Appendice 1
Problemi riepilogativi sulle variabili aleatorie

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 28 Febbraio 2019

Problema 1 (Media e varianza di distribuzione uniforme) - Si dimostri che una variabile aleatoria X distribuita uniformemente nell'intervallo $[a, b]$, i.e. $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$, ha media $m_X = (a + b)/2$ e varianza $\sigma_X^2 = (b - a)^2/12$.

Problema 2 (Trasformazione di una variabile aleatoria uniforme mediante "zona morta") - Si consideri una variabile aleatoria $U \sim \mathcal{U}_{[-\alpha,\alpha]}$ e si applichi ad essa la seguente *non linearità statica* $D_z(\cdot)$ detta *zona morta (deadzone)*:

$$Y = D_z(U) \triangleq \begin{cases} u, & |u| > \varepsilon \\ 0, & |u| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Assumendo $\varepsilon < \alpha$, determinare la PDF $f_Y(\cdot)$ di $Y = D_z(U)$ verificando che

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{2\alpha}\,\left[1(y+\alpha) - 1(y+\varepsilon)\right] \;+\; \frac{\varepsilon}{\alpha}\,\delta(y) \;+\; \frac{1}{2\alpha}\,\left[1(y-\varepsilon) - 1(y-\alpha)\right]$$

dove $\delta(\cdot)$ e $1(\cdot)$ rappresentano l'impulso e, rispettivamente, il gradino unitario.

Problema 3 (Quadrato di una variabile aleatoria uniforme) - Sia $Y = X^2$ dove $X \sim \mathcal{U}_{[-\delta,\delta]}$. Determinare la PDF $f_Y(\cdot)$ di Y verificando che:

$$f_Y(y) \;=\; \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ o } y > \delta^2 \\ \dfrac{1}{2\delta\sqrt{y}}, & 0 \leq y \leq \delta^2. \end{cases}$$

Problema 4 (Somma di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite) - Siano X_1 e X_2 variabili aleatorie uniformemente distribuite in $[-\delta, \delta]$, cioè

$X_i \sim \mathcal{U}_{[-\delta,\delta]}$ per $i = 1, 2$, determinare la PDF $f_Y(\cdot)$ di $Y = X_1 + X_2$ verificando che tale PDF ha la seguente forma triangolare:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{4\delta^2} \left[\min(\delta, y+\delta) - \max(-\delta, y-\delta) \right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4\delta^2} (2\delta - y), & 0 \le y \le 2\delta \\ \frac{1}{4\delta^2} (2\delta + y), & -2\delta \le y \le 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si iteri il procedimento al calcolo della PDF di Y, somma di $n = 3$ e $n = 4$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite $X_i \sim \mathcal{U}_{[-\delta,\delta]}$.

Problema 5 (Trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane) - La variabile aleatoria bidimensionale $X = [R, \Theta]'$ descrive la posizione di un oggetto in coordinate polari mentre $Y = [R\ cos\ \Theta, R\ sin\ \Theta]'$ descrive la posizione del medesimo oggetto in coordinate cartesiane. Assumendo che R e Θ sono indipedenti e marginalmente Gaussiane con $R \sim (m_R, \sigma_R^2)$ e $\Theta \sim (m_\Theta, \sigma_\Theta^2)$, determinare la PDF $f_Y(\cdot)$ di $Y = [Y_1, Y_2]'$.

Problema 6 (PDF della somma di variabili aleatorie indipendenti) - Dimostrare che alla somma di variabili aleatorie indipendenti corrisponde la convoluzione delle rispettive PDF. Si suggerisce di procedere nel seguente modo: data la v.a. $[X_1, X_2]'$ con X_1 e X_2 indipendenti, si consideri la v.a. $[Y_1, Y_2]' = [X_1 + X_2, X_2]$ e si valuti la PDF congiunta $f_{Y_1,Y_2}(\cdot)$, da cui si determini successivamente la PDF marginale $f_{Y_1}(\cdot)$ che è proprio la desiderata PDF della somma $Y_1 = X_1 + X_2$.

