Filtraggio Bayesiano: il caso lineare Gaussiano

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 12 Giugno 2014

Si consideri il problema di stima dello stato x_t per il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{t+1} = f_t(x_t, w_t) \\ y_t = h_t(x_t, v_t) \end{cases} \tag{1.1}$$

con rumori di processo w_t e di misura v_t caratterizzati da PDF $p_{w_t}(\cdot)$ e, rispettivamente, $p_{v_t}(\cdot)$. Indicata con $p_{t|t-1}(\cdot)$ la PDF dello stato x_t condizionata alle osservazioni $y^{t-1} \triangleq \{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ e con $p_{t|t}(\cdot)$ la PDF di x_t condizionata a $y^t \triangleq \{y_1, \dots, y_{t-1}, y_t\}$, tali PDF possono essere propagate nel tempo, a partire da una PDF a-priori $p_{1|0}(\cdot)$ dello stato x_1 condizionata a nessuna osservazione $y^0 \triangleq \emptyset$, mediante la seguente ricorsione Bayesiana:

$$p_{t|t}(x) = \frac{\ell_t(x, y_t)\, p_{t|t-1}(x)}{\displaystyle\int \ell_t(\xi, y_t)\, p_{t|t-1}(\xi)\, d\xi} \tag{1.2}$$

$$p_{t+1|t}(x) = \int \varphi_{t+1|t}(x|\xi)\, p_{t|t}(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$

Se $y = h_t(x, v)$ è invertibile rispetto a v, ovvero esiste la funzione inversa $h_t^{-1}(\cdot,\cdot)$ tale che $v = h_t^{-1}(y, x)$, allora la funzione di verosimiglianza è data da:

$$\ell_t(x, y) = p_{v_t}\left(h_t^{-1}(y, x)\right) \left[det\, \frac{\partial h_t(x, v)}{\partial v}\right]^{-1} \tag{1.4}$$

Analogamente, se $x = f_t(\xi, w)$ è invertibile rispetto a w, ovvero esiste la funzione inversa $f_t^{-1}(\cdot,\cdot)$ tale che $w = f_t^{-1}(x, \xi)$, allora la PDF di transizione dello stato è data da:

$$\varphi_{t+1|t}(x|\xi) = p_{w_t}\left(f_t^{-1}(x, \xi)\right) \left[det\, \frac{\partial f_t(\xi, w)}{\partial w}\right]^{-1} \tag{1.5}$$

Nel caso di rumori additivi, i.e. $f_t(x, w) = f_t(x) + w$ e $h_t(x, v) = h_t(x) + v$, le due espressioni in (1.4) e (1.5) si trasformano più semplicemente in:

$$\ell_t(x, y) = p_{v_t}(y - h_t(x)) \tag{1.6}$$

$$\varphi_{t+1|t}(x|\xi) = p_{w_t}(x - f_t(\xi)) \tag{1.7}$$

Sono rari i casi in cui le equazioni di Bayes (1.2) e di Chapman-Kolmogorov (1.3) possono essere risolte analiticamente. Fra questi vi è il caso lineare-Gaussiano, ovvero quando le funzioni $f_t(\cdot,\cdot), h_t(\cdot,\cdot)$ sono lineari e le PDF $p_{1|0}(\cdot), p_{w_t}(\cdot), p_{v_t}(\cdot)$ sono normali (Gaussiane). Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1 (Filtraggio Bayesiano ricorsivo - caso lineare-Gaussiano) - Se valgono le seguenti ipotesi:

$$
\begin{aligned}
f_t(x,w) &= A_t x + b_t + w && (1.8)\\
h_t(x,v) &= C_t x + v && (1.9)\\
p_{w_t}(\cdot) &= \mathcal{N}\left(\cdot\,;0,Q_t\right) && (1.10)\\
p_{v_t}(\cdot) &= \mathcal{N}\left(\cdot\,;0,R_t\right) && (1.11)\\
p_{1|0}(\cdot) &= \mathcal{N}\left(\cdot\,;\hat{x}_{1|0},P_{1|0}\right) && (1.12)
\end{aligned}
$$

allora, per ogni $t \geq 1$, le PDF $p_{t|t}(\cdot)$ e $p_{t+1|t}(\cdot)$ risultano Gaussiane, i.e.

