Lezione n. 5: Serie di potenze –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 11/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 11/03/2020

Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze.

Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove x_0 e gli a_n sono numeri reali $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice serie di potenze in campo reale. Il punto x_0 è detto centro della serie mentre gli a_n sono detti coefficienti della serie.

Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze.
Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove x_0 e gli a_n sono numeri reali $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice serie di potenze in campo reale. Il punto x_0 è detto centro della serie mentre gli a_n sono detti coefficienti della serie.

- A meno di effettuare una traslazione $X = x - x_0$, possiamo sempre ricondurci a considerare una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze.
Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove x_0 e gli a_n sono numeri reali $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice serie di potenze in campo reale. Il punto x_0 è detto centro della serie mentre gli a_n sono detti coefficienti della serie.

- A meno di effettuare una traslazione $X = x - x_0$, possiamo sempre ricondurci a considerare una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

- Una serie di potenze converge chiaramente per $x = x_0$ (in tal caso la sua somma vale a_0).

Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze.
Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove x_0 e gli a_n sono numeri reali $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice serie di potenze in campo reale. Il punto x_0 è detto centro della serie mentre gli a_n sono detti coefficienti della serie.

- A meno di effettuare una traslazione $X = x - x_0$, possiamo sempre ricondurci a considerare una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

- Una serie di potenze converge chiaramente per $x = x_0$ (in tal caso la sua somma vale a_0). Più in generale abbiamo il seguente risultato:

Teorema 1

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ converga in un punto $\bar{x} \neq x_0$.
Allora la serie converge assolutamente in ogni punto x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$.

Serie di potenze

Un esempio importante di serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze.
Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ dove x_0 e gli a_n sono numeri reali $\forall n \in \mathbb{N}$, si dice serie di potenze in campo reale. Il punto x_0 è detto centro della serie mentre gli a_n sono detti coefficienti della serie.

- A meno di effettuare una traslazione $X = x - x_0$, possiamo sempre ricondurci a considerare una serie di potenze del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

- Una serie di potenze converge chiaramente per $x = x_0$ (in tal caso la sua somma vale a_0). Più in generale abbiamo il seguente risultato:

Teorema 1

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ converga in un punto $\bar{x} \neq x_0$.
Allora la serie converge assolutamente in ogni punto x tale che $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$.
Inoltre, essa converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[x_0-r, x_0+r]$ con $0<r<|\bar{x}-x_0|$

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$.

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

- Dal teorema 2 segue che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e il punto x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano).

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

- Dal Teorema 2 segue che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e il punto x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano).

- Osserviamo che a priori non si può dire niente a priori sul comportamento della serie nei punti x_0-R e x_0+R (estremi dell'intervallo di convergenza).

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

- Dal Teorema 2 segue che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e il punto x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano).

- Osserviamo che a priori non si può dire niente a priori sul comportamento della serie nei punti x_0-R e x_0+R (estremi dell'intervallo di convergenza). Per esempio, se consideriamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

- Dal Teorema 2 segue che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e il punto x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano).

---

a priori

- Osserviamo che a priori non si può dire niente sul comportamento della serie nei punti x_0-R e x_0+R (estremi dell'intervallo di convergenza). Per esempio, se consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ e in particolare prendiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n}$ $\Rightarrow$ con il criterio della radice per serie numeriche (qui la x è pensata come un parametro) si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x|^n/n} = |x|$ e quindi se $|x|<1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n}$ converge.

Dal teorema precedente otteniamo il seguente.

Teorema 2

Sia data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$. Allora o la serie converge solo in $x=x_0$, oppure esiste $R>0$ (eventualmente anche $R=+\infty$) tale che la serie converge assolutamente se $|x-x_0|<R$ e non converge se $|x-x_0|>R$. Inoltre la serie converge totalmente in ogni intervallo $[x_0-r, x_0+r]$, con $0<r<R$.

- Dal Teorema 2 segue che l'insieme di convergenza di una serie di potenze centrata in x_0 è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto) e il punto x_0 è equidistante dagli estremi (finiti o infiniti che siano).

- Osserviamo che a priori non si può dire niente a priori sul comportamento della serie nei punti x_0-R e x_0+R (estremi dell'intervallo di convergenza). Per esempio, se consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ e in particolare prendiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n}$ $\Rightarrow$ con il criterio della radice per serie numeriche (qui la x è pensata come un parametro) si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x|^n/n} = |x|$ e quindi se $|x|<1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n}$ converge. Se $|x|>1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n}$ diverge (e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ non converge).

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi: $\boxed{\text{Se } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge}}$

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi:

$$\begin{cases} \text{Se } x=1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge} \\ \boxed{\text{Se } x=-1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ che converge per Leibniz}} \end{cases}$$

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi: $\begin{cases} \text{Se } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge} \\ \text{Se } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ che converge per Leibniz} \end{cases}$

Allora, in questo caso per $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, che è una serie di potenze centrata nell'origine $x_0=0$ abbiamo che il raggio di convergenza è 1 e l'intervallo di convergenza è $[-1,1)$.

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi:

$$\begin{cases} \text{Se } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge} \\ \text{Se } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ che converge per Leibniz} \end{cases}$$

Allora, in questo caso per $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, che è una serie di potenze centrata nell'origine $x_0=0$ abbiamo che il raggio di convergenza è 1 e l'intervallo di convergenza è $[-1,1)$.

Definizione (raggio di convergenza)
La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama raggio di convergenza della serie. In particolare $R = \sup\left\{|x-x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge}\right\}$.

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi:
$$\begin{cases} \text{Se } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge} \\ \text{Se } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ che converge per Leibniz} \end{cases}$$

Allora, in questo caso per $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, che è una serie di potenze centrata nell'origine $x_0=0$ abbiamo che il raggio di convergenza è 1 e l'intervallo di convergenza è $[-1,1)$.

Definizione (raggio di convergenza)

La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama raggio di convergenza della serie. In particolare $R = \sup\left\{ |x-x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge} \right\}$.

- Per calcolare il raggio di convergenza, fissato $x \in \mathbb{R}$, si possono usare i criteri per le serie numeriche a termini positivi (per esempio il criterio del rapporto, il criterio della radice, ecc...) applicandoli a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|x-x_0|^n$ pensata come una serie numerica dipendente dai parametri X e X_0

Se $|x|=1$ allora vanno separati i due casi: $\begin{cases} \text{Se } x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ che diverge} \\ \text{Se } x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ che converge per Leibniz} \end{cases}$

Allora, in questo caso per $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, che è una serie di potenze centrata nell'origine $x_0=0$ abbiamo che il raggio di convergenza è 1 e l'intervallo di convergenza è $[-1,1)$.

<u>Definizione</u>

La semiampiezza R dell'intervallo di convergenza di una serie di potenze si chiama raggio di convergenza della serie. In particolare $R = \sup\{|x-x_0| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ converge}\}$.

- Per calcolare il raggio di convergenza, fissato $x \in \mathbb{R}$, si possono usare i criteri per le serie numeriche a termini positivi (per esempio il criterio del rapporto, il criterio della radice, ecc...) applicandoli a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|x-x_0|^n$ pensata come una serie numerica dipendente dai parametri x e x_0

---

applicato alla serie dei valori assoluti

<u>Esempio</u>

Consideriamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, questa serie ha raggio di convergenza $R=1$ (criterio della radice, per esempio) e converge in $[-1,1]$ poiché converge assolutamente