiale, cioè $\mathbf{e}_r = \frac{1}{r}(P - O)$.

- (i) Determinare l'energia potenziale efficace $V_{eff}(r)$ del moto, in corrispondenza dei dati iniziali $r(0) = r_0 > 0$ e $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 \neq 0$, con φ angolo che il raggio vettore $P - O$ forma con una direzione prefissata.
- (ii) Verificare che, nell'ipotesi $\dot{\varphi}_0^2 \leq \frac{\kappa}{m}$ non è possibile che il punto P percorra l'orbita circolare di raggio r_0 . Nell'ipotesi $\dot{\varphi}_0^2 > \frac{\kappa}{m}$ determinare il valore $r_0 > 0$ in modo che P percorra l'orbita circolare di raggio r_0 alla velocità angolare assegnata $\dot{\varphi}_0$.
- (iii) Evidenziare che, comunque si scelgano le condizioni iniziali r_0 e $\dot{\varphi}_0$, il moto di P è sempre limitato, ovvero r è compreso tra due valori $r_{min} > 0$ e $r_{max} \geq r_{min}$ (non da calcolarsi). Infine, nell'ipotesi aggiuntiva $\dot{r}(0) = 0$, mostrare che i due valori sono soluzioni dell'equazione

$$A(r^2 - r_0^2) - B\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + C\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) = 0$$

con A, B, C coefficienti da specificare in funzione di κ, γ, m, r_0 e $\dot{\varphi}_0$.

Domanda facoltativa, da svolgersi solo se si sono completati tutti i punti di entrambi gli esercizi.

Data la superficie di rotazione $\mathbf{x}(u, \theta) = (f(u) \cos \theta, f(u) \sin \theta, h(u))$, $f(u) > 0$, ed un punto vincolato in modo liscio su di essa soggetto alla sola forza peso $-mg\mathbf{e}_z$, scrivere la relazione che devono verificare $\dot{\theta}(0)$, f , h , f' , h' in $u(0)$ affinché P resti confinato sul parallelo $u = u(0)$. Facendo attenzione soprattutto a $f'(u(0))$ e a $h'(u(0))$ nella condizione scritta, tracciare il profilo locale di una superficie ed un parallelo $u(0)$ dove può avvenire il moto su di esso, il profilo locale di una superficie ed un parallelo $u(0)$ dove non può avvenire.

Tempo a disposizione: 2 ore.

SVOLGIMENTO

Primo Esercizio

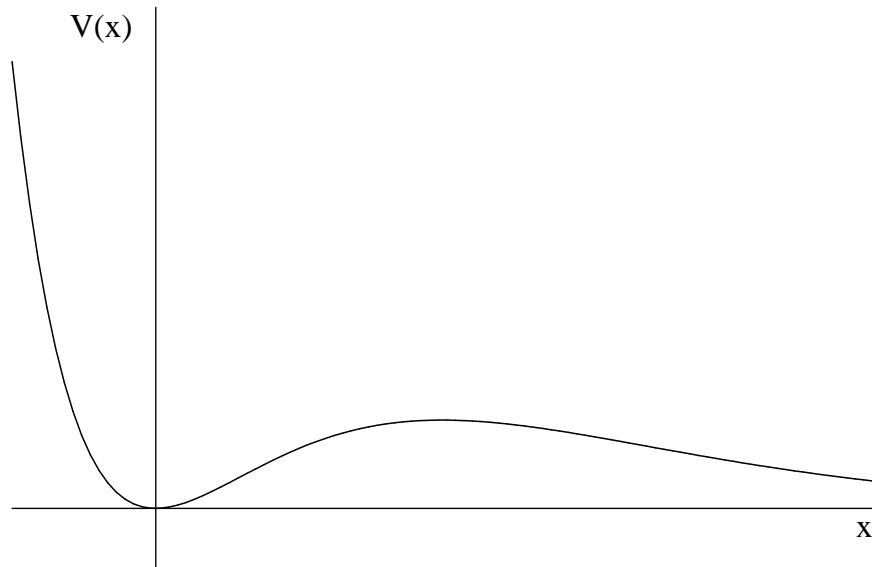
(i). Dobbiamo trovare la funzione $V(x)$ tale che

$$-V'(x) e_x = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B .$$

Banalmente

$$V(x) = - \int (x^2 e^{-x} - 2x e^{-x}) dx = x^2 e^{-x} .$$

(ii). L'energia potenziale $V(x)$ è sempre non negativa e presenta un minimo locale in $x = 0$, dove $V(0) = 0$ ed un massimo locale in $x = 2$, in cui $V(2) = 4e^{-2}$. Inoltre $V \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, $V \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, come mostrato dalla sottostante figura.



