Lezione n. 3: Serie di funzioni –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 10/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni
non sarà sempre omogenea, in dipendenza
dell'apparecchio usato per le loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 10/03/2020

Serie di funzioni

- Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni reali di una variabile reale definite su un comune intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo associare a tale successione la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

Serie di funzioni

- Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni reali di una variabile reale definite su un comune intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo associare a tale successione la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.
- Tale serie si dice convergente (puntualmente) in I, se essa è convergente $\forall x \in I$, ovvero la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente su $I \Leftrightarrow$ è convergente la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\}$ dove, al solito, $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ assumendo $n_0 = 1$.

Serie di funzioni

- Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni reali di una variabile reale definite su un comune intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo associare a tale successione la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Tale serie si dice convergente (puntualmente) in I, se essa è convergente $\forall x \in I$, ovvero la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente su $I \iff$ è convergente la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\}$ dove, al solito, $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ assumendo $n_0 = 1$.

- In analogia con le serie numeriche diremo che se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge per $x \in I$ fissato
$\Rightarrow \sum^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente.

Serie di funzioni

- Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni reali di una variabile reale definite su un comune intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Possiamo associare a tale successione la serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Tale serie si dice convergente (puntualmente) in I, se essa è convergente $\forall x \in I$, ovvero la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ è convergente su $I \iff$ è convergente la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\}$ dove, al solito, $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ assumendo $n_0 = 1$.

- In analogia con le serie numeriche diremo che se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |f_n(x)|$ converge per $x \in I$ fissato $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge assolutamente.

- Se una serie di funzioni $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente in un sottoinsieme $J \subseteq I$ $\Rightarrow \forall x \in J$ la somma della serie è un numero reale che possiamo denotare con $f(x)$ (ovvero $f(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $x \in J$). Risulta così definita una funzione reale $f : J \to \mathbb{R}$

<u>Definizione</u> (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I.

Definizione (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I. Ovvero $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{i=n_0}^{n} f_i(x) \right| = 0$.

Definizione (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I. Ovvero $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| f(x) - \sum_{i=n_0}^{n} f_n(x) \right| = 0$.

Osservazione

Se le funzioni $f_n(x)$ sono continue su I, allora anche le funzioni $S_n(x)$ sono continue sullo stesso intervallo I, quindi se la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I (ovvero $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in I) allora $f(x)$ è continua sull'intervallo I.

Definizione (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I. Ovvero $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| f(x) - \sum_{n_0}^{n} f_n(x) \right| = 0$.

Osservazione

Se le funzioni $f_n(x)$ sono continue su I, allora anche le funzioni $S_n(x)$ sono continue sullo stesso intervallo I, quindi se la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I (ovvero $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in I) allora $f(x)$ è continua sull'intervallo I.

Esempio 1

Preso $I = [0,1]$ consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ che si riscrive come $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.

Definizione (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I. Ovvero $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| f(x) - \sum_{n_0}^{n} f_n(x) \right| = 0$.

Osservazione

Se le funzioni $f_n(x)$ sono continue su I, allora anche le funzioni $S_n(x)$ sono continue sullo stesso intervallo I, quindi se la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I (ovvero $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in I) allora $f(x)$ è continua sull'intervallo I.

Esempio 1

Preso $I = [0,1]$ consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ che si riscrive come $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n$.

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$. Per $x \in [0,1)$ la serie è geometrica di ragione x e convergente.

Pertanto si ha che $\boxed{(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x)\frac{x}{1-x} = x.}$

Definizione (Convergenza uniforme)

La serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice uniformemente convergente in I alla funzione $f(x)$ se la successione delle somme parziali $\{S_n(x)\} = \{\sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)\}$ converge uniformemente alla funzione $f(x)$ in I. Ovvero $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} \left| f(x) - \sum_{n_0}^{n} f_n(x) \right| = 0$.

Osservazione

Se le funzioni $f_n(x)$ sono continue su I, allora anche le funzioni $S_n(x)$ sono continue sullo stesso intervallo I, quindi se la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I (ovvero $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ in I) allora $f(x)$ è continua sull'intervallo I.

Esempio 1

Preso $I = [0,1]$ consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ che si riscrive come $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n$

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-x)x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$. Per $x \in [0,1)$ la serie è geometrica di ragione x e convergente.

