Algoritmo di divisione

Esempio

Dividiamo in $K[x, y]$ *con GLex* $x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1$ *per* $xy^2 - x$ *e* $y^3 - x$*. Il LT del dividendo è* x^6y^3 *che è divisibile per* xy^2*. Dividendo otteniamo* x^5y *come primo quoziente .*

$$
\begin{array}{c|c|c|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \mathrm{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
 & & &
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 \quad |xy^2 - x \qquad |y^3 - x \quad |\text{RESTO}$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \text{RESTO} \\
\hline
\hline
 & x^5y & & \\
\hline
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \text{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & x^5y & & \\
\hline
 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1$	$xy^2 - x$	$y^3 - x$	RESTO
$x^6y^3 - x^6y$	x^5y		
$x^6y + 2x^3y^2 - y + 1$			

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3+2x^3y^2-y+1 & xy^2-x & y^3-x & \text{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
x^6y^3-x^6y & x^5y & & \\
\hline
x^6y+2x^3y^2-y+1 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |xy^2 - x & |y^3 - x & |\mathrm{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\quad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \mathrm{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & x^5y + 2x^2 & & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |xy^2 - x & |y^3 - x & |\text{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y + 2x^2 & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |xy^2 - x & |y^3 - x & |\text{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y + 2x^2 & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
2x^3 - y + 1 & & &
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \text{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & x^5y + 2x^2 & & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
2x^3 - y + 1 & & &
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |xy^2 - x & |y^3 - x & |\text{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y + 2x^2 & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\quad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
\quad - y + 1 & \longrightarrow & & 2x^3
\end{array}$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |{\color{blue}xy^2} - x & |{\color{blue}y^3} - x & |\text{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y + 2x^2 & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\quad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
\quad {\color{blue}-y} + 1 & \longrightarrow & & 2x^3
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & xy^2 - x & y^3 - x & \text{RESTO} \\
 & \overline{} & \overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & x^5y + 2x^2 & & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
\qquad +1 & \longrightarrow & & 2x^3 - y
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & {\color{blue}xy^2} - x & {\color{blue}y^3} - x & \text{RESTO} \\
\cline{2-3}
x^6y^3 - x^6y & x^5y + 2x^2 & & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\qquad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
\qquad {\color{blue}1} & \longrightarrow & & 2x^3 - y
\end{array}
$$

Esempio di algoritmo di divisione

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3 + 2x^3y^2 - y + 1 & |xy^2 - x & |y^3 - x & |\text{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3 - x^6y & |x^5y + 2x^2 & | & \\
\hline
x^6y + 2x^3y^2 - y + 1 & & & \\
\quad 2x^3y^2 - y + 1 & \longrightarrow & & x^6y \\
2x^3y^2 - 2x^3 & & & \\
\hline
2x^3 - y + 1 & & & \\
0 & \longrightarrow & & 2x^3 - y + 1
\end{array}
$$

Conclusione

Abbiamo ottenuto tramite l'algoritmo di divisione

$$x^6y^3+2x^3y^2-y+1 = (x^5y+2x^2)(xy^2-x)+0(y^3-x)+x^6y+2x^3-y+1$$

Esercizio

Se scambiamo l'ordine dei divisori otteniamo

$$
\begin{array}{llll}
x^6y^3+2x^3y^2-y+1 & |y^3-x & |xy^2-x & |\mathrm{RESTO} \\
 & |\overline{} & |\overline{} & \\
x^6y^3-x^7 & |x^6 & |2x^2 & \\
\hline
x^7+2x^3y^2-y+1 & & & \\
2x^3y^2-y+1 & \longrightarrow & & x^7 \\
2x^3y^2-2x^3 & & & \\
\hline
2x^3-y+1 & & & \\
0 & \longrightarrow & & 2x^3-y+1
\end{array}
$$

da cui

$$x^6y^3+2x^3y^2-y+1=2x^2(xy^2-x)+x^6(y^3-x)+x^7+2x^3-y+1$$

Quindi scambiando l'ordine dei divisori sia i quozienti che il resto cambiano.

