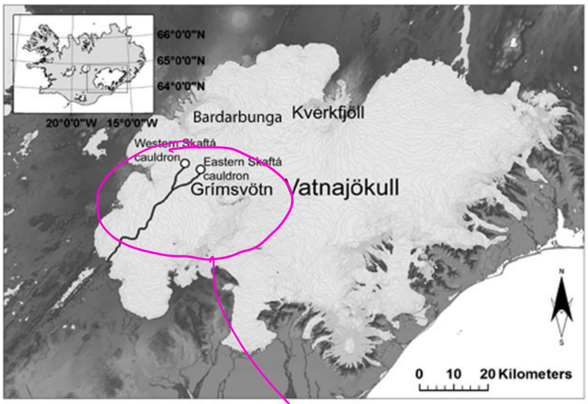
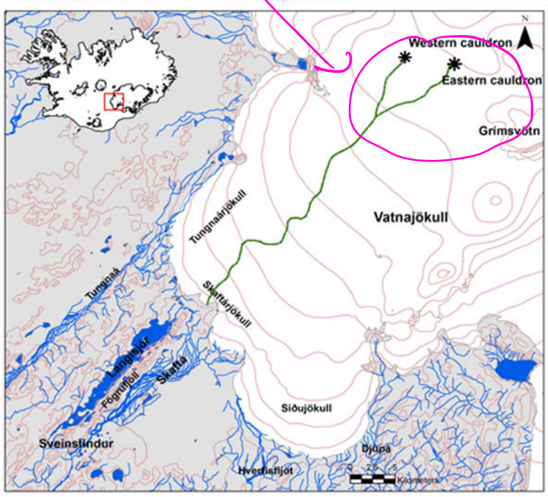


