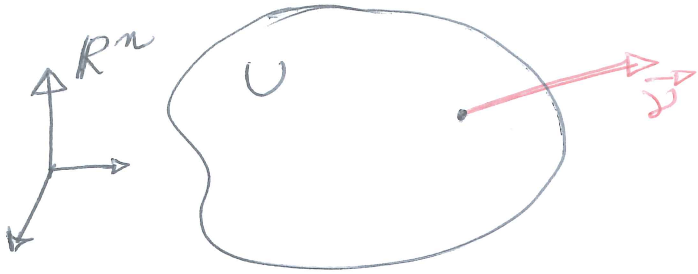
Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo un dominio U aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con bordo ∂U e $\vec{\nu} \in \mathbb{R}^n$ versore normale al bordo di U



Sia $\vec{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{u} \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U})$

con il simbolo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ detto divergenza di u si intende

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\sum \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_j u_j \vec{e}_j \right)$$

$$= \sum_{ij}^{n} \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}_{\delta_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

NOTA $\quad \vec{u}(\vec{x})$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(x)$ è uno scalare

VALE (Th della divergenza)

$$\boxed{\int_U \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \, dV^n(x) = \int_{\partial U} \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{\nu}}_{= \sum_i u_i \nu_i} \, dS^n(x)}$$

E' utile considerare alcuni casi particolari del Th.d.d.

(1) $\vec{u} = \vec{e}_i \, v$ (v scalare) : $\vec{u}$ è diretto ~~sempre~~ come il verso $\vec{e}_i$ fosse

$$\vec{u} \cdot \vec{\nu} = v \nu_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

otteniamo

$$\boxed{\int_U \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dV(x) = \int_{\partial U} v \, \nu_i \, dS(x)}$$

(2) $\vec{u} = \vec{\nabla} v = \sum_i \vec{e}_i \dfrac{\partial v}{\partial x_i}$

↳ scalare

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \left(\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_j \vec{e}_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) =$$

$$\sum_{ij} (\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \Delta v$$

Otteniamo $\quad v \in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$

$$\boxed{\int_U \Delta v \, dV = \int_{\partial U} \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nu}\, dS}$$

Notazione $\quad \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nu} \doteq \dfrac{\partial v}{\partial \vec{\nu}}$ "derivata direzionale"

$$\| \quad \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\nu_i$$

③ $\vec{u} = \psi \vec{\nabla} \varphi$ $\qquad \underbrace{\psi, \varphi}_{\text{scalari}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\downarrow$ vettore

$$\vec{u} = \psi \sum_i \vec{e_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \nabla (\psi \vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla} \psi \, \vec{\nabla} \varphi}_{\sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} + \psi \Delta \varphi$$

Otteniamo

$$\int_U (\nabla \psi \vec{\nabla} \varphi + \psi \Delta \varphi) \, dV = \int_{\partial U} \psi (\nabla \varphi \cdot \hat{\nu}) \, ds$$

$$\boxed{\int_U \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi \, dV = - \int_U \psi \Delta \varphi \, dV + \int_{\partial U} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, ds}$$

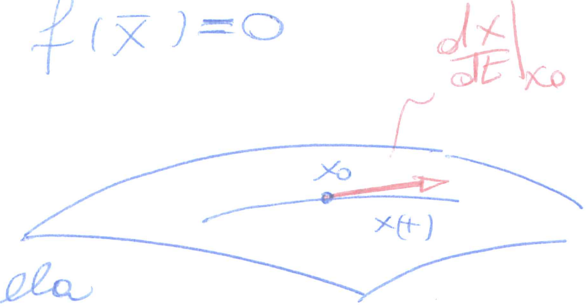
caso particolare $\quad \vec{\nabla} \varphi = \vec{e_i} \, v \quad$ campo vettoriale con direz. costante

Formula integrazione per parti $\quad \psi, v \in C^0(\bar{U}) \cap C^1(U)$

$$\boxed{\int_U \frac{\partial \psi}{\partial x_i} v \, dV = - \int_U \psi \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dV + \int_{\partial U} \psi v \nu_i \, ds}$$

Risultato di ortogonalità

Consideriamo la superficie $f(\bar{x})=0$



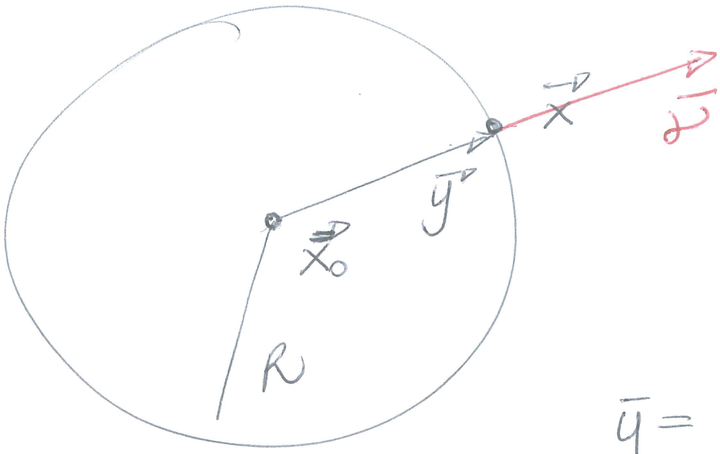
$x(t)$ una curva appartenente alla superficie $f(x(t))=0$

derivando rispetto a t $\Rightarrow$

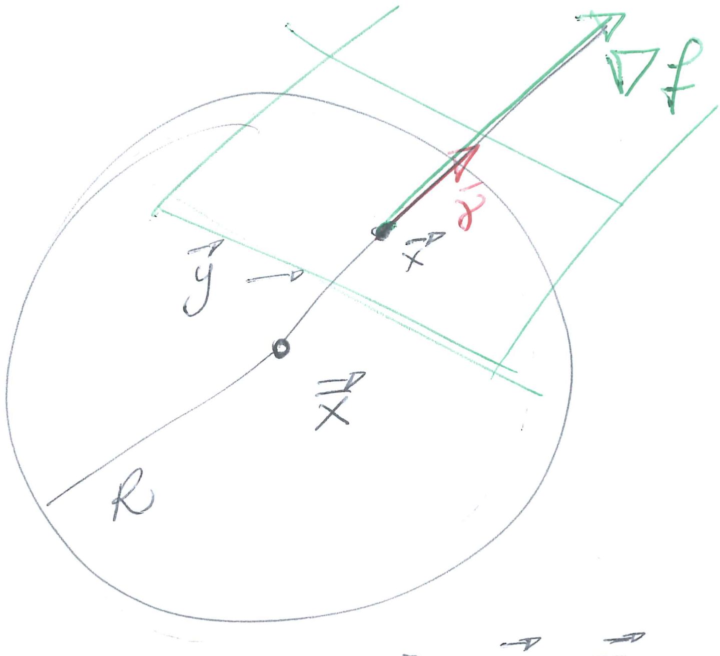
$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla} f \Big|_{x(t)} = 0$$

ho verificato che il gradiente ∇f è ortogonale alla tg di ogni curva con grafico appartenente alla superficie $f(x)=0$

$\Rightarrow \nabla f \Big|_{x_0}$ è ortogonale al piano tg alla superficie in x_0



$\bar{y} = \vec{x} - \vec{x}$



$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}$

$\bar{x} \in \partial B(\bar{x}, R)$

Calcolo della normale alla sfera

$$B(\bar{x}_0, R) = \sum (x_i - \bar{x}_i)^2 = R^2$$

$$f = \sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2 - R^2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in B(\bar{x}, R)$$

La superficie B rappres. la curva di livello $\emptyset$ di f.

$$\vec{\nabla} f \perp B$$

$$\vec{\nabla} f = \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2 - R^2 \right) =$$

$$= \sum_{j,i} \Big(\vec{e}_j \cdot 2 (x_i - \bar{x}_i) \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{= \delta_{ij}} \Big) =$$

$$= \sum_i 2 \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)$$

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\nabla f|} = \frac{\cancel{2} \sum \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)}{\cancel{2} \underbrace{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2}}_{= R \text{ siamo sulla sup. della sfera}}} = \frac{1}{R} \sum \vec{e}_i (x_i - \bar{x}_i)$$

$$\nu = \frac{\vec{y}}{|y|}$$

Formula della coarea (integ. in coord polari)

$$\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dV(x) = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x_0,\rho)} u(x)\,dS(x) \right) d\rho$$

$$\frac{d}{dR} \underbrace{\int_{B(x_0,R)} u(x)\,dV(x)} = \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\,dS(x)$$

Equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

L'equazione viene posta in un dominio $U \subseteq \mathbb{R}^n$

e l'incognita $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$

Il problema non omogeneo associato

$$\Delta u = -f \qquad x \in U$$

con $f(x)$ assegnata è detto problema di Poisson.

Una soluzione dell'eq. di Laplace (1) è detta funzione armonica

Studiamo il problema di Laplace in dimensione $n \geq 2$. Per $n = 1$ (1) si riduce a

$$\frac{d^2}{dx^2} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = x_0 + a x$$

Soluzioni eq. Laplace in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo $U = \mathbb{R}^n$. In questo caso l'eq. Lap. ammette molte diverse soluzioni, polinomiali e non

Esempi

in $\mathbb{R}^2$ $\quad u = x, y, x^2 - y^2, x^3 - 3xy^2, \ldots$

(x, y)

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

~~~~ oppure $u = e^{\alpha x}\cos(\alpha y), e^{\alpha x}\sin(\alpha y)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

in $\mathbb{R}^n$ $\quad u = \sin(\sqrt{n-1}\, x_1) \sinh(x_2 + x_3 + \ldots x_n)$

Nota: tutte le funzioni divergono per $|x| \to +\infty$

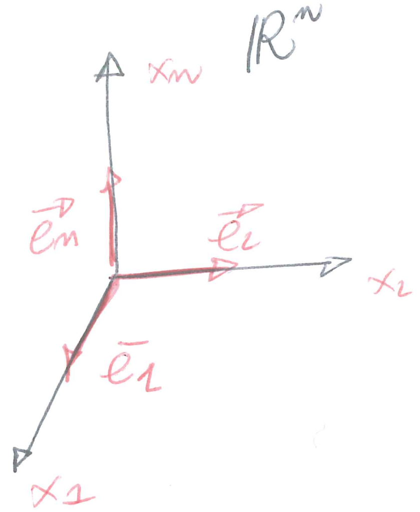
La "soluzione fondamentale" gioca un ruolo speciale nello studio del problema Laplace-Poisson
~~~~

Matrici ortogonali e cambio di sistema di riferimento

Considero la base canonica di $\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_i$ $i=1 \dots n$

$\downarrow$

diretta come asse x_i



$\vec{e}_i = (0, 0, \dots 1, 0 \dots 0)$
i esimo camp.

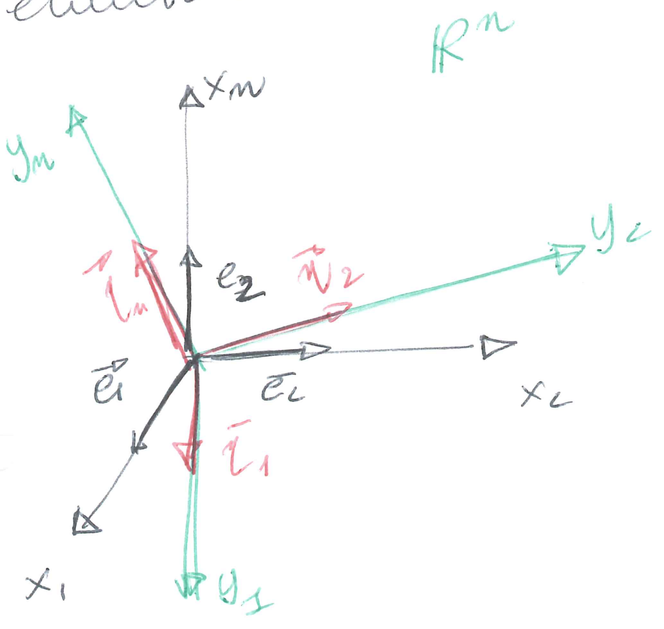
$\vec{e}_{i,j} = \delta_{ij}$
$\downarrow$
comp. j-esima di $\vec{e}_i$

Proprietà di ortonormalità dei versori

$$\underbrace{< \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j >}_{\text{Prod. scalare in } \mathbb{R}^n} = \sum_{r=1}^{n} e_{i,r} \, e_{j,r} = \delta_{ij}$$

$\downarrow$
r-esima comp. del vettore $\vec{e}_i$

Ruoto gli assi coordinati e trovo un'altra set di elementi di base $\{\vec{\eta}_i\}$ $i = \dots n$



Scriviamo il generico elemento $\vec{\eta}_i$ della nuova base

come combinazione lineare di $\vec{e}_i$

$$\vec{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} \vartheta_{ij} \vec{e}_j$$