Scambiando l'ordine dei divisori

Esercizio

Verificare che dividendo con Lex $xy^2 - x$ *per* $xy + 1$ *e* $y^2 - 1$ *otteniamo*

$$xy^2 - x = y(xy + 1) + 0(y^2 - 1) - y - x$$

mentre scambiando l'ordine dei divisori:

$$xy^2 - x = 0(xy + 1) + x(y^2 - 1)$$

Osserviamo dall'esercizio precedente che la condizione

$$\text{resto della divisione di } f \text{ per } \{f_1, \ldots, f_h\} \qquad = \qquad 0$$

è una condizione sufficiente ma non necessaria affinché $f \in (f_1, \ldots, f_h)$. Questo è in contrasto con quanto accade per polinomi in una variabile. Ovvieremo a questo inconveniente definendo un insieme opportuno di generatori per l'ideale $(f_1, \ldots, f_h)$, "adattato" all'ordine monomiale scelto.

Il Teorema

L'algoritmo di divisione si riassume nel seguente risultato

Teorema

Sia fissato un ordine monomiale in $K[x_1, \ldots, x_n]$. *Siano dati*

$$f, f_1, \ldots, f_h \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

Allora esistono

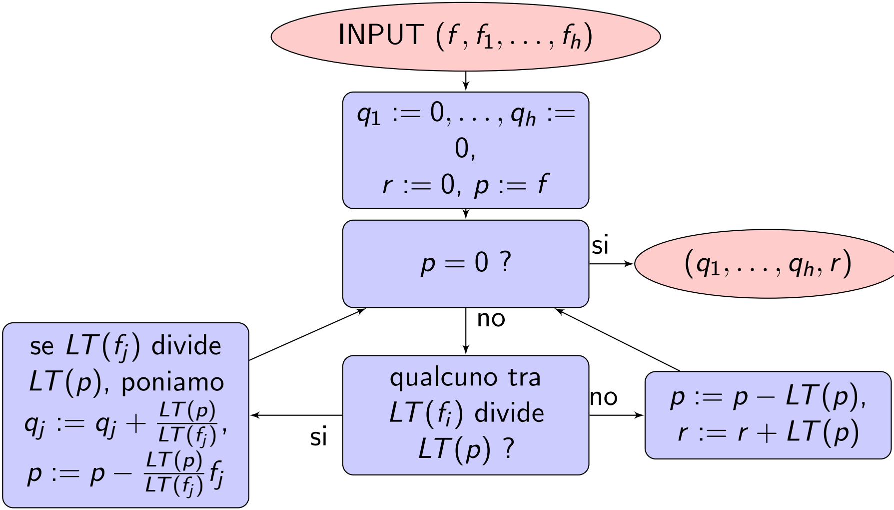
$$q_1, \ldots, q_h, r \in K[x_1, \ldots, x_n]$$

tali che

- *i)*$f = \sum q_i f_i + r$
- *ii) nessun termine di* r *è divisibile per qualcuno tra* $LT(f_1), \ldots, LT(f_h)$.
- *iii) se* $q_i f_i \neq 0$ *vale* $\mathrm{LT}(f) \geq \mathrm{LT}(q_i f_i)$.

In piú esiste un algoritmo che determina $q_1, \ldots, q_h, r$.

Il diagramma di flusso



Dimostrazione guardando il diagramma di flusso

Dimostrazione.

Si introduce un resto ausiliario p, in modo che l'equazione $f = \sum_{i=1}^{h} f_i q_i + r + p$ vale con le posizioni iniziali di q_i, r, p e continua a valere ad ogni passo dell'algoritmo. Quando si arriva all'output, tutti i termini in r provengono da termini di p che non sono divisibili per nessuno dei $LT(f_i)$. Ad ogni passo, ciascun termine di q_i, moltiplicato per $LT(f_i)$, risulta $\leq LT(p)$ rispetto al passo precedente. Come conseguenza, ciascun termine di $q_i f_i$ risulta $\leq LT(f)$. L'algoritmo termina perché, sia nel ciclo sinistro che nel ciclo destro, la successione dei $LT(p)$ è decrescente, e ogni ordine monomiale è un buon ordinamento per la **??**. Pertanto, al termine, avremo $p = 0$. $\square$