Sismologia : studio delle "piccole deformazioni" crostali su piccoli intervalli di tempo [evento terremoto]

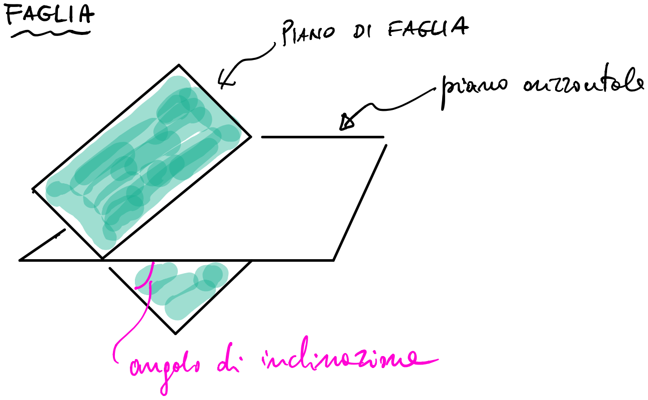
Strumento matematico : teoria dell'elasticità linearizzata.

La crosta terrestre è vista come un continuo elastico omogeneo e isotropo (modello semplificato!)

MECCANISMO FISICO : accumulo di energia in regime quasi-statico (scala temporale = anni / decenni / secoli) in una zona crostale per effetto di forze tettoniche fino ad un carico limite oltre il quale si genera una "rottura" (faglia) oppure su una faglia pre-esistente l'attrito statico fra i due bordi della faglia non è sufficiente a impedire lo slittamento. CONSEGUENZA : liberazione in un tempo molto breve (secondi / decine di secondi) dell'energia di deformazione accumulatasi nella fase precedente.

COSA SI MISURA ? Il moto del suolo, cioè lo spostamento $\underline{u}(\underline{x},t)$ della generica particella di terreno superficiale per effetto del passaggio dell'onda elastica liberata al momento dell'evento. Noto $\underline{u}(\underline{x},t)$ si determina il suo gradiente e di conseguenza l'energia associata (magnitudo)

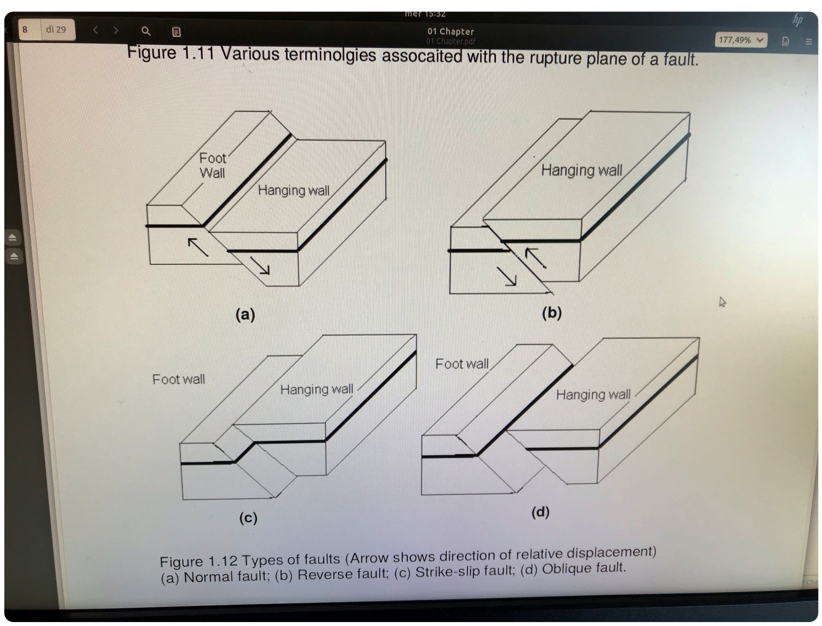
FAGLIA



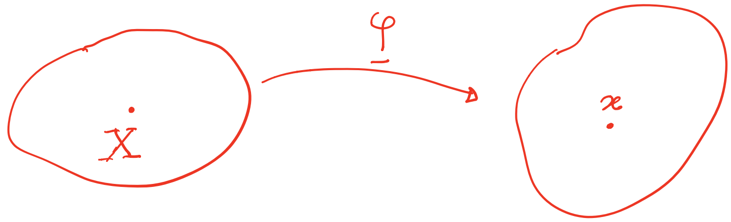
La faglia è una discontinuità nella roccia che forma la crosta terrestre

