UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

**4.3.2020**

FILA "A"

Esercizio 1

Siano $a, b, c, x, y, z$ variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (\neg a \wedge y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee \neg(a \to z) \vee \neg(b \to c) \vee (a \wedge z)$$

Si dica, motivando la risposta, se $\varphi$ è una tautologia..

*Soluzione* – La formula $\varphi$ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big((\neg a \wedge y) \vee (\neg a \wedge \neg y) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee \neg(a \to z) \vee \neg(b \to c) \vee (a \wedge z)\big) \equiv$$

$$\equiv (a \vee \neg y) \wedge (a \vee y) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (a \to z) \wedge (b \to c) \wedge (\neg a \vee \neg z) \equiv$$

$$\equiv (a \vee \neg y) \wedge (a \vee y) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (\neg a \vee z) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg z)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{a, \neg y\}, \{a, y\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg a, z\}, \{\neg b, c\}, \{\neg a, \neg z\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot $a$:

clausole non contenenti né $a$ né $\neg a$: $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$, $\{\neg b, c\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg y\}, \{\neg a, z\}) = \{\neg y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, \neg y\}, \{\neg a, \neg z\}) = \{\neg y, \neg z\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, z\}) = \{y, z\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, \neg z\}) = \{y, \neg z\}$;

$$\{\{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg b, c\}, \{\neg y, z\}, \{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}, \{y, \neg z\}\}.$$

Pivot $b$:

clausole non contenenti né $b$ né $\neg b$: $\{\neg y, z\}$, $\{\neg y, \neg z\}$, $\{y, z\}$, $\{y, \neg z\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg y, z\}, \{\neg y, \neg z\}, \{y, z\}, \{y, \neg z\}\}.$$

Pivot $y$:

clausole non contenenti né $y$ né $\neg y$: non ce ne sono!

$\text{Ris}_y(\{\neg y,\, z\},\, \{y,\, z\}) = \{z\}$ ;
$\text{Ris}_y(\{\neg y,\, z\},\, \{y,\, \neg z\}) = \{z,\, \neg z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_y(\{\neg y,\, \neg z\},\, \{y,\, z\}) = \{\neg z,\, z\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_y(\{\neg y,\, \neg z\},\, \{y,\, \neg z\}) = \{\neg z\}$ ;

$$\{\{z\},\, \{\neg z\}\}.$$

Pivot $z$:

clausole non contenenti né $z$ né $\neg z$: non ce ne sono!

$\text{Ris}_z(\{z\},\, \{\neg z\}) = [\,]$ ;

$$\{[\,]\}$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi $\varphi$ è una tautologia.

Esercizio 2

Siano $a, b, x, y$ variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a,\, x\},\, \{\neg a,\, \neg x,\, y\},\, \{a,\, b,\, \neg x\},\, \{a,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg a,\, b\},\, \{\neg b,\, x,\, \neg y\},\, \{b,\, \neg x,\, y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali $a, b, x, y$ ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$ .

*Soluzione* – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliendo i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot $a$:

clausole non contenenti né $a$ né $\neg a$: $\{\neg b, x, \neg y\}$, $\{b, \neg x, y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$ ;

$\text{Ris}_a(\{a,\, x\},\, \{\neg a,\, \neg x,\, y\}) = \{x,\, \neg x,\, y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_a(\{a,\, x\},\, \{\neg a,\, b\}) = \{b,\, x\}$ ;
$\text{Ris}_a(\{a,\, b,\, \neg x\},\, \{\neg a,\, \neg x,\, y\}) = \{b,\, \neg x,\, y\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\text{Ris}_a(\{a,\, b,\, \neg x\},\, \{\neg a,\, b\}) = \{b,\, \neg x\}$ ;
$\text{Ris}_x(\{a,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg a,\, \neg x,\, y\}) = \{\neg x,\, y,\, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_x(\{a,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg a,\, b\}) = \{b,\, \neg x,\, \neg y\}$ ;

$$\{\{\neg b,\, x,\, \neg y\},\, \{b,\, \neg x,\, y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{b,\, x\},\, \{b,\, \neg x\},\, \{b,\, \neg x,\, \neg y\}\}$$