$$
\begin{aligned}
p_{t|t}(\cdot) &= \mathcal{N}\left(\cdot\,;\hat{x}_{t|t},P_{t|t}\right) && (1.13)\\
p_{t+1|t}(\cdot) &= \mathcal{N}\left(\cdot\,;\hat{x}_{t+1|t},P_{t+1|t}\right) && (1.14)
\end{aligned}
$$

e le loro medie/covarianze sono aggiornate mediante il seguente algoritmo ricorsivo (noto come filtro di Kalman):

$$
\begin{aligned}
P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1}C_t^T\left(R_t + C_t P_{t|t-1} C_t^T\right)^{-1} C_t P_{t|t-1} && (1.15)\\
\hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t} C_t^T R_t^{-1}\left(y_t - C_t \hat{x}_{t|t-1}\right) && (1.16)\\
P_{t+1|t} &= A_t P_{t|t} A_t^T + Q_t && (1.17)\\
\hat{x}_{t+1|t} &= A_t\,\hat{x}_{t|t} + b_t && (1.18)
\end{aligned}
$$

Dimostrazione - Si procede per induzione. Poiché, per l'ipotesi (1.12), $p_{1|0}(\cdot)$ è Gaussiana, è sufficiente dimostrare che, assumendo $p_{t|t-1}(\cdot)$ Gaussiana, l'equazione di Bayes (1.2) preserva la Gaussianità di $p_{t|t}(\cdot)$ e, conseguentemente, l'equazione di Chapman-Kolmogorov (1.3) preserva la Gaussianità di $p_{t+1|t}(\cdot)$. In primo luogo si osserva che, in virtù delle ipotesi (1.8)-(1.11), le PDF di verosimiglianza e di transizione dello stato in (1.6) e (1.7) si riducono a

$$
\begin{aligned}
\ell_t\left(x,y\right) &= p_{v_t}\left(y - C_t x\right) &&= \mathcal{N}\left(y - C_t x; 0, R_t\right) && (1.19)\\
\varphi_{t+1|t}\left(x|\xi\right) &= p_{w_t}\left(x - A_t\xi - b_t\right) &&= \mathcal{N}\left(x - A_t\xi - b_t; 0, Q_t\right) && (1.20)
\end{aligned}
$$

Si considera anzitutto la correzione (1.2), da cui

$$
\begin{aligned}
p_{t|t}(x) &\propto \ell_t(x, y_t)\, p_{t|t-1}(x) \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(y_t - C_t x\right)^T R_t^{-1}\left(y_t - C_t x\right)\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \hat{x}_{t|t-1}\right)^T P_{t|t-1}^{-1}\left(x - \hat{x}_{t|t-1}\right)\right] \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2} x^T \left(P_{t|t-1}^{-1} + C_t^T R_t^{-1} C_t\right) x - x^T \left(P_{t|t-1}^{-1}\hat{x}_{t|t-1} + C_t^T R_t^{-1} y_t\right)\right] \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \hat{x}_{t|t}\right)^T P_{t|t}^{-1}\left(x - \hat{x}_{t|t}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

con

$$
P_{t|t}^{-1} = P_{t|t-1}^{-1} + C_t^T R_t^{-1} C_t \tag{1.22}
$$

$$
P_{t|t}^{-1}\hat{x}_{t|t} = P_{t|t-1}^{-1}\hat{x}_{t|t-1} + C_t^T R_t^{-1} y_t \tag{1.23}
$$

Applicando il lemma di inversione di matrici a (1.22), si ottiene la seguente ben nota equazione di correzione della covarianza del filtro di Kalman:

$$
P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} C_t^T \left(R_t + C_t P_{t|t-1} C_t^T\right)^{-1} C_t P_{t|t-1}.
$$

Viceversa, ricavando da (1.22) $P_{t|t-1}^{-1} = P_{t|t}^{-1} - C_t^T R_t^{-1} C_t$ e sostituendo tale espressione per $P_{t|t-1}^{-1}$ a secondo membro di (1.23), si ottiene

$$
\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + P_{t|t} C_t^T R_t^{-1}\left(y_t - C_t \hat{x}_{t|t-1}\right) \tag{1.24}
$$

Verificando con semplici calcoli che

$$
P_{t|t} C_t^T R_t^{-1} = P_{t|t-1} C_t^T \left(R_t + C_t P_{t|t-1} C_t^T\right)^{-1} \triangleq L_t
$$

(1.24) si riduce alla ben nota formula di correzione della stima del filtro di Kalman $\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + L_t\left(y_t - C_t \hat{x}_{t|t-1}\right)$. Poiché $\int p_{t|t}(x)dx = 1$, da (1.21) deve risultare che $p_{t|t}(\cdot) = \mathcal{N}\left(\cdot\, ; \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}\right)$ dove $\hat{x}_{t|t}, P_{t|t}$ sono effettivamente ottenute da $\hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}$ mediante il passo di correzione del filtro di Kalman.

