UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze
Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .
Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA “A”}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (\neg a \wedge y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee \neg(a \to z) \vee \neg(b \to c) \vee (a \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, x\}, \{\neg a, \neg x, y\}, \{a, b, \neg x\}, \{a, \neg x, \neg y\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, x, \neg y\}, \{b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $10\,654$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $14\,112$ (cioè: $a := 10\,654_{\textit{sette}}$, $b := 14\,112_{\textit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *dodici*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è pari e y è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{7, 13, 24, 31, 48\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,367\, x = 13\,261\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{6\,413}$ l'anello delle classi di resto modulo $6\,413$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{6\,413}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{6\,413}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[21]^x = [1]\,; \qquad\qquad [22]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *cinque* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze
Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .
Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA “B”}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := \neg(a \to c) \vee (a \wedge c \wedge x) \vee (\neg b \wedge y) \vee (\neg b \wedge \neg y) \vee \neg(b \to z) \vee (b \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, b\}, \{\neg a, \neg b, y\}, \{a, \neg b, x\}, \{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, x\}, \{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive 436 e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive 131 (cioè: $a := 436_{\textit{sette}}$, $b := 131_{\textit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *tredici*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{8,\ 14,\ 25,\ 32,\ 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,371\, x = 13\,483\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{6\,768}$ l'anello delle classi di resto modulo $6\,768$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{6\,768}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{6\,768}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[13]^x = [1]\,; \qquad\qquad [14]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *dieci* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .

Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.

Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.

Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.

Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).

Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA "C"}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge b \wedge x) \vee \neg(b \to c) \vee (\neg c \wedge y) \vee (\neg c \wedge \neg y) \vee \neg(c \to z) \vee (c \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, x\}, \{\neg a, b, \neg x\}, \{a, \neg b, \neg x\}, \{a, \neg x, y\}, \{\neg a, y\}, \{\neg b, x, \neg y\}, \{b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $3\,451$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $5\,644$ (cioè: $a := 3\,451_{\mathit{sette}}$, $b := 5\,644_{\mathit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *diciassette*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è pari e y è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{9,\ 14,\ 25,\ 32,\ 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,289\, x = 13\,837\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{7\,267}$ l'anello delle classi di resto modulo $7\,267$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{7\,267}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{7\,267}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[13]^x = [1]\,; \qquad\qquad [14]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *sei* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze

Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n.
Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA "D"}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge c \wedge y) \vee (b \wedge \neg x) \vee (\neg b \wedge \neg x) \vee (x \wedge z) \vee \neg(x \to z) \vee \neg(y \to c)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, y\}, \{\neg a, x, \neg y\}, \{a, b, \neg y\}, \{a, \neg x, \neg y\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $36\,620$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $3\,667$ (cioè: $a := 36\,620_{\textit{sette}}$, $b := 3\,667_{\textit{nove}}$). Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *dodici*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{8, 14, 28, 37, 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,231\, x = 13\,493\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{8\,036}$ l'anello delle classi di resto modulo $8\,036$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{8\,036}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{8\,036}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad\qquad [15]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *nove* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze
Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .
Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA "E"}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge \neg y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee \neg(b \rightarrow c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge z) \vee \neg(y \rightarrow z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, b, \neg y\}, \{a, y\}, \{a, x, \neg y\}, \{\neg a, x\}, \{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive 214 e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive 267 (cioè: $a := 214_{sette}$, $b := 267_{nove}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *tredici*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è pari e y è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{9,\ 19,\ 38,\ 52,\ 69\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,081\, x = 13\,589\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{8\,325}$ l'anello delle classi di resto modulo $8\,325$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{8\,325}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{8\,325}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad\qquad [15]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *sette* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020
PROVA *IN ITINERE* DI "MATEMATICA DISCRETA E LOGICA"

secondo appello – 04.03.2020

Avvertenze
Se l'elaborato consiste in n pagine non tutte appartenenti a uno stesso foglio, tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n .
Sul frontespizio di *ciascun foglio* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine), il numero di matricola del candidato e la "fila" ($\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$ oppure $\boxed{\text{F}}$) di pertinenza.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 4$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.
Nell'esercizio 7 è consentito esprimere il risultato mediante somme, prodotti e/o potenze di numeri interi (ma ***non*** attraverso altre espressioni).
Per tutta la durata della prova non è consentito uscire dall'aula per alcun motivo.

$\boxed{\text{FILA “F”}}$

Esercizio 1 (6 *punti*)

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge z) \vee \neg(z \rightarrow a) \vee \neg(b \rightarrow c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Esercizio 2 (5 *punti*)

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, b\}, \{\neg a, \neg b, x\}, \{a, \neg b, y\}, \{a, \neg b, \neg x\}, \{\neg a, y\}, \{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x, y\}, \\ \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Esercizio 3 (4 *punti*)

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $15\,106$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $1\,651$ (cioè: $a := 15\,106_{\textit{sette}}$, $b := 1\,651_{\textit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *diciassette*.

(altri esercizi sul retro del foglio!)

Esercizio 4 (5 *punti*)

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{8,\ 14,\ 43,\ 44,\ 59\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Esercizio 5 (3 *punti*)

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,091\, x = 12\,317\, y\,.$$

Esercizio 6 (3 *punti*)

Sia $\mathbb{Z}_{7\,936}$ l'anello delle classi di resto modulo $7\,936$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{7\,936}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{7\,936}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad\qquad [15]^x = [1]\,.$$

Esercizio 7 (4 *punti*)

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *otto* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.