Poiché la clausola $\{b,\, \neg x\}$ è contenuta nelle due clausole $\{b,\, \neg x,\, y\}$ e $\{b,\, \neg x,\, \neg y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg b,\, x,\, \neg y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{b,\, x\},\, \{b,\, \neg x\}\}$$

Pivot $b$:

clausole non contenenti né $b$ né $\neg b$: non ce ne sono ;

$\text{Ris}_b(\{\neg b, x, \neg y\}, \{b, x\}) = \{x, \neg y\}$ ;
$\text{Ris}_b(\{\neg b, x, \neg y\}, \{b, \neg x\}) = \{x, \neg x, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, x\}) = \{x, \neg x, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, \neg x\}) = \{\neg x, \neg y\}$ ;

$$\{\{x, \neg y\}, \{\neg x, \neg y\}\}$$

Pivot $x$:

clausole non contenenti né $x$ né $\neg x$: non ce ne sono ;

$\text{Ris}_x(\{x, \neg y\}, \{\neg x, \neg y\}) = \{\neg y\}$ ;

$$\{\{\neg y\}\}$$

Pivot $y$:

clausole non contenenti né $y$ né $\neg y$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità $v_0$ che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su $y$, $x$, $b$, $a$ come segue:

$$v_0(y) := 0\,; \qquad v_0(x) := 0\,; \qquad v_0(b) := 1\,; \qquad v_0(a) := 1\,.$$

<u>Esercizio 3</u>

Sia $a$ il numero naturale che in base *sette* si scrive $10\,654$ e sia $b$ il numero naturale che in base *nove* si scrive $14\,112$ (cioè: $a := 10\,654_{\textit{sette}}$, $b := 14\,112_{\textit{nove}}$). Si trovi il minimo comune multiplo $m$ fra $a$ e $b$ e lo si scriva in base *dodici*.

*Soluzione* – Si ha

$$a = 1 \cdot 7^4 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7 + 4 = 1 \cdot 2\,401 + 6 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 4 =$$
$$= 2\,401 + 294 + 35 + 4 = 2\,734$$

e

$$b = 1 \cdot 9^4 + 4 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9 + 2 = 1 \cdot 6\,561 + 4 \cdot 729 + 1 \cdot 81 + 1 \cdot 9 + 2 =$$
$$= 6\,561 + 2\,916 + 81 + 9 + 2 = 9\,569\,.$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra $2\,734$ e $9\,569$ utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$9\,569 = 2\,734 \cdot 3 + 1\,367\,;$
$2\,734 = 1\,367 \cdot 2 + 0\,.$

Dunque

$$\mathrm{MCD}(2\,734, 9\,569) = 1\ 367$$

e

$$m = \mathrm{mcm}(2\,734, 9\,569) = \frac{2\ 734 \cdot 9\,569}{1\,367} = 2 \cdot 9\,569 = 19\,138\,.$$

Scriviamo infine $m$ in base *dodici* eseguendo successive divisioni per $12$ :

$19\,138 = 12 \cdot 1\,594 + 10\,;$
$1\,594 = 12 \cdot 132 + 10\,;$
$132 = 12 \cdot 11 + 0\,;$
$11 = 12 \cdot 0 + 11\,.$

Pertanto

$$m = \mathrm{B0AA}_{dodici}\,.$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x\mathrm{R}y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- $x, y$ sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- $x, y$ sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- $x$ è pari e $y$ è dispari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

($i$) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

($ii$) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme **A** $:= \{7,\ 13,\ 24,\ 31,\ 48\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

($iii$) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri pari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

*Soluzione* $-$ ($i$) Siano $x, y \in \mathbb{N}$ . Se $x, y$ sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se $x, y$ sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello pari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

($ii$) per la ($i$), gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che

$$24 \mathrel{\mathrm{R}} 48, \qquad 48 \mathrel{\mathrm{R}} 7, \qquad 7 \mathrel{\mathrm{R}} 13, \qquad 13 \mathrel{\mathrm{R}} 31$$

cosicché $24$ è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**) .