La matrice ϑ è ortogonale ovvero $\vartheta\vartheta^{+} = I$

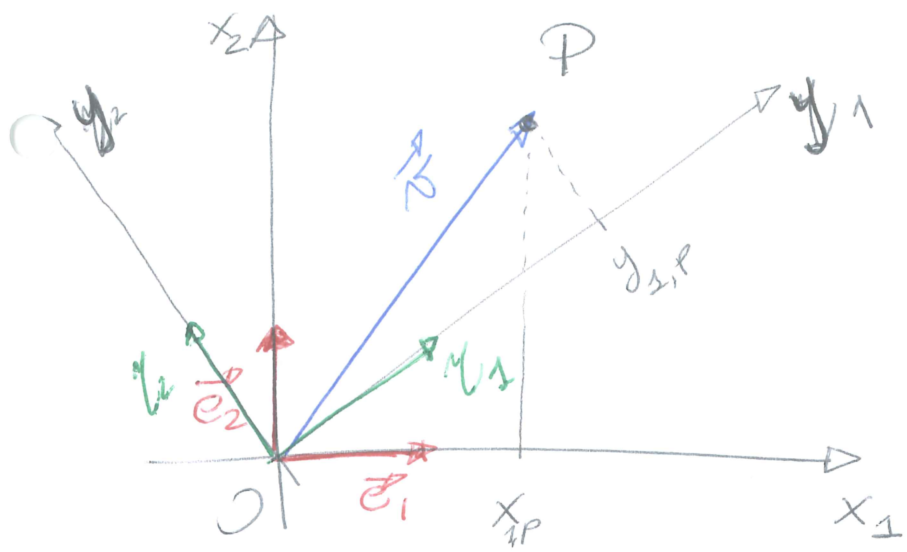
Lo si verifica subito

$$\delta_{ij} = < \vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_j > = \sum_{r,k=1}^{n} < \vartheta_{ir} \vec{e}_r \cdot \vartheta_{jk} \vec{e}_k >$$

$$= \sum_{r,k=1}^{n} \vartheta_{ir} \vartheta_{jk} \underbrace{< \vec{e}_r \, \vec{e}_k >}_{= \delta_{rk}} = \sum_{r=1}^{n} \vartheta_{ir} \vartheta_{jr}$$

In forma matriciale

$$\sum_{r=1}^{n} \vartheta_{ir} \vartheta_{jr} = \delta_{ij} \Rightarrow \vartheta\vartheta^{+} = I$$



Consideriamo un vettore $\vec{v}$ letto nei 2 riferimenti

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\eta}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{r=1}^{n} \theta_{jr} \vec{e}_r$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{j,r=1}^{n} y_j \theta_{jr} \vec{e}_r$$

Prodotto scalare con $\vec{e}_s$

$$x_s = \sum x_i \langle \vec{e}_s \vec{e}_i \rangle = \sum_{j=r=1}^{n} y_j \theta_{jr} \langle \vec{e}_s . \vec{e}_r \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \theta_{js} y_j$$

detto $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ si è ottenuto $\vec{x} = \Theta^T \vec{y}$

La rotazione degli assi coordinati indotta dalla matrice ortogonale θ definisce il cambio di coordinate (trasformazione lineare)

$$x_s = \theta^T_{sj}\, y_s$$

Verifichiamo che l'equazione di Laplace è INVARIANTE per rotazione del sist. di rif.:
ovvero data una matrice ortogonale $\theta : n \times n$
$(\theta\theta^t = I)$

ed una funzione $u \in C^2(U)$ armonica
considerando il cambio di variabili $\vec{y} = \theta\vec{x}$,
ovvero $y_i = \Sigma\, \theta_{ij}\, x_j$, definendo $v(\vec{y}) \equiv u(\theta\vec{x})$

si ha

$$\Delta_x u = 0 \Rightarrow \Delta_y v = 0$$

La trasformazione di coordinate non cambia l'operatore di Laplace

Verifica

Utilizzando la regola di derivazione a catena

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} v(\vartheta x) = \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\vartheta_{ji}$$

$$y_j = \sum \vartheta_{jk} x_k \to \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum \vartheta_{jk}\delta_{ki} = \vartheta_{ji}$$

$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\vartheta_{ji} =$$

$$= \sum_{i,j} \underset{\downarrow}{\vartheta_{ji}} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{i,j,k}\vartheta_{ji}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\underset{\substack{\| \\ \vartheta_{ki}}}{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}$$

