Appunti per Geometria e Algebra Computazionale
1. Generalità sull'anello dei polinomi
Proprietà degli ordini monomiali

Corso di Laurea in Matematica, Università di Firenze, 2019/20

Giorgio Ottaviani

14 marzo 2020

Criterio di appartenenza di un monomio a un ideale monomiale

Ricordiamo il seguente

Lemma (Criterio di appartenenza di un monomio a un ideale monomiale)

Sia $I =< x^\alpha, \alpha \in A >$ *un ideale monomiale. Abbiamo che*

$$x^\beta \in I \iff x^\alpha | x^\beta \text{ per qualche } \alpha \in A$$

Dimostrazione.

$\Leftarrow$ è ovvia.
Per provare $\Rightarrow$ scriviamo $x^\beta = \sum h_i x^{\alpha(i)}$. A secondo membro ogni termine è divisibile per qualche $x^{\alpha(i)}$, pertanto tale proprietà deve rimanere vera anche a primo membro (dopo ever effettuato tutte le cancellazioni). $\square$

Ricordiamo la definizione di ordine monomiale

Definizione

Un ordine monomiale in $K[x_1, \dots, x_n]$ è una relazione $<$ su $\mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ tale che:

- *i)* $<$ *è un ordine totale*[b]
- *ii)* $<$ *è compatibile con la moltiplicazione, cioè* $\forall \alpha, \beta, \gamma$ *con* $\alpha < \beta$ *vale* $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- *iii)* $1 < x^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}, \alpha \neq 0.$

[b] cioè la relazione $<$ soddisfa la proprietà transitiva e $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$ è vera esattamente una tra le formule $a < b$, $b < a$, $a = b$ (“tricotomia”).

Ogni ordine monomiale rispetta la divisibilità

Lemma

Se x^α divide x^β allora in un qualunque ordine monomiale $x^\alpha \leq x^\beta$. Pertanto ogni ordine monomiale è un raffinamento dell'ordine parziale definito dalla divisibilità.

Dimostrazione.

Se $\alpha = \beta$ non c'è niente da dimostrare. Per ipotesi $\beta = \alpha + \gamma$ con $\gamma \in \mathbf{Z}^n_{\geq 0}$, $\gamma \neq 0$. Dalla proprietà iii) della Definizione di ordine monomiale abbiamo $1 < x^\gamma$ e quindi dalla proprietà ii) segue $x^\alpha < x^{\alpha+\gamma} = x^\beta$. $\square$

Osservazione. Dal Lemma precedente segue che in $K[x]$ esiste un solo ordine monomiale che é quello usuale.

Ogni ordine monomiale è un buon ordinamento

Proposizione

Ogni ordine monomiale è un buon ordinamento, cioè ogni sottoinsieme non vuoto di monomi ammette un minimo.

Dimostrazione.

Sia $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ un sottoinsieme non vuoto di monomi. Sia $I = \langle x^\alpha | \alpha \in A \rangle$ l'ideale generato dai monomi in A. Per la noetherianità dell'anello dei polinomi, esistono $\alpha(1) < \ldots < \alpha(s) \in A$ tali che I è generato da $x^{\alpha(1)}, \ldots, x^{\alpha(s)}$. Affermiamo che $\alpha(1)$ è un minimo per A. Infatti, per ogni $\alpha' \in A$ abbiamo $x^{\alpha'} \in I$ e quindi per il Lemma visto prima (Criterio di appartenenza di un monomio ad un ideale monomiale) esiste i con $1 \leq i \leq s$ tale che $x^{\alpha(i)} | x^{\alpha'}$, da cui $\alpha(1) < \alpha(i) < \alpha'$. $\square$