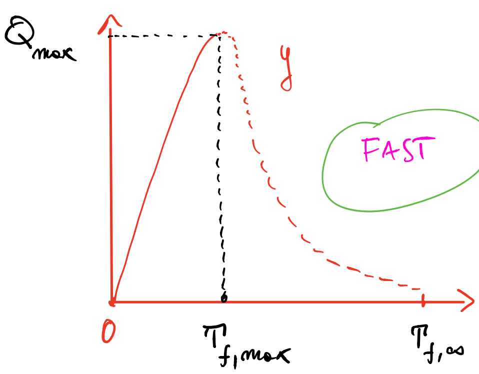
MAGGIOR GHIACCIAIO IN ISLANDA

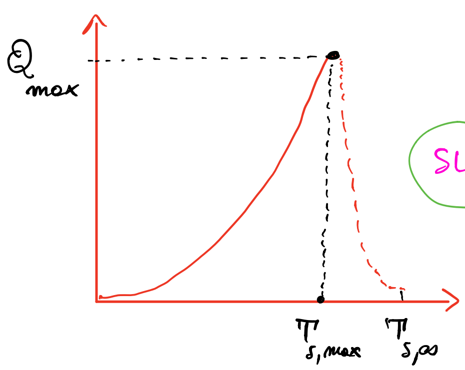


JÖKULHLAUP : alluvione subglaciale

2 TIPI DI IDROGRAFE

Q in m^3/s , T in giorni





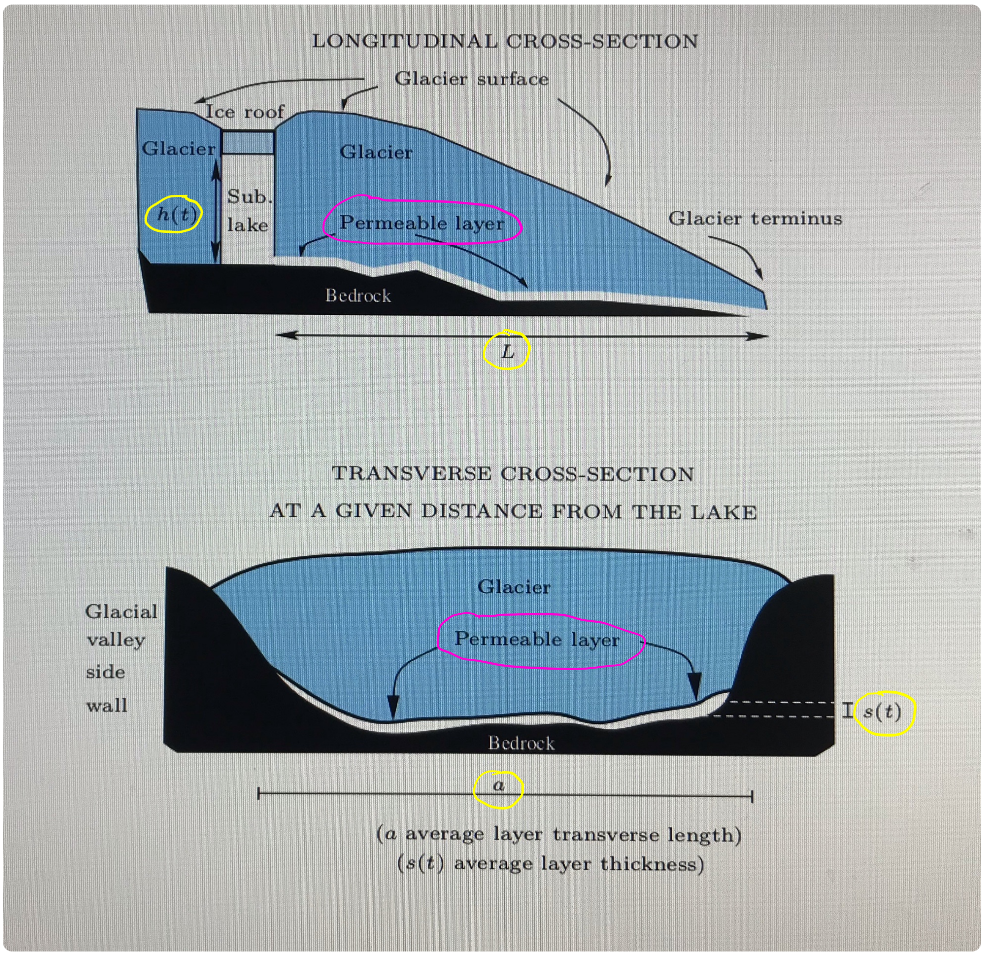
Le diverse caratteristiche in sintesi

FAST	SLOW
$Q'' = \begin{cases} \simeq 0 & \text{per } T < T_{max} \\ > 0 & \text{" } T \in (T_{max}, T_\infty) \end{cases}$	$Q'' = \begin{cases} > 0 & \text{per } T < T_{max} \\ \simeq 0 & \text{per } T \in (T_{max}, T_\infty) \end{cases}$
$T_\infty < 7$ giorni	$T_\infty \simeq 30$ giorni
$T_{max} \simeq 1 \div 2$ giorni	$T_{max} \cong 7 \div 10$ giorni
$Q_{max} \simeq 1000 \div 2000$	$Q_{max} \simeq 10000 \div 20000$

Un'altra differenziazione consiste nel fatto che nel caso slow il drenaggio appare dovuto alla formazione di canali subglaciali il cui diametro si allarga per attrito e fusione del ghiaccio. Nel caso fast il drenaggio appare associato al "sollevamento" di una grande porzione di ghiacciaio.

GEOMETRIA (vedi figura)

J.3



DOMANDA: Come si scarica l'acqua sotto il ghiacciaio?

Ipotesi:

1) La regione fra il letto roccioso e la base del ghiacciaio è un mezzo poroso

2) Il regime è turbolento (non vale la legge di Darcy)

L'ipotesi 2 è giustificata dal fatto che l'efflusso di grandi quantità di acqua ($\simeq 10^9\ m^3$) avviene in poco tempo ($\simeq$ 5÷6 giorni)

Ipotizziamo la seguente legge per esprimere il legame fra la portata istantanea globale $Q(t)$, sezione trasversale istantanea $S(t)$ e il gradiente di pressione $\frac{\Delta p}{L}$ dovuto all'acqua nel lago:

$$Q^2(t) = \frac{S^{8/3}(t)}{\rho_w g K} \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho_w g \sin\theta \right) \qquad (1)$$

ρ_w densità dell'acqua, g accelerazione di gravità, θ pendenza media del letto, L lunghezza longitudinale (vedi figura) e K è una costante dipendente sia dalla viscosità (dell'acqua) che dalla permeabilità del mezzo poroso.