ϑ è una mat. costante

$$\Delta_x u = \underbrace{\sum_{i,j,k}\vartheta_{ji}\,\vartheta_{ki}}_{\sum_i \vartheta_{ji}\vartheta_{ki} = \sum_i \vartheta_{ji}\vartheta^t_{ik} = \delta_{jk}}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k} = \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = \Delta_y v$$

L'operatore Δ è invariante per rotazione del sistema di riferimento:

FIS: Nasce dalla model. di fenomeni isotropi, in cui non c'è una direzione privilegiata

Suggerisce di cercare soluz. che rispettino questa simmetria ovvero che dipendano dall'unica quantità che è preservata da $\forall$ rotazione: il modulo

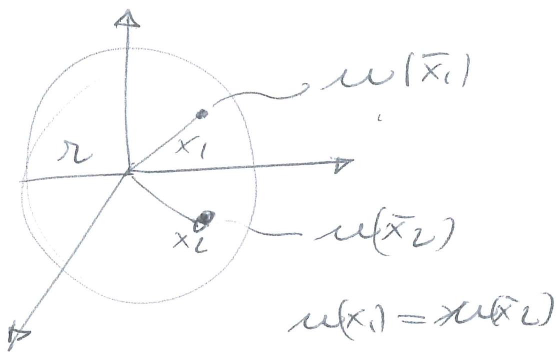
Soluzioni fondamentali dell'equazione di Laplace

Definiamo la coordinata radiale, ovvero la norma Euclidea del vettore $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)$

$$r = |\vec{x}| = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Cerco una soluz. particolare dell'eq. di Laplace che dipende solo da r (a simmetria sferica)

$$u(\bar{x}) \equiv u(r)$$



$$\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_j x_j^2} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\sum_j x_j^2}} \cdot \cancel{2}\sum_j \underbrace{(\partial_{x_i} x_j)}_{\delta_{ij}} x_j = \frac{1}{r} x_i}$$

per comodità di notazione indichiamo

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u'$$

$$\partial^2_{x_i^2} u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r} u' \right) =$$

$$= \frac{u'}{r} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r} \right) u' + \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} u'$$

calcoliamo $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Sigma_j x_j^2)^{-1/2} =$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{(\Sigma_j x_j)^{-3/2}}_{= r^{-3}} \cdot 2 x_i = - \frac{x_i}{r^3}$$

$$\partial^2_{x_i} u = \frac{u'}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} u' + \frac{x_i}{r} u'' \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{= \frac{x_i}{r}}$$

$$\partial^2_{x_i} u = \frac{u'}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} u' + \frac{x_i^2}{r^2} u''$$

$$\Big| \sum_{i=1}^n$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \left(\frac{u'}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} u' + \frac{x_i^2}{r^2} u'' \right)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$$

$$\Delta u = \frac{n}{r} u' - \frac{1}{r} u' + u''$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \quad u'' + \frac{n-1}{r} u' = 0 \quad \text{ODE}$$

Risolviamo riscrivendo

$$\frac{u''}{u'} = \frac{(1-n)}{r}$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{d}{dr}\left(\ln(u') \right)$$

$$\frac{d}{dr}\left| \ln |u'| \right| = \frac{(1-n)}{r}$$

integro in r $\Rightarrow$

$$\ln |u'| = (1-n) \ln(r) + c$$

$$\ln\left| \frac{u'}{r^{1-n}} \right| = c$$

$$u' = r^{1-n} \underbrace{e^c}_{a}$$

$$u' = r^{1-n} a$$

Distinguo 2 casi ① $n > 2$

$$u' = r^{1-n} a \Rightarrow \quad u = \frac{r^{2-n}}{2-n} a + b = \frac{d}{r^{n-2}} + b$$

② $n = 2 \Rightarrow u' = \frac{a}{r} \Rightarrow u = a \ln(r) + b'$

In sintesi

$$\Delta u = 0 \overset{u=u(r)}{\Longrightarrow} \qquad u = \begin{cases} a \ln(r) + b' & n=2 \\ \dfrac{d}{r^{n-2}} + b & n \geq 3 \end{cases}$$

Fissando opportunamente le costanti si ottiene la soluz. fond. dell'eq. di Laplace $\phi(r)$

$$\phi(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ln(r) & n=2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \dfrac{1}{r^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$$

Nota: per costruzione $\Delta \phi = 0$ in $\mathbb{R}^n - \{0\}$

ϕ diverge nell'origine