

Lezione n. 1: Serie numeriche –parte 1–

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**



Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

n_0 è un numero naturale fissato

si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

- Allora:
1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
 2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
 3. se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

- Allora:
1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
 2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
 3. se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
3. se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $b_n \neq 0$ definitivamente.Allora:

1. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, +\infty\}$ Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
3. se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi, $b_n \neq 0$ definitivamente.Allora:1. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
 $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere2. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
e $\sum b_n$ converge
allora $\sum a_n$ converge

Serie numericheTeorema (criterio del confronto asintotico)Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$ si abbia che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, +\infty\}$ Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
3. se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $b_n \neq 0$ definitivamente.Allora:

1. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

2. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
 e $\sum b_n$ converge
 allora $\sum a_n$ converge

3. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
 e $\sum b_n$ diverge
 allora $\sum a_n$ diverge

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascriviamo

momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (e recupereremo 2 posizioni) col andare ad applicare il criterio del confronto diretto nella sua prima versione.

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascriviamo

momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (le recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asimptotico nella sua prima versione.

Altre: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

k da determinare

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascriviamo

momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (le recupereremo a posteriori) col fine di applicare il criterio del confronto diretto nella sua prima versione.

$$\text{Allora: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{uso Taylor}}}$$

\uparrow
 k da determinare

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascriviamo

momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (le recupereremo a posteriori) col fine di applicare il criterio del confronto diretto nella sua prima versione.

$$\text{Allora: } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{k-2} \frac{n}{n+2} \cdot \left(\frac{n}{n} + n o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

↑ da determinare
↑ uso Taylor

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascriviamo

momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (le recupereremo 2 posizioni) col fine di applicare il criterio del confronto asimptotico nella sua prima versione.

$$\text{Allora: } \lim_{k \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{uso Taylor}}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n^{k-2} \frac{n}{n+2} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n} + n o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\substack{\xrightarrow{1} \\ n \rightarrow +\infty} \quad \xrightarrow{1} \\ n \rightarrow +\infty}}$$

\uparrow da determinarsi

$$\stackrel{\uparrow}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{n}{n} + n o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+2} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} n^k \frac{1}{n+2} \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Se $k=2$

Quindi la serie esagerata ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ che è convergente e quindi è essa stessa convergente.

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n}$$

$n \neq 2$

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = x$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$)

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{m=2}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = x$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passandosi a variabile continua $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$)

Allora $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \stackrel{x=1/n}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = x$$

$x=2$ de l'Hôpital

(E per concludere posto $x=1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$)

Allora $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n} - \tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Allora, procedendo come prima, a usiamo Taylor $\begin{cases} \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases}$

$$\text{abbiamo che } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - \tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \frac{1}{n!} \operatorname{erctan}(1/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{n-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \operatorname{erctan}(1/n) \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\operatorname{erctan}(1/n)}{1/n} = * \quad \text{de l'Hôpital}$$

$n \neq 2$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{erctan} x}{x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$)

Allora $* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\operatorname{erctan}(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/n - \tan(1/n)}{\tan(1/n)}$$

Allora, procedendo come prima, la usiamo Taylor $\begin{cases} \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases}$

abbiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n - \sin(1/n)}{\tan(1/n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = **$

$$** = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} + n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\left|1 + n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|} = 0$$

Come un infinitesimo di ordine 3

- In alternativa si poteva anche procedere Gi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \frac{1}{n!} \operatorname{erctan}(1/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{n-2} \cdot \frac{n}{n!} \cdot n \operatorname{erctan}(1/n) \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n!} \frac{\operatorname{erctan}(1/n)}{1/n} = * \quad \text{de l'Hôpital}$$

$n! = 2$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passerei a variabile continua $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{erctan} x}{x} \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$)

Allora $* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n!} \frac{\operatorname{erctan}(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/n - \tan(1/n)}{\tan(1/n)}$$

Allora, procedendo come prima, la usiamo Taylor $\begin{cases} \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases}$

abbiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n - \sin(1/n)}{\tan(1/n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n - (\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3}))}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2})} = **$

per usare il criterio del confronto asintotico

$$** = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(\frac{1}{6} + n^3 o(\frac{1}{n^3}))}{(1 + n^2 o(\frac{1}{n^2}))} = 0 \quad \text{Come un infinitesimo di ordine 1}$$

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n - \sin(1/n)}{\tan(1/n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n} \frac{(\frac{1}{6} + n^3 o(\frac{1}{n^3}))}{(1 + n^2 o(\frac{1}{n^2}))} = \frac{1}{6}$

quindi la serie assegnata si comporta come la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge