UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

**4.3.2020**

FILA "C"

Esercizio 1

Siano $a, b, c, x, y, z$ variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge b \wedge x) \vee \neg(b \to c) \vee (\neg c \wedge y) \vee (\neg c \wedge \neg y) \vee \neg(c \to z) \vee (c \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se $\varphi$ è una tautologia..

*Soluzione* – La formula $\varphi$ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big((a \wedge b \wedge x) \vee \neg(b \to c) \vee (\neg c \wedge y) \vee (\neg c \wedge \neg y) \vee \neg(c \to z) \vee (c \wedge z)\big) \equiv$$
$$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg x) \wedge (b \to c) \wedge (c \vee \neg y) \wedge (c \vee y) \wedge (c \to z) \wedge (\neg c \vee \neg z) \equiv$$
$$\equiv (\neg a \vee \neg b \vee \neg x) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (c \vee \neg y) \wedge (c \vee y) \wedge (\neg c \vee z) \wedge (\neg c \vee \neg z)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{\neg a, \neg b, \neg x\}, \{\neg b, c\}, \{c, \neg y\}, \{c, y\}, \{\neg c, z\}, \{\neg c, \neg z\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot $b$:

clausole non contenenti né $b$ né $\neg b$: $\{c, \neg y\}$, $\{c, y\}$, $\{\neg c, z\}$, $\{\neg c, \neg z\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{c, \neg y\}, \{c, y\}, \{\neg c, z\}, \{\neg c, \neg z\}\}.$$

Pivot $c$:

clausole non contenenti né $c$ né $\neg c$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_c(\{c, \neg y\}, \{\neg c, z\}) = \{\neg y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, \neg y\}, \{\neg c, \neg z\}) = \{\neg y, \neg z\}$;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, y\}, \{\neg c, z\}) = \{y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_c(\{c, y\}, \{\neg c, \neg z\}) = \{y, \neg z\}$;

$$\{\{\neg y, z\}, \{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}, \{y, \neg z\}\}.$$

Pivot $y$:

clausole non contenenti né $y$ né $\neg y$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y, z\}) = \{z\}$ ;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y, \neg z\}) = \{z, \neg z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}) = \{\neg z, z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z\}, \{y, \neg z\}) = \{\neg z\}$ ;

$$\{\{z\}, \{\neg z\}\}.$$

Pivot $z$:

clausole non contenenti né $z$ né $\neg z$: non ce ne sono!

$\mathrm{Ris}_z(\{z\}, \{\neg z\}) = [\,]$ ;

$$\{[\,]\}$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi $\varphi$ è una tautologia.

Esercizio 2

Siano $a, b, x, y$ variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, x\}, \{\neg a, b, \neg x\}, \{a, \neg b, \neg x\}, \{a, \neg x, y\}, \{\neg a, y\}, \{\neg b, x, \neg y\}, \{b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali $a, b, x, y$ ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$ .

*Soluzione* — Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliend o i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot $a$:

clausole non contenenti né $a$ né $\neg a$: $\{\neg b, x, \neg y\}$, $\{b, \neg x, y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$ ;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, x\}, \{\neg a, b, \neg x\}) = \{x, b, \neg x\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, x\}, \{\neg a, y\}) = \{x, y\}$ ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, \neg x\}, \{\neg a, b, \neg x\}) = \{\neg b, \neg x, b\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg b, \neg x\}, \{\neg a, y\}) = \{\neg b, \neg x, y\}$ ;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg x, y\}, \{\neg a, b, \neg x\}) = \{\neg x, y, b\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg x, y\}, \{\neg a, y\}) = \{\neg x, y\}$ ;

$$\{\{\neg b, x, \neg y\}, \{b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{x, y\}, \{\neg b, \neg x, y\}, \{\neg x, y\}\}$$

Poiché la clausola $\{\neg x, y\}$ è contenuta nelle due clausole $\{b, \neg x, y\}$ e $\{\neg b, \neg x, y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{x, y\}, \{\neg x, y\}\}$$

Pivot $b$:

clausole non contenenti né $b$ né $\neg b$: $\{x, y\}$, $\{\neg x, y\}$ ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{x, y\}, \{\neg x, y\}\}$$

Pivot $x$:

clausole non contenenti né $x$ né $\neg x$: non ce ne sono ;

$\mathrm{Ris}_x(\{x, y\}, \{\neg x, y\}) = \{y\}$ ;

$$\{y\}$$

Pivot $y$:

clausole non contenenti né $y$ né $\neg y$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità $v_0$ che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su $y$, $x$, $b$, $a$ come segue:

$$v_0(y) := 1\,; \qquad v_0(x) := 0\,; \qquad v_0(b) := 0\,; \qquad v_0(a) := 1\,.$$

<u>Esercizio 3</u>

Sia $a$ il numero naturale che in base *sette* si scrive $3\,451$ e sia $b$ il numero naturale che in base *nove* si scrive $5\,644$ (cioè: $a := 3\,451_{\mathit{sette}}$, $b := 5\,644_{\mathit{nove}}$). Si trovi il minimo comune multiplo $m$ fra $a$ e $b$ e lo si scriva in base *diciassette*.