La (1) è una legge di tipo sperimentale: dice che

$$Q \text{ cresce come } S^{4/3} \text{ e con } \Bigg(\underbrace{\frac{\Delta p}{L} + \rho_w g \sin\theta}_{\text{testa idraulica}} \Bigg)^{1/2}$$

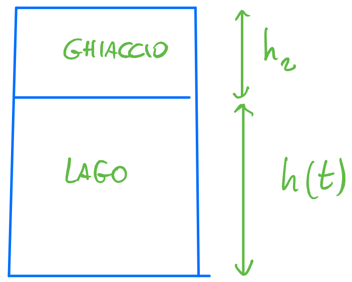
mentre è inversamente proporzionale a $K^{1/2}$. Notiamo che sperimentalmente Q cresce con la permeabilità e decresce con la viscosità, ovvero $1/K$ è ragionevolmente proporzionale al rapporto κ/μ dove κ è la permeabilità e μ la viscosità.

Pressione dell'acqua: supponiamo che valga un profilo lineare in x

$$p(x,t) = p_{in}(t) - \frac{\Delta p(t)}{L} x + \cancelto{0}{p_{atm}} \qquad (2)$$

per cui $\Delta p(t) = p_{in}(t) - p(L,t)$.

Il valore di $p_{in}(t)$ è dettato dal contenuto d'acqua nel lago e dal peso del tetto di ghiaccio



$$p_{in}(t) = \rho_w g\, h(t) + \rho_i h_2$$

$$= \rho_w g \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2 \right) \qquad (3)$$

Assumiamo anche

$$\Delta p(t) = p_{in}(t)\left(1 - e^{-s(t)/s_c}\right) \qquad (4)$$

dove s_c è uno spessore caratteristico.

Notiamo che $\quad s(t) \ll s_c \quad \Rightarrow \quad \Delta p(t) \simeq 0$

e la pressione nel mezzo permeabile è ovunque uguale a quella presente alla base del lago. Al contrario, se $s(t) \simeq s_c$

$$\Delta p(t) \simeq p_{in}(t)\left(1 - \tfrac{1}{e}\right) \qquad \left(\simeq 65\% \text{ di } p_{in}(t)\right)$$

In questo caso $\dfrac{\Delta p}{L} \longrightarrow \dfrac{p_{in}}{L}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, e quindi (con $p_{atm} = 0$)

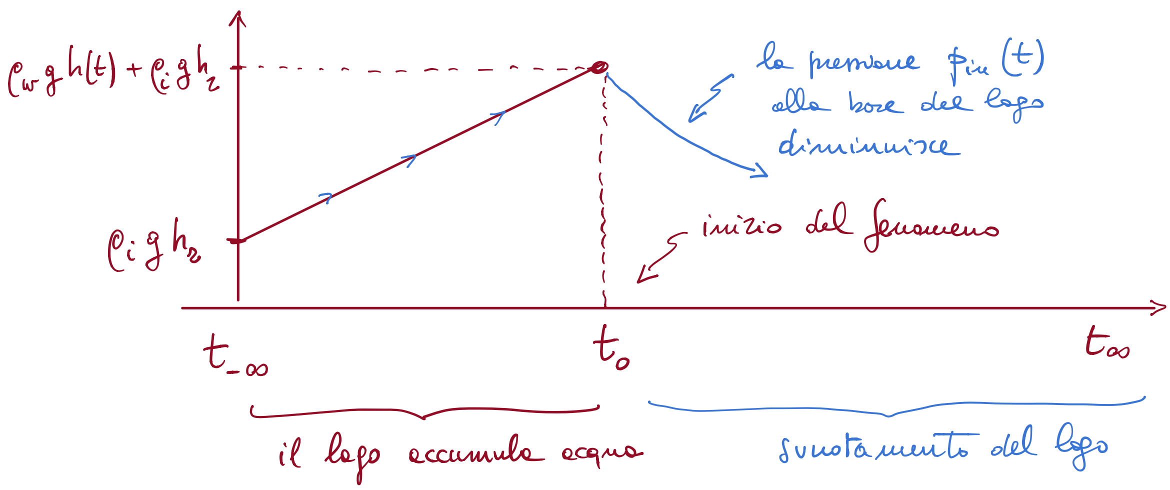
$$p(x,t) \cong p_{in}(t)\left(1 - \frac{x}{L}\left(1 - \frac{1}{e}\right)\right)$$