($iii$) l'insieme dei numeri pari non ha massimo (se $x$ è un numero pari, anche $x+2$ è pari; si ha che $x \leq x+2$ e quindi $x \mathrel{\mathrm{R}} x+2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero dispari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri dispari, cioè $1$ .

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,367\,x = 13\,261\,y\,.$$

*Soluzione* $-$ L'equazione proposta si può scrivere

$$12\,367\,x - 13\,261\,y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

(*) $$12\,367\,x + 13\,261\,y = 0$$

cambiando segno al valore della $y$; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$$x := \tfrac{13\,261}{\delta}h, \qquad y := -\tfrac{12\,367}{\delta}h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

dove $\delta$ è il massimo comun divisore fra $12\,367$ e $13\,261$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$$13\,261 = 12\,367 \cdot 1 + 894\,;$$
$$12\,367 = 894 \cdot 13 + 745\,;$$
$$894 = 745 \cdot 1 + 149\,;$$
$$745 = 149 \cdot 5 + 0\,.$$

Pertanto $\delta = 149$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x := 89h, \qquad y := 83h\,.$$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{6\,413}$ l'anello delle classi di resto modulo $6\,413$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{6\,413}$ a cui $z$ appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{6\,413}$ nella incognita $x$ si trovi, qualora esista, una soluzione $x_0$ in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[21]^x = [1]\,; \qquad [22]^x = [1]\,.$$

*Soluzione* $-$ Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione $x_0$ in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di $x_0$ è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[21]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 21 e 6 413 è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 21 e $6\,413$:

$$6\,413 = 21 \cdot 305 + 8\,; \qquad 21 = 8 \cdot 2 + 5\,;$$
$$8 = 5 \cdot 1 + 3\,; \qquad 5 = 3 \cdot 1 + 2\,;$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1\,; \qquad 2 = 1 \cdot 2 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra 21 e $6\,413$ è dunque $1$; pertanto l'equazione $[21]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(6\,413)$.

Per calcolare $\varphi(6\,413)$ ci serve la fattorizzazione di $6\,413$.

È facile vedere che $\quad 6\,413 = 11^2 \cdot 53 \quad$ con $53$ numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per $2$ né per $3$ né per $5$ né per $7$). Dunque

$$\varphi(6\,413) = \varphi(11^2) \cdot \varphi(53) = 11 \cdot 10 \cdot 52 = 5\,720$$

è una soluzione dell'equazione $\quad [21]^x = [1]\,.$

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $5\,720$ è soluzione, moltiplicando $5\,720$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $5\,720\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Analogamente, l'equazione $[22]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra $22$ e $6\,413$ è uguale a $1$. Ma ciò non è possibile, perché $22$ e $6\,413$ sono entrambi multipli di $11$; pertanto l'equazione $[22]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$.

## Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali pari che in base *dieci* si scrivono con *cinque* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

*Soluzione* — Poiché le cinque cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale $n$ che rispetti le condizioni del problema. Poiché $n$ deve essere pari, l'ultima cifra a destra può essere soltanto $2, 4, 6$ oppure $8$ (abbiamo escluso lo zero). Sono quattro casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è $2$, le prime quattro possono essere scelte soltanto fra $1$ e $2$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $4$, le prime quattro possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3$ e $4$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 7 \cdot 5 = 35$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $6$, le prime quattro possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e $6$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2} = 3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$ possibilità.

Se l'ultima cifra è $8$, le prime quattro possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e $8$; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330$ possibilità.

Applicando infine il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$5 + 35 + 126 + 330 = 496\,.$$