*Soluzione* — Si ha

$$a = 3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 1 = 3 \cdot 343 + 4 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 1 =$$
$$= 1\,029 + 196 + 35 + 1 = 1\,261$$

e

$$b = 5 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 + 4 = 5 \cdot 729 + 6 \cdot 81 + 4 \cdot 9 + 4 =$$
$$= 3\,645 + 486 + 36 + 4 = 4\,171\,.$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra $1\,261$ e $4\,171$ utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$4\,171 = 1\,261 \cdot 3 + 388\,;$
$1\,261 = 388 \cdot 3 + 97\,;$
$388 = 97 \cdot 4 + 0\,.$

Dunque

$$\mathrm{MCD}(1\,261, 4\,171) = 97$$

e

$$m = \mathrm{mcm}(1\,261, 4\,171) = \tfrac{1\,261 \cdot 4\,171}{97} = 13 \cdot 4\,171 = 54\,223\,.$$

Scriviamo infine $m$ in base *diciassette* eseguendo successive divisioni per $17$ :

$$\begin{aligned} &54\,223 = 17 \cdot 3\,189 + 10\,; \\ &3\,189 = 17 \cdot 187 + 10\,; \\ &187 = 12 \cdot 11 + 0\,; \\ &11 = 12 \cdot 0 + 11\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$m = \mathrm{B0AA}_{\textit{diciassette}}\,.$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x\mathrm{R}y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- $x, y$ sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- $x, y$ sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- $x$ è pari e $y$ è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

$(i)$ si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

$(ii)$ si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme **A** $:= \{9,\ 14,\ 25,\ 32,\ 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

$(iii)$ si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

*Soluzione* $-$ $(i)$ Siano $x, y \in \mathbb{N}$ . Se $x, y$ sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se $x, y$ sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello pari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

$(ii)$ per la $(i)$, gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che

$$14 \mathrel{\mathrm{R}} 32, \qquad 32 \mathrel{\mathrm{R}} 9, \qquad 9 \mathrel{\mathrm{R}} 25, \qquad 25 \mathrel{\mathrm{R}} 49$$

cosicché $14$ è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**) .

$(iii)$ l'insieme dei numeri pari non ha massimo (se $x$ è un numero pari, anche $x+2$ è pari; si ha che $x \leq x+2$ e quindi $x \mathrel{\mathrm{R}} x+2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero dispari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri dispari, cioè $1$ .

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,289\, x = 13\,837\, y\,.$$

*Soluzione* $-$ L'equazione proposta si può scrivere

$$13\,289\, x - 13\,837\, y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

(*) $$13\,289\, x + 13\,837\, y = 0$$

cambiando segno al valore della $y$; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$x := \frac{13\,837}{\delta} h, \qquad y := -\frac{13\,289}{\delta} h$ (al variare di $h$ in $\mathbb{Z}$)

dove $\delta$ è il massimo comun divisore fra $13\,289$ e $13\,837$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$13\,837 = 13\,289 \cdot 1 + 548\,;$
$13\,289 = 548 \cdot 24 + 137\,;$
$548 = 137 \cdot 4 + 0\,.$

Pertanto $\delta = 137$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$x := 101h, \qquad y := 97h\,.$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{7\,267}$ l'anello delle classi di resto modulo $7\,267$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{7\,267}$ a cui $z$ appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{7\,267}$ nella incognita $x$ si trovi, qualora esista, una soluzione $x_0$ in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[13]^x = [1]\,; \qquad [14]^x = [1]\,.$$

*Soluzione* $-$ Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione $x_0$ in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di $x_0$ è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[13]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 13 e $7\,267$ è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 13 e $7\,267$:

$7\,267 = 13 \cdot 559 + 0\,.$

Il massimo comun divisore fra 13 e $7\,267$ è dunque 13; pertanto l'equazione $[13]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$.

Analogamente, l'equazione $[14]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 14 e $7\,267$ è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 14 e $7\,267$:

$7\,267 = 14 \cdot 519 + 1\,; \qquad 14 = 1 \cdot 14 + 0\,.$

Il massimo comun divisore fra $14$ e $7\,267$ è dunque $1$; pertanto l'equazione $[14]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(7\,267)$.

Per calcolare $\varphi(7\,267)$ ci serve la fattorizzazione di $7\,267$.

Abbiamo visto che $7\,267$ è divisibile per $13$; è facile vedere che $7\,267 = 13^2 \cdot 43$ con $43$ numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per $2$ né per $3$ né per $5$). Dunque

$$\varphi(7\,267) = \varphi(13^2) \cdot \varphi(43) = 13 \cdot 12 \cdot 42 = 6\,552$$

è una soluzione dell'equazione $[14]^x = [1]$.

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $6\,552$ è soluzione, moltiplicando $6\,552$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $6\,552\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *sei* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

*Soluzione* — Poiché le sei cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale $n$ che rispetti le condizioni del problema. Poiché $n$ deve essere pari, l'ultima cifra a destra può essere soltanto $2, 4, 6$ oppure $8$ (abbiamo escluso lo zero). Sono quattro casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è $2$, le prime cinque possono essere scelte soltanto fra $1$ e $2$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{2+5-1}{5} = \binom{6}{5} = 6$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $4$, le prime cinque possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3$ e $4$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2} = 8 \cdot 7 = 56$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $6$, le prime cinque possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e $6$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $8$, le prime cinque possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e $8$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$ possibilità.

Applicando infine il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$6 + 56 + 252 + 792 = 1\,106\,.$$