In sintesi:

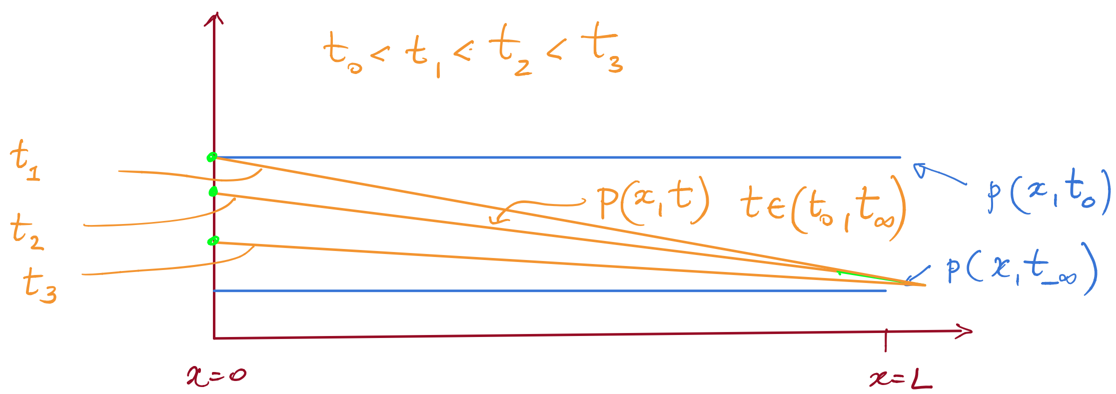
1. Fino a quando il fenomeno non ha inizio, la pressione dovuta all'acqua presente nel mezzo poroso è uniforme ma non sufficiente a sollevare il ghiacciaio sovrastante

2. Non appena il fenomeno ha inizio la pressione assume il profilo classico di un moto completamente sviluppato del tipo di quello di un moto di Couette fra piani.

Vediamo il comportamento della pressione in $x=0$ al variare di t:



Vediamo il comportamento lungo x al variare di t:



Sotto queste ipotesi possiamo riscrivere

$$Q^2(t) = \frac{S^{8/3}(t)}{L\,K}\left[\left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2\right)\left(1 - e^{s(t)/s_c}\right) + d\right] \quad (5)$$

dove $\quad d = L \sin\vartheta .$

Chiaramente $s(t)$ e $h(t)$ sono funzioni incognite: dobbiamo scrivere le leggi di bilancio per queste due grandezze in modo da descrivere sia la fase di svuotamento (t_0, t_∞) sia la fase di ricarica $(t_{-\infty}, t_0)$.

OSSERVAZIONI : vi sono molti dati disponibili per il lago subglaciale sottostante la caldera orientale dello Skafta nel ghiacciaio Vatnajöckull in Islanda. Questi dati mostrano che

$(t_0, t_\infty) \simeq 1$ settimana (svuotamento)

$(t_{-\infty}, t_0) \simeq 2 \div 3$ anni (ricarica)

Si tratta cioè di un fenomeno praticamente periodico. Inoltre

$$Q_{max} \simeq 10^3 \ m^3/s$$

$$Q_{tot} = \int_{t_0}^{t_\infty} Q(t) \simeq 2 \div 300 \ Gl \quad \left(\text{cioè } 2 \div 3 \times 10^8 \ m^3\right)$$

$\left(1 \ Gl = 10^6 \ m^3\right)$

Sono inoltre noti i seguenti dati

d (dislivello da $x=0$ a $x=L$) $\simeq 550$ m

A (area del lago) $\simeq 3 \div 4$ Km^2

$\overline{H}$ (spessore <u>medio</u> del ghiacciaio) $\simeq 470$ m

h_2 (spessore del tetto di ghiaccio sul lago) $\simeq 400$ m

h_0 (livello del lago all'inizio dello svuotamento) $\simeq 100$ m

<u>Equazioni di bilancio</u> : definiamo

$$\overline{H} = \frac{1}{L} \int_0^L H(x)\, dx$$

dove $H(x)$ è lo spessore del ghiaccio in $(0, L)$.

