

## Stima & Identificazione

*Compito del 19 Giugno 2017, ore 8:30, Aula 206, Santa Marta*

**Problema 1** - Si consideri il segnale stocastico  $y_t$  generato come segue:

$$\begin{cases} y_t = s_t + v_t \\ s_t + \frac{9}{10} s_{t-1} = w_t \\ w_t = wn(0, 111) \\ v_t = wn(0, 1050) \\ w_t \perp v_t \end{cases}$$

- a) Dire, giustificando la risposta, se tale segnale risulta stazionario.
- b) Determinare, se possibile, un modello ARMA del segnale ed una sua rappresentazione di stato alle innovazioni.
- c) Determinare, se possibile, lo spettro  $\Phi_y(z)$  e la densità spettrale  $\varphi_y(\omega)$  del segnale.
- d) Determinare la funzione di auto-covarianza  $R_y(k)$  del segnale.
- e) Determinare un modello AR di ordine minimo che fornisca gli stessi valori di  $R_y(0), R_y(1), R_y(2)$  calcolati al punto d).
- f) [Solo per il corso a 9 cfu] Determinare i predittori MMSE  $\hat{G}_T(z)$  del segnale a  $T = 1, 2, 3$  passi ed i relativi errori (MSE) di predizione.

**Problema 2** - Si consideri il modello di stato a tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [1 \quad 0] x + v \\ w = wn(0, 81) \\ v = wn(0, 16) \\ w \perp v \end{cases}$$

- a) Determinare il filtro di Kalman stazionario.
- b) Determinare il corrispondente MMSE.
- c) Determinare gli autovalori della matrice di transizione del filtro.

**Problema 3** - Un segnale osservato  $y(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è della forma

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(\pi t) + a_3 \cos(\pi t) + a_4 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + a_5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + v(t)$$

dove  $v(t) = wn(0, \sigma^2)$  è un errore di misura e  $\{a_i\}_{i=0}^5$  sono parametri da stimare.

- (a) Si imposti il problema della stima ricorsiva dei parametri  $\{a_i\}_{i=0}^5$  dalle osservazioni discrete  $\{y(t); t = 1, 2, 3, \dots\}$  assumendo di non avere alcuna informazione a priori sui valori di tali parametri.
- (b) Assumendo di osservare  $y(t) = 1$  per ogni  $t$ , a quali valori tendono le stime dei parametri

$\{\hat{a}_i(t)\}_{i=0}^5$  per  $t \rightarrow \infty$  ?

(c) Assumendo di osservare  $y(t) = 3 \sin\left(\pi T + \frac{\pi}{6}\right)$  per ogni  $t$ , a quali valori tendono le stime dei parametri  $\{\hat{a}_i(t)\}_{i=0}^5$  per  $t \rightarrow \infty$  ?

**Problema 4** - Si consideri una variabile aleatoria scalare  $X$  di media  $\bar{x} = 12$  e di varianza  $\sigma_X^2 = 1$ . Sia  $Y = X^2$ .

(a) Valutare, in modo approssimato, media  $\bar{y}$  e varianza  $\sigma_Y^2$  di  $Y$  utilizzando i due metodi della trasformata unscented e della linearizzazione nell'intorno di  $\bar{x}$ .

(b) Assumendo di osservare il valore  $y = 105$  di  $Y = X^2 + V$ , con  $V$  errore di misura indipendente da  $X$  a media nulla e di deviazione standard  $\sigma_V = 1$ , determinare la stima BLUE di  $X$  basata su  $Y = y$  con i due metodi di cui al punto (a).

**Problema 5** - Si consideri il sistema a tempo-continuo (dinamica logistica)

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + w = rx\left(1 - \frac{x}{c}\right) + w \\ y &= x + v \\ w &= wn(0, q) \\ v &= vn(0, r) \\ w &\perp v \end{cases}$$

Tenendo conto che la soluzione dell'equazione differenziale, per  $w(t) \equiv 0$ , è data da

$$x(t) = \frac{c}{1 + \left(\frac{c}{x(0)} - 1\right) e^{-rt}}$$

e che l'evoluzione della varianza  $p(t) = E[(x(t) - E[x(t)])^2]$  è, in prima approssimazione, descritta dall'equazione differenziale di Lyapunov:

$$\dot{p}(t) = 2ap(t) + q$$

con

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0))$$

si descriva in dettaglio l'algoritmo di filtraggio ibrido che stima lo stato  $x(t)$  utilizzando il suddetto modello a tempo-continuo e le osservazioni discrete

$$y_k = y(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \dots$$

a partire da condizioni iniziali  $\hat{x}_{1|0}$  e  $p_{1|0}$ .