Lezione n. 2: Serie numeriche –parte 2–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 8/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni
non sarà sempre omogenea, in dipendenza
dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 8/03/2020

Teorema (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ e $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$

hanno lo carattere

<u>Teorema</u> (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

hanno lo carattere, ovvero si ha che

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx .}$$

Teorema (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

hanno lo carattere, ovvero si ha che

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Esempi:

Dal criterio dell'integrale segue subito che la serie armonica $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente

Teorema (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

hanno lo carattere, ovvero si ha che

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Esempio:

Dal criterio dell'integrale segue subito che la serie armonica $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente

infatti $\lim_{m \to +\infty} \int_{n_0}^{m} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{m \to +\infty} \left(\ln(m) - \ln(n_0)\right) = +\infty$.

Teorema (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora:
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$
hanno lo carattere, ovvero si ha che
$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \le \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Esempio 3

Dal criterio dell'integrale segue subito che la serie armonica $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente infatti $\lim_{m \to +\infty} \int_{n_0}^{m} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{m \to +\infty} \left(\ln(m) - \ln(n_0) \right) = +\infty$. Inoltre dal criterio del confronto serie-integrale (e dalle proprietà degli integrali impropri) si ha che la serie armonica generalizzata $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$.

Teorema (criterio del confronto serie-integrale)

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ e sia $f: [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua positiva e decrescente. Allora:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{e} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

hanno lo carattere, ovvero si ha che

$$\int_{n_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \le \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Esempi:

Dal criterio dell'integrale segue subito che la serie armonica $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente infatti $\lim_{m \to +\infty} \int_{n_0}^{m} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{m \to +\infty} \left(\ln(m) - \ln(n_0)\right) = +\infty$. Inoltre dal criterio del confronto serie-integrale (e dalle proprietà degli integrali impropri) si ha che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Ifatti è sufficiente ricordare che $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Esempio 4

usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ è divergente.

Esempio 4

Usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ è divergente.
Infatti, se calcoliamo $\lim_{m\to+\infty} \int_2^m \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \left(\ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))\right) = +\infty$

<u>Esempio 4</u>

usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ è divergente.
Infatti, se calcoliamo $\lim_{m\to+\infty}\int_2^m \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{m\to+\infty}\left(\ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))\right) = +\infty$ da cui segue che l'integrale improprio $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ è divergente $\Rightarrow$ anche $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Esempio 4

usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ è divergente.
Infatti, se calcoliamo $\lim_{m\to+\infty} \int_2^m \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \left(\ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))\right) = +\infty$ da cui segue che l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ è divergente $\Rightarrow$ anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Teorema (criterio della convergenza assoluta)

Se converge $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$, allora converge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e vale che: $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$

Definizione: La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$

Esempio 4

Usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ è divergente.
Infatti, se calcoliamo $\lim_{m\to+\infty} \int_2^m \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{m\to+\infty} \left(\ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))\right) = +\infty$ da cui segue che l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ è divergente $\Rightarrow$ anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Teorema (criterio della convergenza assoluta)

Se converge $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$, allora converge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e vale che: $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$

Definizione: La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$.

Esempio 5

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ è convergente. Infatti se consideriamo $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ essa è convergente poiche' $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (criterio del confronto).

Esempio 4

usando il criterio dell'integrale si vede facilmente che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ è divergente.
Infatti, se calcoliamo $\lim_{m\to+\infty}\int_2^m \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{m\to+\infty}\left(\ln(\ln(m)) - \ln(\ln(2))\right) = +\infty$ da cui segue che l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ è divergente $\Rightarrow$ anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Teorema (criterio della convergenza assoluta)

Se converge $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$, allora converge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e vale che: $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$

Definizione: La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$.

Esempio 5

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ è convergente. Infatti se consideriamo $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^2}$ essa è convergente poiché $\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (criterio del confronto). Allora applicando alla serie iniziale il criterio dell'assoluta convergenza si può concludere positivamente ∎

Esempio 6

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Allora vale che: $\boxed{\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Visto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è convergente $\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow}$ converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|$

<u>Esempio 6</u>

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)$. Allora vale che: $\left| \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Visto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ è convergente $\xRightarrow{\text{confronto}}$ converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right) \right|$

$$\Big\Downarrow \text{ assoluta convergenza}$$

converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ ■

Esempio 6

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Allora vale che: $\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Visto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è convergente $\underset{\text{confronto}}{\Longrightarrow}$ converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|$

$$\Big\Downarrow \text{ assoluta convergenza}$$

converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ ■

Esempio 7

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ è convergente (si vede con il criterio di Leibniz) ma non è assolutamente convergente! ■

Esempio 6

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Allora vale che: $\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Visto che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è convergente $\underset{\text{confronto}}{\Rightarrow}$ converge $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|$