Le forze che agiscono sul ghiacciaio sono

(a) <u>peso del ghiaccio</u> : $\underbrace{\rho_i\, g \cos\theta}_{\text{peso specifico}} \cdot \underbrace{L a \overline{H}}_{\text{Volume}}$

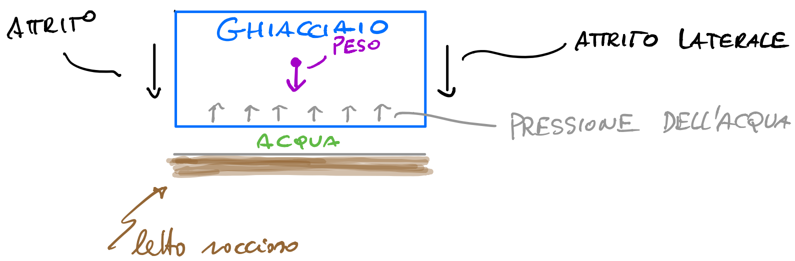
dove θ è la pendenza media del letto roccioso

(b) <u>pressione esercitata dall'acqua sul fondo del ghiacciaio</u>:

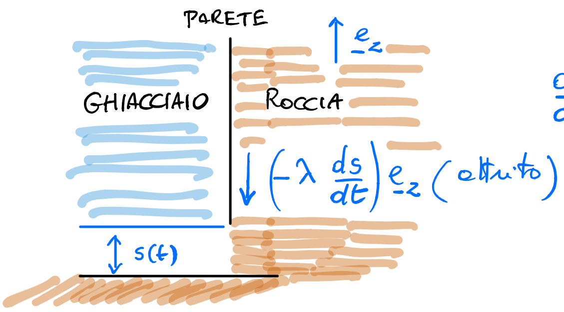
$$a \int_0^L p(x,t)\, dx$$

(c) <u>Attrito dinamico laterale</u> : $\lambda \dfrac{ds}{dt} \qquad (\lambda > 0) \qquad (6)$

dove λ è il coefficiente d'attrito.



L'attrito laterale contrasta la spinta generata dalla pressione:



$\frac{ds}{dt} > 0$ (il canale si allunga: il ghiacciaio si muove in direzione e_z)

Trascuriamo la forza d'inerzia: $\rho_i \ddot{s} \simeq 0$

Allora il bilancio di forza è

$\rho_i \sim 10^3$, $s \simeq 1\,m$
$t_{ng} \simeq 2 \div 3\, d = 2 \times 8 \times 10^4\, s$
$\rho_i \ddot{s} \simeq 0$!

$$a L \bar{H} \rho_i g \cos\theta + \lambda \dot{s} = a \int_0^L p(x,t)\, dx \qquad (7)$$

Nota Bene: sia il letto roccioso che i ghiacciaio sono supporti RIGIDI (cioè indeformabili). La (7) non è altro che la legge di Newton per il moto del ghiacciaio dove s è l'unica coordinata lagrangiana

Anche la legge (7), come le (2)-(3)-(4), non sono dettate da altre motivazioni se non quella di scrivere un modello matematico il più semplice possibile ma in grado di interpretare i risultati sperimentali.