L'energia meccanica totale risulta costante per cui scriveremo

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + V(x) = E.$$

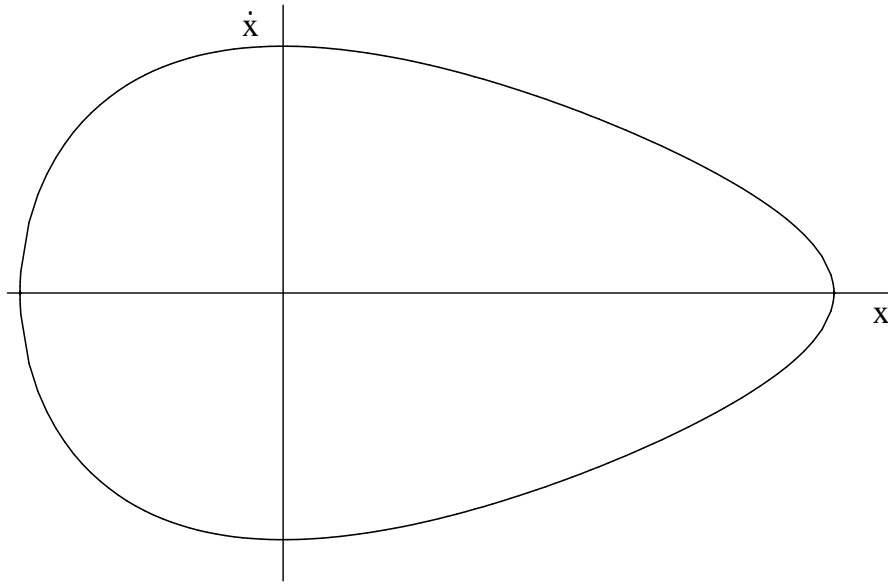
L'energia che compete al moto che parte da $x(0) = 0$ è

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2(0) + \underbrace{V(0)}_{=0} = \frac{1}{2} \dot{x}^2(0), \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2(0) = 2E. \quad (1)$$

Se vogliamo che l'inversione avvenga in $x = 1$, il grafico di $V(x)$ deve intersecare la retta orizzontale E in $x = 1$ (dove la corrispondente velocità si annulla). Avremo dunque

$$E = \frac{1}{2} \underbrace{\dot{x}^2(1)}_{=0} + V(1) = V(1) = e^{-1}.$$

Sostituendo nella (1) si ha $\dot{x}^2(0) = \frac{2}{e}$, ovvero $\dot{x}(0) = \pm\sqrt{\frac{2}{e}}$. L'orbita nel piano delle fasi (x, \dot{x}) è schematicamente rappresentata nella sottostante figura



La non simmetria dell'orbita rispetto all'asse \dot{x} , risulta con evidenza andando a calcolare V in $x = -1$. Si ha $V(-1) = e > 0$, quindi la seconda intersezione fra $V(x)$ e la retta $E = e^{-1}$ non avviene in $x = -1$ (punto simmetrico rispetto all'asse \dot{x} di $x = 1$). L'intersezione fra il livello $E = e^{-1}$ e $V(x)$ avviene infatti in un punto x compreso fra -1 e 0 . L'orbita quindi non può essere simmetrica.

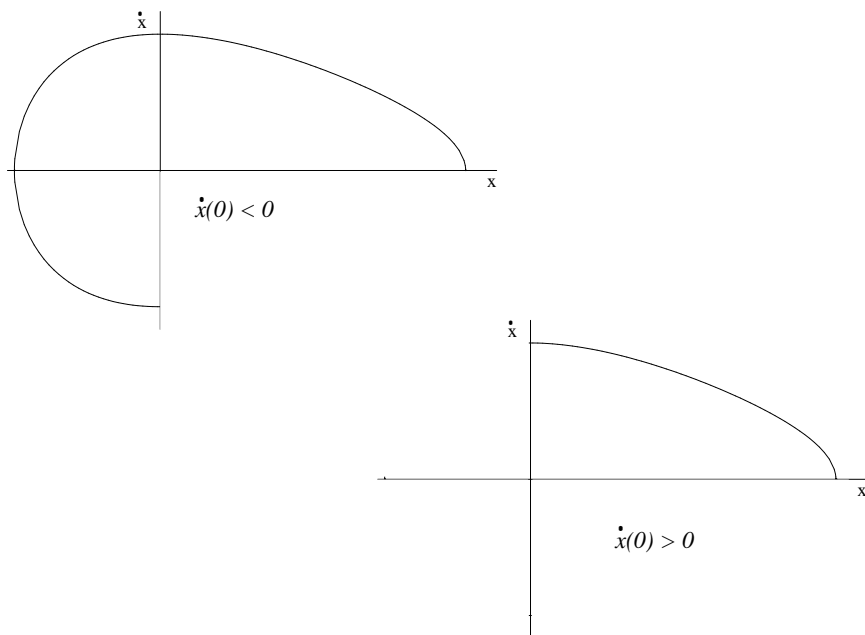
(iii). In questo caso vogliamo un moto limitato e aperiodico. Ciò può avvenire (ovvero moto limitato e senza inversione) solo se abbiamo un moto asintotico verso $x = 2$. In altri termini, facendo riferimento al grafico di $V(x)$, ciò vuol dire che il livello E deve “toccare” il grafico di $V(x)$ in corrispondenza del massimo relativo

$$E = V(2) = 4e^{-2}.$$

Di conseguenza se $x(0) = 0$, avremo

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2(0) + V(0) = V(2), \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2(0) = 8e^{-2},$$

e quindi $\dot{x}(0) = \pm\frac{2}{e}\sqrt{2}$.



