UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

4.3.2020

FILA "B"

Esercizio 1

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := \neg(a \to c) \vee (a \wedge c \wedge x) \vee (\neg b \wedge y) \vee (\neg b \wedge \neg y) \vee \neg(b \to z) \vee (b \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Soluzione – La formula φ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big(\neg(a \to c) \vee (a \wedge c \wedge x) \vee (\neg b \wedge y) \vee (\neg b \wedge \neg y) \vee \neg(b \to z) \vee (b \wedge z)\big) \equiv$$

$$\equiv (a \to c) \wedge \neg(a \wedge c \wedge x) \wedge \neg(\neg b \wedge y) \wedge \neg(\neg b \wedge \neg y) \wedge (b \to z) \wedge \neg(b \wedge z) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (b \vee \neg y) \wedge (b \vee y) \wedge (\neg b \vee z) \wedge (\neg b \vee \neg z)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{\neg a, c\}, \{\neg a, \neg c, \neg x\}, \{b, \neg y\}, \{b, y\}, \{\neg b, z\}, \{\neg b, \neg z\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{b, \neg y\}$, $\{b, y\}$, $\{\neg b, z\}$, $\{\neg b, \neg z\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{b, \neg y\}, \{b, y\}, \{\neg b, z\}, \{\neg b, \neg z\}\}.$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_y(\{b, \neg y\}, \{\neg b, z\}) = \{\neg y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{b, \neg y\}, \{\neg b, \neg z\}) = \{\neg y, \neg z\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{b, y\}, \{\neg b, z\}) = \{y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{b, y\}, \{\neg b, \neg z\}) = \{y, \neg z\}$;

$$\{\{\neg y, z\}, \{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}, \{y, \neg z\}\}.$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y, z\}) = \{z\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y, \neg z\}) = \{z, \neg z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}) = \{\neg z, z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z\}, \{y, \neg z\}) = \{\neg z\}$;

$$\{\{z\}, \{\neg z\}\}.$$

Pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_z(\{z\}, \{\neg z\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi φ è una tautologia.

<u>Esercizio 2</u>

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, b\}, \{\neg a, \neg b, y\}, \{a, \neg b, x\}, \{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, x\}, \{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Soluzione – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliendo i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{b, \neg x, \neg y\}$, $\{\neg b, x, y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, b\}, \{\neg a, \neg b, y\}) = \{b, \neg b, y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, b\}, \{\neg a, x\}) = \{b, x\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, x\}, \{\neg a, \neg b, y\}) = \{\neg b, x, y\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, x\}, \{\neg a, x\}) = \{\neg b, x\}$;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, \neg b, y\}) = \{\neg b, \neg y, y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg b, \neg y\}, \{\neg a, x\}) = \{\neg b, x, \neg y\}$;

$$\{\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, x\}, \{\neg b, x\}, \{\neg b, x, \neg y\}\} .$$

Poiché la clausola $\{\neg b, x\}$ è contenuta nelle due clausole $\{\neg b, x, y\}$ e $\{\neg b, x, \neg y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, x\}, \{\neg b, x\}\} .$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: non ce ne sono ;

Ris$_b(\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}) = \{\neg x, \neg y\}$;
Ris$_b(\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, x\}) = \{\neg x, \neg y, x\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
Ris$_b(\{b, x\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}) = \{x, \neg x, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
Ris$_b(\{b, x\}, \{\neg b, x\}) = \{x\}$;

$$\{\{\neg x, \neg y\}, \{x\}\}$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: non ce ne sono ;

Ris$_x(\{\neg x, \neg y\}, \{x\}) = \{\neg y\}$;

$$\{\{\neg y\}\}$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità v_0 che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su y, x, b, a come segue:

$$v_0(y) := 0\,; \qquad v_0(x) := 1\,; \qquad v_0(b) := 0\,; \qquad v_0(a) := 1\,.$$

<u>Esercizio 3</u>

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive 436 e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive 131 (cioè: $a := 436_{\textit{sette}}$, $b := 131_{\textit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *tredici*.