Inseriamo la (2) nella (7): innanzitutto

$$\int_0^L p(x,t)\,dx = \int_0^L \left\{ p_{in}(t) - \frac{\Delta p(t)}{L}\, x \right\} dx =$$

$$= p_{in}(t)\, L - \frac{\Delta p(t)\, L}{2} =$$

$$= p_{in}(t)\, L \left(1 - \frac{1}{2}\left(1 - e^{-s(t)/s_c}\right)\right) =$$

$$= \rho_w g \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2\right) \frac{L}{2} \left(1 + e^{-s(t)/s_c}\right)$$

Dalla (7) segue allora

$$\dot{s} = \frac{aL}{2\lambda} \rho_w g \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2\right)\left(1 + e^{-s(t)/s_c}\right)$$

$$- \frac{aL\bar{H}}{\lambda} \rho_i g \cos\theta \iff$$

$$\dot{s} = \frac{aL\rho_w g}{\lambda} \left[\left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_2\right) \frac{1 + e^{-s(t)/s_c}}{2} - \bar{H} \frac{\rho_i}{\rho_w} \cos\theta \right] \quad (8)$$

L'equazione che determina l'evoluzione di $h(t)$ è quella della conservazione di volume.

Supponiamo che il volume d'acqua presente nel lago al tempo t sia descritto da

$$V(t) = A\,h(t)$$

con A costante.

Allora necessariamente il bilancio di massa richiede che

$$\frac{d}{dt}\Big(A\,h(t)\Big) = -\,Q(t) + Q_{in} \qquad (9)$$

dove $Q(t)$ è la portata istantanea in uscita e Q_{in} è il contributo in entrata (dovuto a attività geotermale, percolazione di acque meteoriche ecc.) ad andamento costante nel tempo.

E' possibile stimare Q_{in} in base ai dati osservati:

evento	T (giorni)	Q_{cum} (Gl)
1982-84	949	336
1984-86	826	239
1986-89	957	279
1989-91	747	219

T = tempo trascorso fra un evento e il successivo = periodo di ricarica

Q_{cum} = portata cumulativa associata all'evento = quantità totale di acqua scaricata dal lago durante l'evento

Possiamo supporre ragionevolmente

$$Q_{cum} \cong Q_{in} T$$

e quindi

EVENTO	T (in secondi)	Q_{cum} (in m^3)	Q_{in} (in m^3/s)
1	$82 * 10^6$	$3.36 * 10^8$	4
2	$71 * 10^6$	$2.39 * 10^8$	3.36
3	$82.5 * 10^6$	$2.79 * 10^8$	3.38
4	$64.5 * 10^6$	$2.19 * 10^8$	3.39

OSSERVAZIONE: durante ogni singolo evento $Q_{max} \simeq 10^3\ m^3/s$ per cui è ragionevole assumere

$$A\dot{h} \cong -Q(t) \qquad \text{durante l'evento} \tag{10}$$

e

$$A\dot{h} \cong Q_{in} \qquad \text{fra due eventi consecutivi} \tag{11}$$

Comunque, per il momento, facciamo riferimento alla (9).

Inserendo la (1) nella (9) e tenendo conto della (2)-(3)-(4) si ha

$$\dot{h} = -\frac{1}{A}\left[\frac{S^{8/3}(t)}{\rho_w g K}\left(\frac{\Delta p}{L} + d\right)\right]^{1/2} + \frac{Q_{in}}{A}$$

$$= -\frac{1}{A}\left\{\frac{S^{8/3}(t)}{\rho_w g K}\left[\frac{p_{in}(t)}{L}\left(1 - e^{-s(t)/s_c}\right) + d\right]\right\}^{1/2} + \frac{Q_{in}}{A}$$

ADIMENSIONALIZZAZIONE

$$s^* = \frac{s}{s_{ref}} \quad , \quad h^* = \frac{h}{h_{ref}} \quad , \quad t^* = \frac{t}{t_{ref}} \quad , \quad Q^* = \frac{Q}{Q_{ref}}$$

dove le scale "ref" sono da scegliersi opportunamente.

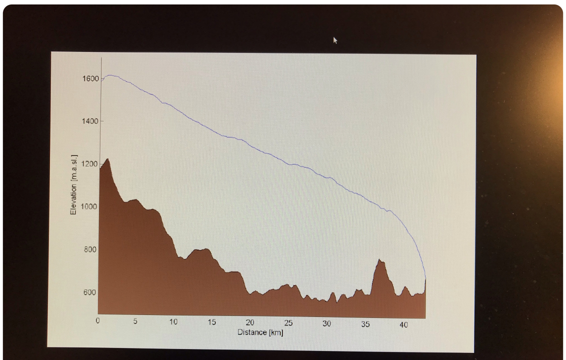
Nello studio del singolo evento t_{ref} è identificabile come il tempo di durata della piena.