Esistono varie tipologie di faglie classificabili in base al tipo di spostamento (relativo al piano orizzontale) che il piano di faglia può compiere (su scala di tempo geologico).

Esempi



BREVI RICHIAMI SULLA DEFORMAZIONE DI UN CONTINUO



$\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X}, t)$ deformazione

$\underline{u}(X, t) = \underline{\varphi}(X, t) - \underline{X}$ spostamento

Sia Y in un intorno di $\underline{X}$

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{Y}, t) + \operatorname{Grad} \underline{u}\big|_Y (\underline{X} - \underline{Y}) + o(|\underline{X} - \underline{Y}|)$$

$$\operatorname{Grad} \underline{u} = (\operatorname{Grad} \underline{u})_a + (\operatorname{Grad} \underline{u})_s$$

$$\exists!\ \underline{\omega} : (\operatorname{Grad} \underline{u})_a \underline{w} = \underline{\omega} \times \underline{w} \qquad \forall\, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$$

dove $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}$

Quindi

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underbrace{\boxed{\underline{u}(\underline{Y}, t) + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}(\underline{Y}, t) \times (\underline{X} - \underline{Y})}}_{\text{SPOSTAMENTO RIGIDO}} + \underbrace{\boxed{\mathbb{E}(\underline{X} - \underline{Y})}}_{\text{DEFORMAZIONE}} + o(|X - Y|)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad} \underline{u} + (\operatorname{Grad} \underline{u})^T\right)$$: Tensore di deformazione infinitesima

LO SPOSTAMENTO RIGIDO CONSERVA $|X - Y|$ (distanza) $\forall\, X, Y$

LA DEFORMAZIONE NON CONSERVA $|X - Y|$

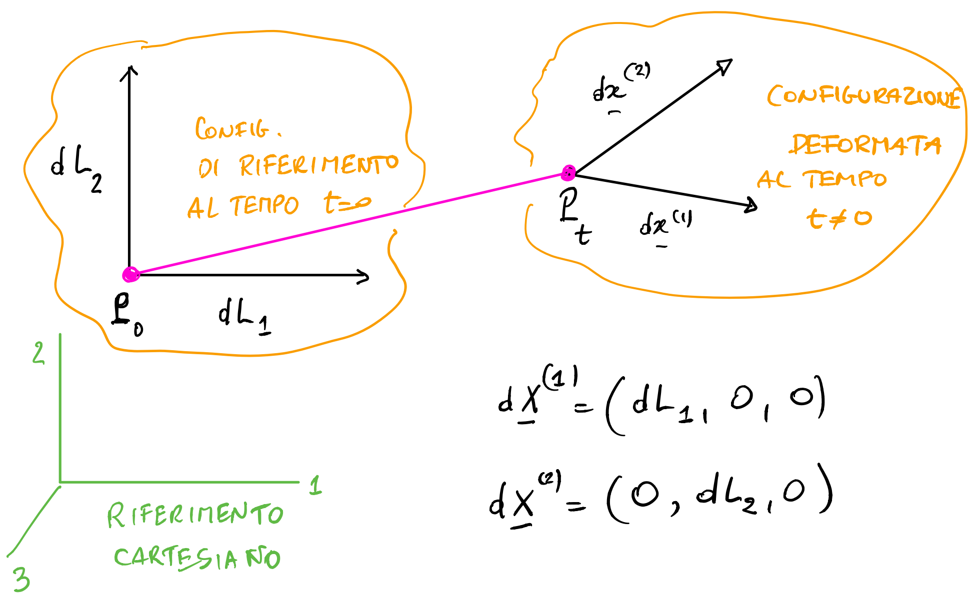
SPOSTAMENTO RIGIDO

- $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{u}(Y,t)\times(\underline{X}-\underline{Y})$: spostamento di X rispetto ad Y dovuto alla sola rotazione attorno all'asse istantaneo che ha la direzione di $\mathrm{rot}\,\underline{u}(Y,t)$
- $\underline{u}(Y,t)$: spostamento di $\underline{Y}$

