# Lezione n. 1: Serie numeriche –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

# Disclaimer



Firenze, 8/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

# Disclaimer



Firenze, 8/03/2020

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

n_0 è un numero naturale fissato

si abbia che $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

Si abbia che $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n^{\alpha}} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (cioè converge $\iff \alpha > 1$)

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

si abbia che $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora:

1. se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)
2. se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

si abbia che $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

2. Se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge

3. Se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

## Serie numeriche

Teorema ( criterio del confronto asintotico )

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\underline{\alpha > 0}$

si abbia che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0 < \lambda < +\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ( Cioè converge $\iff \alpha > 1$ )
2. Se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
3. Se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

---

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha>0$

si abbia che $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^{\alpha}} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0<\lambda<+\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (cioè converge $\iff \alpha>1$)
2. Se $\lambda=0$ e $\alpha>1$ la serie converge
3. Se $\lambda=+\infty$ e $\alpha\le 1$ la serie diverge.

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $b_n\neq 0$ definitivamente.

Allora: 1. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

si abbia che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0<\lambda<+\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\iff \alpha > 1$ )
2. Se $\lambda = 0$ e $\alpha > 1$ la serie converge
3. Se $\lambda = +\infty$ e $\alpha \leq 1$ la serie diverge.

---

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $b_n \neq 0$ definitivamente.

Allora:

1. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere

2. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
e $\sum b_n$ converge
allora $\sum a_n$ converge

## Serie numeriche

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che per qualche $\alpha > 0$

si abbia che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n^\alpha} = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Allora:

1. Se $0<\lambda<+\infty$, la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (cioè converge $\iff \alpha>1$ )
2. Se $\lambda=0$ e $\alpha>1$ la serie converge
3. Se $\lambda=+\infty$ e $\alpha\leq 1$ la serie diverge.

---

Spesso questo criterio è formulato nella seguente maniera più generale:

Teorema (criterio del confronto asintotico)

Siano $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi con $b_n \neq 0$ definitivamente.

Allora:

1. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere
2. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge
3. Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge allora $\sum a_n$ diverge

<u>Esempio:</u>

Consideriamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

<u>Esempio:</u>

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

Allora: $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$

$\alpha$ da determinarsi

<u>Esempio:</u>

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

Allora: $\lim_{n\to+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha \text{ da determinarsi}}}{n^\alpha} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{1}{n+2} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{n} + o\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{\text{uso Taylor}}\Big)}$.

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{n+2}\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{n+2}\left(\underbrace{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{uso Taylor}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n}+n\,o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1}$$

$\alpha$ da determinarsi

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\text{uso Taylor}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to+\infty}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n} + n\, o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to+\infty}}$$

$\alpha$ da determinarsi

$$\underset{\text{Se } \alpha=2}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{n}{n} + n\, o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 \iff \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+2}\arctan(1/n)}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1}$$

Esempio 1

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. Per studiare il comportamento della serie trascuriamo momentaneamente la condizione necessaria per la convergenza (la recupereremo a posteriori) ed andiamo ad applicare il criterio del confronto asintotico nella sua prima versione.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha \text{ da determinarsi}}}{n^{\alpha}} \frac{1}{n+2} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\uparrow \text{ uso Taylor}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \underbrace{\frac{n}{n+2}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to+\infty}} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n} + n\, o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n\to+\infty}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } \alpha=2}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2}\left(\frac{n}{n} + n\, o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+2}\arctan(1/n)}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{n+2}\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Quindi la serie assegnata ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente e quindi è essa stessa convergente.

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan(1/n) \underset{\underset{\text{se } \alpha=2}{\uparrow}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n}$$

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} \frac{1}{n+2} \arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot n \arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} \frac{\arctan(1/n)}{1/n} = *$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$)

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{n+2}\arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot n\arctan(1/n) \underset{\text{se }\alpha=2}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = *$$

( E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$ )

Allora $* = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ■

• In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{n+2}\arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot n\arctan(1/n) \underset{\text{se } \alpha=2}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = *$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$)

Allora $\displaystyle * = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n\geq1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ∎

---

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin 1/n}{\tan(1/n^2)}$$

Allora, procedendo come prima, e usando Taylor
$$\begin{cases}\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\\ \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\end{cases}$$

abbiamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})}{\tan(1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{1}{n+2}\arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot n\arctan(1/n) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{se } \alpha=2}}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = *$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$)

Allora $* = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ∎

---

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin 1/n}{\tan(1/n^2)}$$

Allora, procedendo come prima, e usiamo Taylor $\begin{cases}\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{cases}$

abbiamo che $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})}{\tan(1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = **$$

$$** = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left|\frac{1}{6}+n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|}{\left|1+n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|} = 0$$

Come un infinitesimo di ordine 1

- In alternativa si poteva anche procedere così:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\frac{1}{n+2}\arctan(1/n) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-2}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot n\arctan(1/n) \underset{\text{se } \alpha=2}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\,\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = *$$

(E per concludere posto $x = 1/n$ e passando a variabile continua $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$)

Allora $* = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}\frac{\arctan(1/n)}{1/n} = 1$ quindi la serie assegnata converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ∎

---

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\operatorname{sen}(1/n)}{\tan(1/n^2)}$$

Allora, procedendo come prima, ci usiamo Taylor $\begin{cases}\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\\ \operatorname{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{cases}$

abbiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan(1/n^2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = **$

per usare il criterio del confronto asintotico

$$** = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\left[\frac{1}{6}+n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}{\left[1+n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = 0$$

Come un infinitesimo di ordine 1

Allora $\lim_{n\to+\infty} n\,\frac{1/n - \operatorname{Sen}(1/n)}{\tan(1/n)} = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}\,\frac{\left[\frac{1}{6}+n^3 o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]}{\left[1+n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]} = \frac{1}{6}$

quindi la serie assegnata si comporta come la serie armonica $\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ che diverge ∎