Si considera adesso la predizione (1.3). Risulta che

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+1|t}(x|\xi)\, p_{t|t}(\xi) \quad &\propto \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - A_t\xi - b_t\right)^T Q_t^{-1}\left(x - A_t\xi - b_t\right)\right] \\
&\cdot \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)^T P_{t|t}^{-1}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)\right] \\
&= \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t - A_t\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)\right]^T Q_t^{-1}\left[\cdots\right]\right\} \\
&\cdot \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)^T P_{t|t}^{-1}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)\right] \\
&= \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)^T \underbrace{\left(P_{t|t}^{-1} + A_t^T Q_t^{-1} A_t\right)}_{\Omega_1}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)\right] \\
&\cdot \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right)^T \underbrace{Q_t^{-1}}_{\Omega_2}\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right)\right] \\
&\cdot \quad \exp\left[\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right)^T \underbrace{Q_t^{-1} A_t}_{\Omega_{21}=\Omega_{12}^T}\left(\xi - \hat{x}_{t|t}\right)\right] \\
&= \quad \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\xi - \hat{x}_{t|t} - \Omega_1^{-1}\Omega_{12}\left(x - A_t\hat{x}_{t|t}\right)\right]^T \Omega_1\left[\cdots\right]\right\} \\
&\cdot \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right)^T\left(\Omega_2 - \Omega_{21}\Omega_1^{-1}\Omega_{12}\right)\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.25}$$

È immediato verificare che

$$\Omega_2 - \Omega_{21}\Omega_1^{-1}\Omega_{12} \;=\; Q_t^{-1} - Q_t^{-1}A_t\left(P_{t|t}^{-1} + A_t^T Q_t^{-1} A_t\right)^{-1} A_t^T Q_t^{-1} \;=\; \left(A_t P_{t|t} A_t^T + Q_t\right)^{-1} \tag{1.26}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal lemma di inversione di matrici. Combinando (1.25) con (1.26), si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi_{t+1|t}(x|\xi)\, p_{t|t}(\xi) \quad &\propto \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi - \overline{\xi}\right)^T \Omega_1\left(\xi - \overline{\xi}\right)\right] \\
&\cdot \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)^T P_{t+1|t}^{-1}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.27}$$

con

$$
\begin{aligned}
\overline{\xi} &= \hat{x}_{t|t} + \Omega_1^{-1}\Omega_{12}\left(x - A_t\hat{x}_{t|t} - b_t\right) && (1.28)\\
\hat{x}_{t+1|t} &= A_t\hat{x}_{t|t} + b_t && (1.29)\\
P_{t+1}^{-1} &= \left(A_tP_{t|t}A_t^T + Q_t\right)^{-1} \implies P_{t+1|t} = A_tP_{t|t}A_t^T + Q_t && (1.30)
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
p_{t+1|t}(x) &= \int \varphi_{t+1|t}(x|\xi)\, p_{t|t}(\xi)\, d\xi \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)^T P_{t+1|t}^{-1}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)\right] \\
&\cdot \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi - \overline{\xi}\right)^T \Omega_1\left(\xi - \overline{\xi}\right)\right] d(\xi - \overline{\xi}) \\
&\propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)^T P_{t+1|t}^{-1}\left(x - \hat{x}_{t+1|t}\right)\right] \\
&= \mathcal{N}\left(x; \hat{x}_{t+1|t}, P_{t+1|t}\right)
\end{aligned}
$$

dal momento che $\int p_{t+1|t}(x)dx = 1$. Pertanto anche $p_{t+1|t}(\cdot)$ risulta Gaussiana con media $\hat{x}_{t+1|t}$ e covarianza $P_{t+1|t}$ ottenute da $\hat{x}_{t|t}$ e $P_{t|t}$ mediante il passo di predizione (1.29)-(1.30) del filtro di Kalman. $\square$