Per quanto riguarda h_{ref} deve essere confrontabile, ad esempio, con lo spessore medio del ghiacciaio.

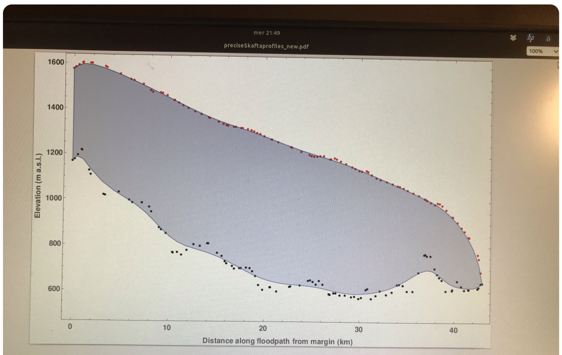
Scegliamo

$$h_{ref} = \frac{\rho_i}{\rho_w} \overline{H} \qquad (12)$$

Se si dispone dei profili digitalizzati del ghiacciaio e della sua base, $\overline{H}$ è immediatamente calcolabile



PROFILI REALI



PROFILI DIGITALIZZATI

Nel caso dello Skaftarjökull si trova

$$\bar{H} = \frac{1}{L} \int_0^L H(x)\, dx \cong 470 \ m$$

Per quanto riguarda Q_{ref} usiamo la conservazione di massa

$$Q_{ref} = \frac{A\, h_{ref}}{t_{ref}} \qquad (13)$$

Per lo Skaftarjökul si stima $A \simeq 3 \ Km^2$. Con $t_{ref} \cong 1$ settimana si ha

$$Q_{ref} = \frac{(3 * 10^6 \ m^2) \cdot (0.9 * 470)}{7 \cdot 24 \cdot 3600} \cong 3 * 10^3 \ \frac{m^3}{s}$$

valore assolutamente confrontabile con le massime portate osservate in tutti gli eventi associati allo Skaftarjökul.

Finite le scale, possiamo riscrivere il sistema di equazioni per s ed h in forma adimensionale

Per semplicità di scrittura evitiamo l'uso dell' "*" nelle variabili adimensionali.

Equazione per $s(t)$ (dimensionale)

$$\dot{s} = \frac{a L \rho_w g}{\lambda} \left[\left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} h_z \right) \frac{1 + e^{-s(t)/s_c}}{2} - \bar{H} \frac{\rho_i}{\rho_w} \cos\theta \right]$$

$$\frac{s_{ref}}{t_{ref}} \dot{s} = \frac{a L \rho_w g}{\lambda} \left[h_{ref} \left(h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{h_z}{h_{ref}} \right) \left(\frac{1 + \exp\left(-\frac{s_{ref}}{s_c} s(t)\right)}{2} \right) - \bar{H} \frac{\rho_i}{\rho_w} \cos\theta \right]$$

$$\bar{H} \frac{h_{ref}}{h_{ref}}$$

$$\left(\frac{s_{ref}}{t_{ref}} \cdot \frac{\lambda}{a L \rho_w g h_{ref}} \right) \dot{s} = \left(h + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{h_z}{h_{ref}} \right) \left(\frac{1 + \exp\left(-\frac{s_{ref}}{s_c} s\right)}{2} \right) - \frac{\bar{H}}{h_{ref}} \frac{\rho_i}{\rho_w} \cos\theta$$

$= 1$ in base alla (12)

Poniamo

$$\left(\frac{s_{ref}}{t_{ref}} \cdot \frac{\lambda}{a L \rho_w g h_{ref}} \right) = \frac{1}{\alpha} \quad , \qquad \frac{s_{ref}}{s_c} = \frac{1}{\gamma}$$

dove $[\alpha] = [\gamma] = 1$ (cioè sono adimensionali)

e introduciamo una nuova variabile

$$z(t) = h(t) + \frac{\rho_i}{\rho_w} \frac{h_z}{h_{ref}} = h(t) + \frac{h_z}{\bar{H}}$$

dove abbiamo usato la (12).