ANALIZZIAMO LA DEFORMAZIONE INFINITESIMA $\mathbb{E}(X-Y)$:

ha due aspetti distintivi:

- CAMBIO DI LUNGHEZZA di $|X-Y|$
- DISTORSIONE ANGOLARE (RELATIVAMENTE AL RESTO DEL CONTINUO)



$$d\underline{X}^{(1)} = (dL_1, 0, 0)$$

$$d\underline{X}^{(2)} = (0, dL_2, 0)$$

Se $\underline{\varphi}$ è la deformazione $\underline{x} = \underline{\varphi}(\underline{X}, t)$ che porta P_0 in P_t

$$d\underline{x} = \mathrm{Grad}\,\underline{\varphi}\; d\underline{X}$$

Quindi

$$dx_i^{(1)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_k} dX_k = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_1} dL_1$$

$$dx_i^{(2)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_k} dX_k = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_2} dL_2$$

Ricordiamo che lo spostamento è definito come

$$\underline{u}(X,t) = \underline{\varphi}(X,t) - X$$

Quindi

$$dx_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(X_i + u_i(\underline{X},t)\right) dL_1 \quad \Rightarrow$$

$$d\underline{x}^{(1)} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} , \frac{\partial u_2}{\partial X_1}, \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) dL_1$$

e analogamente

$$d\underline{x}^{(2)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} , 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} , \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) dL_2$$

Allungamento in direzione 1 : $(dl_1)^2 = d\underline{x}^{(1)} \cdot d\underline{x}^{(1)} = \left(1 + 2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)(dL_1)^2$

Approssimazione di 1° ordine : $(1+\delta)^{1/2} \cong (1 + \frac{1}{2}\delta) \quad (\delta \ll 1)$

$$dl_1 \cong (1 + \varepsilon_{11}) dL_1 \qquad \left(\varepsilon_{11} = 2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)$$

$$\underbrace{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)}_{\text{GRADIENTE DI DEFORMAZIONE INFINITESIMA}} \qquad \left(\mathbb{E} = (\varepsilon_{ij}) \right)$$

Si noti che

$$\varepsilon_{11} = \frac{dl_1 - dL_1}{dL_1}$$

cioè ε_{11} misura l'allungamento (o accorciamento) <u>relativo</u> di un elemento di linea che è inizialmente disposto lungo la direzione 1

Un ragionamento identico vale per ε_{22} e ε_{33}

Per comprendere il significato di ε_{12} considero

$$d\underline{x}^{(1)} \cdot d\underline{x}^{(2)} = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \frac{\partial u_2}{\partial X_1}, \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}, 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}, \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) dL_1 dL_2$$

Approssimazione di ordine 1 rispetto a ε_{ij}

$$d\underline{x}^{(1)} \cdot d\underline{x}^{(2)} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) dL_1 dL_2$$

ovvero

$$\cos\theta_{12}\, dl_1\, dl_2 = 2\,\varepsilon_{12}\, dL_1\, dL_2$$

$$\cos\theta \left(1 + \varepsilon_{11}\right) dL_1 \left(1 + \varepsilon_{22}\right) dL_2 = 2\,\varepsilon_{12}\, dL_1\, dL_2$$

$$\cos\theta_{12} \left(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) \cong 2\,\varepsilon_{12}$$

