

Stima & Identificazione / Stima e Navigazione di Robot Mobili

Compito del 20 Giugno 2019, ore 8:30, Aula 206, Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il seguente sistema stocastico:

$$\begin{cases} s_k - \frac{1}{2}s_{k-1} = w_k - \frac{2}{3}w_{k-1} \\ y_k = s_k + v_k \\ w_k = \text{swn}(0, \frac{21}{20}) \\ v_k = \text{swn}(0, \frac{3}{5}) \perp w_j \end{cases} \quad \forall k, j$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se il segnale y_k è stazionario.
- b) Determinare spettri e densità spettrali dei segnali s_k e y_k .
- c) Determinare, se possibile, modello ARMA di y_k .
- d) Determinare funzioni di auto-covarianza dei segnali s_k e y_k .
- e) Determinare modello alle innovazioni del segnale y_k

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Ke_k \\ y_k &= C\hat{x}_k + e_k \end{aligned}$$

Problema 2 - Si consideri il problema di stima della legge oraria lineare

$$\begin{cases} p(t) = p_0 + \dot{p}_0 t + v(t) \\ v(t) = \text{swn}(0, \sigma_v^2) \end{cases}$$

da osservazioni della posizione $y_i = p(iT)$ per $i = 1, 2, \dots$. Si indichi con \hat{x}_k la stima di $X \triangleq [p_0, \dot{p}_0]^T$ basata sulle osservazioni y_1, \dots, y_k e con P_k la relativa matrice di covarianza.

a) Verificare che, in assenza di informazione a priori su X ($\Omega_X = \Sigma_X^{-1} = 0$):

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\sigma_v^2}{k(k-1)} \begin{bmatrix} 2(2k+1) & -\frac{6}{T} \\ -\frac{6}{T} & \frac{12}{(k+1)T^2} \end{bmatrix} \\ \hat{x}_k &= \frac{1}{k(k-1)} \begin{bmatrix} 2(2k+1) & -\frac{6}{T} \\ -\frac{6}{T} & \frac{12}{(k+1)T^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k y_i \\ T \sum_{i=1}^k i y_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Verificare che la stima \hat{x}_k può essere determinata ricorsivamente come segue:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{k} \\ \frac{6}{k(k+1)T} \end{bmatrix} (y_k - [1, kT] \hat{x}_{k-1})$$

[Suggerimento - Utilizzare le seguenti formule $\sum_{i=1}^k i = k(k+1)/2$ e $\sum_{i=1}^k i^2 = k(k+1)(2k+1)/6$.]

Problema 3 - Si consideri il seguente modello di moto a *velocità quasi costante*

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + T_k s_k + \frac{T_k^2}{2} a_k \\ s_{k+1} &= s_k + T_k a_k \end{aligned}$$

dove p_k è la posizione di un oggetto mobile, s_k la velocità, $T_k = 1 [s]$ l'intervallo di campionamento, a_k un disturbo di accelerazione esponenzialmente correlato con fattore di correlazione $\varrho = 9/10$, media nulla e varianza $\sigma_a^2 = 1 [m^2/s^4]$. Un sensore, non calibrato, fornisce una misura di posizione mediante il seguente modello di osservazione

$$\begin{aligned} y_k &= p_k + v'_k \\ v'_k &= \text{swn}(\bar{v}, \sigma_v^2) \end{aligned}$$

con varianza del rumore di misura $\sigma_v^2 = 1/4 [m^2]$ e media \bar{v} non nota.

a) Determinare (dopo aver definito opportunamente il vettore di stato x_k , un nuovo disturbo di processo w_k e rumore di misura v_k) un modello

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + D_k w_k \\ y_k &= C_k x_k + v_k \\ w_k &= \text{swn}(0, Q_k), v_k = \text{swn}(0, R_k) \end{aligned}$$

che soddisfa le ipotesi standard del filtro di Kalman.

Problema 4 - Si consideri il seguente modello di moto per la navigazione di un robot (veicolo) mobile:

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) &= [s(t) + \delta s(t)] \cos \varphi(t) \\ \dot{\eta}(t) &= [s(t) + \delta s(t)] \sin \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \gamma + \delta \gamma(t) \end{cases}$$

dove: (ξ, η) è la posizione del baricentro del robot e φ il suo angolo di orientazione; s e γ sono i comandi di velocità e sterzata; δs e $\delta \gamma$ sono le relative perturbazioni casuali indipendenti (disturbi di processo) a media nulla e di deviazioni standard σ_s e σ_γ . I sensori a bordo del robot misurano, con errori di misura indipendenti a media nulla e di deviazioni standard σ_r e σ_θ , la distanza $r(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}$ e l'angolo $\theta(t) = \text{atan2}(\xi(t), \eta(t)) - \varphi(t)$.

a) Posto $x = [\xi, \eta, \varphi]^T$, $u = [s, \gamma]^T$, $w = [\delta s, \delta \gamma]^T$, $y = [r, \theta]^T + v$ e considerando un intervallo di campionamento $T_k = t_{k+1} - t_k$, determinare, con il metodo di Eulero, il modello di moto a tempo discreto

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f_k(x_k, u_k, w_k) \\ y_k &= h_k(x_k, v_k) \end{cases} \quad (1)$$

b) Calcolare i Jacobiani necessari all'implementazione del filtro di Kalman esteso per il modello (1).

c) Assumendo v_k distribuito in modo normale (Gaussiano), determinare la funzione di verosimiglianza $\ell_k(y|x)$ necessaria all'implementazione di un filtro a particelle per il modello (1).

Problema 5 - Si spieghi mediante uno pseudo-codice come si può applicare il filtro di Kalman unscented ad un sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} &= f_k(x_k, w_k) \\ y_k &= h_k(x_k, v_k) \end{cases}$$

con disturbo di processo e rumore di misura non additivi. Nello pseudo-codice si faccia riferimento alla funzione $[\bar{y}, \Sigma_Y, \Sigma_{XY}] = UT(\bar{x}, \Sigma_X, g(\cdot))$ per il calcolo della trasformata unscented.