Pertanto si ha che $(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x)\frac{x}{1-x} = x$.

Poi, per $x = 1$, tutte le $f_n(x) = (1-x)x^n$ sono nulle $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(1-x)x^n$ converge anche per $x=1$ ed ha somma zero

Si può quindi concludere che la serie converge su tutto l'intervallo $I = [0,1]$ e in particolare la sua somma (ovvero la sua funzione limite $f(x)$) è data dalla seguente espressione:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}}$$

Si può quindi concludere che la serie converge su tutto l'intervallo $I = [0,1]$ e in particolare la sua somma (ovvero la sua funzione limite $f(x)$) è data dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è discontinua su $I = [0,1]$ e possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ <u>non</u> converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$.

Si può quindi concludere che la serie converge su tutto l'intervallo $I = [0,1]$ e in particolare la sua somma (ovvero la sua funzione limite $f(x)$) è data dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ è discontinua su } I = [0,1]$$

e possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ <u>non</u> converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$. ■

<u>Esempio 2</u>

Consideriamo adesso la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ per $x \in [0,k]$. Abbiamo già visto che

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}(1-x^n)$$

(ricordo che se considero $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$)

Si può quindi concludere che la serie converge su tutto l'intervallo $I = [0,1]$ e in particolare la sua somma (ovvero la sua funzione limite $f(x)$) è data dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ è discontinua su } I = [0,1]$$

e possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ <u>non</u> converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$.

■

<u>Esempio 2</u>

Consideriamo adesso la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ per $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Abbiamo già visto che

$$S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}(1 - x^n) \;\boxed{\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{ovvero} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (\mathrm{I})}$$

Si può quindi concludere che la serie converge su tutto l'intervallo $I = [0,1]$ e in particolare la sua somma (ovvero la sua funzione limite $f(x)$) è data dalla seguente espressione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ è discontinua su } I = [0,1]$$

e possiamo concludere che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1})$ <u>non</u> converge uniformemente alla funzione limite $f(x)$. ∎

<u>Esempio 2</u>

Consideriamo adesso la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ per $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Abbiamo già visto che

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}(1-x^n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{ovvero} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad (I)$$

(ricordo che se considero $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$)

Dalla relazioni (I) abbiamo che $\left| S_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| = \left| \frac{x}{1-x}(1-x^n) - \frac{x}{1-x} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\leq 1} \cdot x^n = \ast$

$\ast \leq x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ e $\left| S_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon \iff n > \frac{\ln(\varepsilon^{-1})}{\ln 2}$ Abbiamo convergenza uniforme!! Per $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ∎

Riportiamo due risultati visti nel caso delle successioni di funzioni, per il caso particolare delle serie di funzioni:

Riportiamo due risultati visti nel caso delle successioni di funzioni, per il caso particolare delle serie di funzioni:

Teorema 1

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni $f_n(x)$ continue su $I = [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che tale serie converge uniformemente alla funzione $f(x)$ su I. Allora si ha che:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Riportiamo due risultati visti nel caso delle successioni di funzioni, per il caso particolare delle serie di funzioni:

Teorema 1

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni $f_n(x)$ continue su $I = [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che tale serie converge uniformemente alla funzione $f(x)$ su I. Allora si ha che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2

Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, dove le funzioni $f_n(x)$ hanno tutte derivate prime continue in $I = [a,b]$. Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converga uniformemente in I e che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x)$ su I.

Riportiamo due risultati visti nel caso delle successioni di funzioni, per il caso particolare delle serie di funzioni:

Teorema 1

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni $f_n(x)$ continue su $I=[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che tale serie converge uniformemente alla funzione $f(x)$ su I. Allora si ha che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2

Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, dove le funzioni $f_n(x)$ hanno tutte derivate prime continue in $I=[a,b]$. Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converga uniformemente in I e che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x)$ su I.

Riportiamo due risultati visti nel caso delle successioni di funzioni, per il caso particolare delle serie di funzioni:

Teorema 1

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni $f_n(x)$ continue su $I = [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che tale serie converga uniformemente alla funzione $f(x)$ su I. Allora si ha che:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema 2

Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, dove le funzioni $f_n(x)$ hanno tutte derivate prime continue in $I = [a,b]$. Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converga uniformemente in I e che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f(x)$ su I. Allora la funzione $f(x)$ è derivabile in I e vale che:

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)}$$