Soluzione $-$ Si ha

$$a = 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 6 = 4 \cdot 49 + 3 \cdot 7 + 6 =$$
$$= 196 + 21 + 6 = 223$$

e

$$b = 1 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 1 = 1 \cdot 81 + 3 \cdot 9 + 1 =$$
$$= 81 + 27 + 1 = 109\,.$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra 223 e 109 utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$223 = 109 \cdot 2 + 5\,;$
$109 = 5 \cdot 21 + 4\,;$
$5 = 4 \cdot 1 + 1\,;$
$4 = 1 \cdot 4 + 0\,.$

Dunque
$$\mathrm{MCD}(223, 109) = 1$$
e
$$m = \mathrm{mcm}(223, 109) = 223 \cdot 109 = 24\,307\,.$$
Scriviamo infine m in base *tredici* eseguendo successive divisioni per 13 :

$24\,307 = 13 \cdot 1\,869 + 10\,;$
$1\,869 = 13 \cdot 143 + 10\,;$
$143 = 13 \cdot 11 + 0\,;$
$11 = 13 \cdot 0 + 11\,.$

Pertanto
$$m = \mathrm{B0AA}_{\textit{tredici}}\,.$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x \mathrm{R} y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme **A** $:= \{8,\ 14,\ 25,\ 32,\ 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Soluzione $-$ (i) Siano $x, y \in \mathbb{N}$. Se x, y sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se x, y sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello dispari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

(ii) per la (i), gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che
$$25 \mathrel{\mathrm{R}} 49, \qquad 49 \mathrel{\mathrm{R}} 8, \qquad 8 \mathrel{\mathrm{R}} 14, \qquad 14 \mathrel{\mathrm{R}} 32$$
cosicché 25 è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**) .

(iii) l'insieme dei numeri dispari non ha massimo (se x è un numero dispari, anche $x + 2$ è dispari; si ha che $x \leq x + 2$ e quindi $x \mathrel{\mathrm{R}} x + 2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero pari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri pari, cioè 0 .

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,371\,x = 13\,483\,y\,.$$

Soluzione – L'equazione proposta si può scrivere

$$12\,371\,x - 13\,483\,y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

(*) $$12\,371\,x + 13\,483\,y = 0$$

cambiando segno al valore della y; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$$x := \tfrac{13\,483}{\delta}\,h, \qquad y := -\,\tfrac{12\,371}{\delta}\,h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

dove δ è il massimo comun divisore fra $12\,371$ e $13\,483$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$$13\,483 = 12\,371 \cdot 1 + 1\,112\,;$$
$$12\,371 = 1\,112 \cdot 11 + 139\,;$$
$$1\,112 = 139 \cdot 8 + 0\,.$$

Pertanto $\delta = 139$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 97h, \qquad y := 89h\,.$$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{6\,768}$ l'anello delle classi di resto modulo $6\,768$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{6\,768}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{6\,768}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[13]^x = [1]\,; \qquad [14]^x = [1]\,.$$

Soluzione – Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione x_0 in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di x_0 è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[13]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 13 e 6 768 è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 13 e 6 768 :

$$6\,768 = 13 \cdot 520 + 8\,; \qquad 13 = 8 \cdot 1 + 5\,;$$
$$8 = 5 \cdot 1 + 3\,; \qquad 5 = 3 \cdot 1 + 2\,;$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1\,; \qquad 2 = 1 \cdot 2 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra 13 e 6 768 è dunque 1 ; pertanto l'equazione $[13]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(6\,768)$.

Per calcolare $\varphi(6\,768)$ ci serve la fattorizzazione di $6\,768$.

È facile vedere che $6\,768 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 47$ con 47 numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per 2 né per 3 né per 5). Dunque

$$\varphi(6\,768) = \varphi(2^4) \cdot \varphi(3^2) \cdot \varphi(47) = 8 \cdot 6 \cdot 46 = 2\,208$$

è una soluzione dell'equazione $[13]^x = [1]$.

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $2\,208$ è soluzione, moltiplicando $2\,208$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $2\,208\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Analogamente, l'equazione $[14]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 14 e $6\,768$ è uguale a 1; ma ciò è impossibile perché 14 e $6\,768$ sono entrambi pari. Pertanto l'equazione $[14]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$.

Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *dieci* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

Soluzione — Poiché le dieci cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale n che rispetti le condizioni del problema. Poiché n deve essere multiplo di *tre*, l'ultima cifra a destra nella scrittura in base *nove* può essere soltanto 3 o 6 (abbiamo escluso lo zero). Sono due casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è 3, le prime nove possono essere scelte soltanto fra $1, 2$ e 3; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{3+9-1}{9} = \binom{11}{9} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 6, le prime nove possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e 6; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+9-1}{9} = \binom{14}{9} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 14 \cdot 13 \cdot 11 = 2\,002$ possibilità.

Applicando il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$55 + 2\,002 = 2\,057\,.$$