$\Downarrow$ assoluta convergenza

converge $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ ∎

Esempio 7

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ è convergente (si vede con il criterio di Leibniz) ma non è assolutamente convergente! ∎

Esempio 8

Si può provare che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin(n)|}{n}$ non è convergente, tuttavia $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}$ converge e

quest'ultimo fatto può essere dimostrato per esempio usando il criterio di Dirichlet per le serie. ∎

Teorema (criterio del rapporto)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, supponiamo che esista il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Allora, se risulta

$$\begin{cases} L < 1, & \Rightarrow \text{la serie converge} \\ L > 1, & \Rightarrow \text{la serie diverge} \\ L = 1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (criterio del rapporto)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, supponiamo che esista il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Allora, se risulta

$$\begin{cases} L < 1, & \Rightarrow \text{la serie converge} \\ L > 1, & \Rightarrow \text{la serie diverge} \\ L = 1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (criterio della radice)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ supponiamo che esista il limite $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora, se risulta

$$\begin{cases} L < 1, & \Rightarrow \text{la serie converge} \\ L > 1, & \Rightarrow \text{la serie diverge} \\ L = 1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (Criterio del rapporto)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, supponiamo che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Allora, se risulta

$$\begin{cases} L<1, & \Rightarrow \text{ la serie converge} \\ L>1, & \Rightarrow \text{ la serie diverge} \\ L=1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (Criterio della radice)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ supponiamo che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora, se risulta

$$\begin{cases} L<1, & \Rightarrow \text{ la serie converge} \\ L>1, & \Rightarrow \text{ la serie diverge} \\ L=1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie.} \end{cases}$$

<u>Teorema</u> (Criterio di Dirichlet)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie le cui successione delle somme parziali è limitata: $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < \underbrace{c}_{\text{costante indipendente da } n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema (Criterio del rapporto)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ e $a_n \neq 0$ definitivamente, supponiamo che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Allora, se risulta

$$\begin{cases} L<1, & \Rightarrow \text{ la serie converge} \\ L>1, & \Rightarrow \text{ la serie diverge} \\ L=1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie} \end{cases}$$

Teorema (Criterio della radice)

Data la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ con $a_n \geq 0$ supponiamo che esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora, se risulta

$$\begin{cases} L<1, & \Rightarrow \text{ la serie converge} \\ L>1, & \Rightarrow \text{ la serie diverge} \\ L=1, & \text{non si può concludere niente riguardo il carattere della serie.} \end{cases}$$

Teorema (Criterio di Dirichlet)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ una serie la cui successione delle somme parziali è limitata: $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < c, \forall n \in \mathbb{N}$

Sia $\{b_n\}$ è una successione a termini positivi, infinitesima e decrescente $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot b_n \text{ converge}}$.

$(b_n \geq 0)$ $\qquad b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad a_{n+1} \leq a_n$

Esempio 10

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\ln(3))^n}$. La serie è a termini positivi (il termine generale è chiaramente infinitesimo poiché $\ln(3) > 1$ e quindi $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(\ln(3))^n} = 0$) e applicando il criterio del rapporto si ha che:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2 / (\ln(3))^{n+1}}{n^2 / (\ln(3))^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(\ln(3))^n}{(\ln(3))^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)} < 1}$$

Quindi, la serie assegnata converge

Esempio 10

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\ln(3))^n}$. La serie è a termini positivi (il termine generale è chiaramente infinitesimo poiché $\ln(3)>1$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(\ln(3))^n}=0$) e applicando il criterio del rapporto si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2/(\ln(3))^{n+1}}{n^2/(\ln(3))^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{(\ln(3))^n}{(\ln(3))^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{\ln(3)} = \frac{1}{\ln(3)} < 1$$

Quindi, la serie assegnata converge.

Esempio 11

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ La serie è a termini positivi $\forall n\in\mathbb{N}$ e applicando il criterio della radice:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1}$$

Quindi per il criterio della radice la serie diverge.

<u>Teorema</u> (criterio di Leibniz)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tale che:

1. $a_n \geq 0$
2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
3. $a_{n+1} \leq a_n$

Allora la serie è convergente.

Teorema (criterio di Leibniz)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tale che:

1. $a_n \geq 0$
2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
3. $a_{n+1} \leq a_n$

Allora la serie è convergente.

Esempio 12

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ risulta convergente grazie al criterio di Leibniz. ■

<u>Teorema</u> (criterio di Leibniz)

Sia $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tale che:

1. $a_n \geq 0$
2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
3. $a_{n+1} \leq a_n$

Allora la serie è convergente.

<u>Esempio 12</u>

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ risulta convergente grazie al criterio di Leibniz. ■

<u>Esempio 13</u>

$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ Questa serie è a segni alterni essendo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$. Inoltre $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

e poi $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \ \forall n \Rightarrow$ la serie è convergente grazie al criterio di Leibniz ■