Problema 7 (PDF relative al modello di osservazione $Y = h(X) + V$) - Si consideri il modello di osservazione $Y = h(X) + V$ con X (variabile da stimare) e V (rumore di osservazione) indipendenti. Date le PDF $f_X(\cdot)$ e $f_V(\cdot)$, determinare la PDF congiunta $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$, la PDF marginale $f_Y(\cdot)$ e le PDF condizionate $f_{X|Y}(\cdot|y)$ e $f_{Y|X}(\cdot|x)$. Si suggerisce di procedere nel seguente modo: data la v.a. $[X', V']'$ con X e V indipendenti, si consideri la v.a. $[X', Y']'$ e si valuti la PDF congiunta $f_{X,Y}(\cdot,\cdot)$; da tale PDF congiunta si determinino poi la PDF marginale $f_Y(\cdot)$ e le PDF condizionate $f_{X|Y}(\cdot|y)$ e $f_{Y|X}(\cdot|x)$ mediante definizione.

Problema 8 (Condizionamento di variabili aleatorie Gaussiane) - Data l'osservazione $Y = X + V$, con errore di osservazione $V \sim \mathcal{N}(0, \sigma_V^2)$, di $X \sim \mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$, si determini la PDF a posteriori di X condizionata all'osservazione $Y = y$, verificando che la media e la varianza condizionate sono date da:

$$\begin{aligned} m_{X|Y=y} &= \frac{\sigma_V^2}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2}\, m_X \;+\; \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2}\, y \\ \sigma^2_{X|Y=y} &= \frac{\sigma_X^2\, \sigma_V^2}{\sigma_X^2 + \sigma_V^2} \end{aligned}$$

Svolgere i calcoli con i valori numerici: $m_X = 10$, $\sigma_X^2 = \sigma_V^2 = 1$ e $y = 8$.

Problema 9 (Ellissi di confidenza di variabile aleatoria Gaussiana bidimensionale) - Data la variabile aleatoria

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 7/4 \end{bmatrix} \right)$$

tracciarne l'ellisse di confidenza al 95%.

Problema 10 (Variabile aleatoria Gaussiana singolare) - Data la variabile aleatoria

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

determinare: (1) la regione di confidenza al 90% e (2) la probabilità che X appartenga al rettangolo $\mathcal{R} = \{x : -1 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 1\}$.

Osservazione - In molti dei problemi proposti, si deve fare uso del seguente risultato.

Teorema - Data la v.a. $X \sim f_X(\cdot)$, sia $Y = g(X)$ con $g(\cdot)$ invertibile di inversa $h(\cdot) = g^{-1}(\cdot)$. Allora la v.a. Y ha PDF

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| det \, \frac{\partial h}{\partial y}(y) \right|$$

Dimostrazione - Si consideri la CDF della v.a. $Y = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]'$:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &\triangleq Prob\,(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, \ldots, Y_n \leq y_n) \\
&= Prob\,(g_1(X) \leq y_1, g_2(X) \leq y_2, \ldots, g_n(X) \leq y_n) \\
&= Prob\,\Big(X \in h(S), S \triangleq \{Y : Y_i \leq y_i, i = 1, 2, \ldots, n\}\Big) \\
&= \int_{h(S)} f_X(x)\; dx_1\; dx_2\; \cdots\; dx_n \qquad (0.0.1) \\
&= \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} f_X(h(y)) \left| det\, \frac{\partial h}{\partial y}(y) \right|\; dy_1\; dy_1\; \cdots\; dy_n \\
&= \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} f_Y(y)\; dy_1\; dy_1\; \cdots\; dy_n
\end{aligned}$$

da cui, come volevasi dimostrare,

$$f_Y(y) \;=\; f_X(h(y)) \left| det\, \frac{\partial h}{\partial y}(y) \right|$$

Si noti che in (0.0.1) si è fatto uso della formula di cambiamento delle variabili in un integrale multiplo

$$dx_1\; dx_1\; \cdots\; dx_n \;=\; \left| det\, \frac{\partial h}{\partial y}(y) \right|\; dy_1\; dy_1\; \cdots\; dy_n$$