SUPPONIAMO CHE ANCHE LA DEFORMAZIONE ANGOLARE SIA INFINITESIMA

CIOE' che

OS1.7

$$\left| \theta_{12} - \frac{\pi}{2} \right| \ll 1$$

Allora $\qquad \varepsilon_{12} \cong \frac{1}{2} \cos \theta_{12}$

e similmente $\qquad \varepsilon_{23} \cong \frac{1}{2} \cos \theta_{23}$

Ricordiamo poi che $\operatorname{tr} \mathbb{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{Div} \underline{u}$ e quindi se $V_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ si deforma in $V_1 = dx_1 dx_2 dx_3$ $= (1+\varepsilon_{11})(1+\varepsilon_{22})(1+\varepsilon_{33}) dX_1 dX_2 dX_3$ si ha, al primo ordine,

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \cong \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{Div} \underline{u}$$

Quindi $\operatorname{Div} \underline{u} = 0 \iff$ conservazione del volume !

EQUAZIONI DEL MOTO

$$\rho\, \partial^2_{tt} u_i = \rho f_i + \sigma_{ij,j} \qquad \rho = \rho(x) \text{ densità}$$

dove σ_{ij} è il Tensore di Cauchy (<u>simmetrico</u>)

$\left(\sigma_{ij,j} \overset{def}{=} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right)$. e f_i è la forza esterna (es. gravità) che in sismologia è ininfluente.

In un continuo elastico

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \qquad \text{(legge di Hooke)}$$

dove $\mathbb{C}$ è un tensore del 4° ordine detto "tensore elastico" eventualmente dipendente da $\underline{X}$ e t ma non da ε_{kl}

La legge di Hooke è lineare e rappresenta bene il comportamento delle rocce terrestri in particolare nell'ambito delle piccole deformazioni.

Il tensore $\mathbb{C}$ dipende dalla natura del mezzo. In ipotesi di isotropia meccanica (la "risposta" del mezzo alla sollecitazione meccanica è indipendente dalle rotazioni) è individuato da due sole funzioni ed ha la forma

$$C_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{kj} \right)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker e λ, μ funzioni di X, t dette moduli di Lamé.

Se λ e μ sono costanti il mezzo è omogeneo.

MEZZO OMOGENEO E ISOTROPO : LEGGE COSTITUTIVA

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu \left(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk} \right) \right] \varepsilon_{kl} =$$

$$= \lambda\, \delta_{ij}\, \mathrm{Div}\, \underline{u} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

Poiché λ e μ sono <u>costanti</u> l'eq. del moto si scrive

$$\rho \ddot{\underline{u}} = \rho \underline{f} + \mathrm{Div}\left(\lambda \,\mathrm{Div}\, \underline{u}\, \mathbb{I} + 2\mu \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\, u + (\mathrm{Grad}\, u)^T\right)\right)$$

$$\left[\mathrm{Div}\left(\lambda\, \mathrm{Div}\, \underline{u}\, \mathbb{I}\right)\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\, \delta_{ik}\, u_{\ell,\ell}\right) =$$

$$= \lambda \left(\mathrm{Grad}\, \mathrm{Div}\, \underline{u}\right)_i$$

$$\left[\mathrm{Div}\left(\mu\, \mathrm{Grad}\, \underline{u}\right)\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu \frac{\partial}{\partial x_k} u_i\right) = \mu \nabla^2 u_i$$

$$\left[\mathrm{Div}\left(\mu \left(\mathrm{Grad}\, u\right)^T\right)\right]_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu \frac{\partial}{\partial x_i} u_k\right) = \mu \left[\mathrm{Grad}\left(\mathrm{Div}\, \underline{u}\right)\right]_i$$

Quindi (eq. di NAVIER)

$$\boxed{\rho \ddot{\underline{u}} = \rho \underline{f} + (\lambda + \mu)\, \mathrm{Grad}\left(\mathrm{Div}\, \underline{u}\right) + \mu \nabla^2 \underline{u}}$$

governa il moto di mezzi <u>linearmente</u> elastici, <u>omogenei</u> e <u>isotropi</u>.

Nello studio delle onde sismiche si può assumere $\underline{f} = \underline{0}$!