Le due orbite, cioè quella corrispondente a $\dot{x}(0) = -\frac{2}{e}\sqrt{2}$ e quella corrispondente a $\dot{x}(0) = \frac{2}{e}\sqrt{2}$ sono tracciate separatamente nella precedente figura.

Secondo Esercizio

(i). L'energia potenziale relativa alle due forze è

$$V(r) = \frac{\kappa}{2}r^2 - \frac{\gamma}{r},$$

e funzione Lagrangiana è la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\kappa}{2}r^2 + \frac{\gamma}{r},$$

mentre la funzione Hamiltoniana è

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{\kappa}{2}r^2 - \frac{\gamma}{r}.$$

Ora, la variabile φ è ciclica per cui

$$mr^2\dot{\varphi} = mr_0^2\dot{\varphi}_0, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{r_0^2\dot{\varphi}_0}{r^2},$$

essendo r_0 e $\dot{\varphi}_0$ i dati iniziali. Sostituendo in \mathcal{H} , ricaviamo immediatamente l'energia potenziale efficace

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\kappa r^2 - \frac{\gamma}{r} + \frac{mr_0^4\dot{\varphi}_0^2}{2r^2}. \quad (2)$$

(ii). Dal momento che le orbite circolari corrispondono ai massimi/minimi di $V_{eff}(r)$ e di conseguenza agli zeri di

$$V'_{eff} = \frac{1}{r^3}(\kappa r^4 + \gamma r - mr_0^4\dot{\varphi}_0^2),$$

avremo un'orbita circolare per $r = r_0$, se $V'_{eff}(r_0) = 0$, cioè se

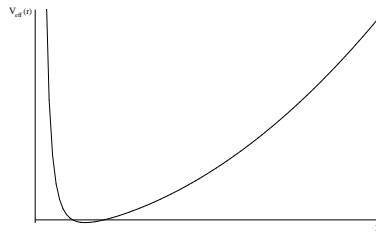
$$(\kappa - m\dot{\varphi}_0^2)r_0^4 + \gamma r_0 = r_0 [(\kappa - m\dot{\varphi}_0^2)r_0^3 + \gamma] = 0. \quad (3)$$

Siccome la (3) va risolta per $r_0 > 0$, è evidente che essa non ha soluzioni se $\kappa \geq m\dot{\varphi}_0^2$ e quindi non possono esistere orbite circolari di raggio r_0 se $\kappa \geq m\dot{\varphi}_0^2$. Viceversa se $m\dot{\varphi}_0^2 > \kappa$, allora l'equazione (3) ha la seguente soluzione

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{\gamma}{m\dot{\varphi}_0^2 - \kappa}}, \quad (4)$$

Quindi se $m\dot{\varphi}_0^2 > \kappa$ può esistere una sola orbita circolare di raggio r_0 . In particolare, l'espressione di r_0 in funzione della velocità angolare iniziale $\dot{\varphi}_0$, è data dalla (4).

(iii). Studiando l'andamento di $V_{eff}(r)$ per $r > 0$, abbiamo $\lim_{r \rightarrow 0^+} V_{eff} = \lim_{r \rightarrow +\infty} V_{eff} = +\infty$, ovvero $V_{eff}(r)$ ha un andamento schematizzabile come in figura



Di conseguenza, dato un qualsiasi livello E (maggiore del minimo di V_{eff}) potremo avere solo moti limitati, compresi fra r_{\min} e r_{\max} . L'equazione per determinare r_{\min} e r_{\max} , assumendo $\dot{r}(0) = 0$, è la seguente

$$V_{eff}(r) = E = \frac{m}{2} \underbrace{\dot{r}^2(0)}_{=0} + \frac{m}{2} r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \frac{\kappa}{2} r_0^2 - \frac{\gamma}{r_0},$$

ovvero, ricordando la (2),

$$\frac{1}{2} \kappa r^2 - \frac{\gamma}{r} + \frac{m r_0^4 \dot{\varphi}_0^2}{2 r^2} = \frac{m}{2} r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \frac{\kappa}{2} r_0^2 - \frac{\gamma}{r_0},$$

che possiamo così riscrivere

$$\underbrace{\frac{1}{2} \kappa (r^2 - r_0^2)}_A - \underbrace{\frac{\gamma}{r}}_B \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\varphi}_0^2 r_0^4}_{C} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = 0.$$