Uno spazio topologico S è <u>sconnesso</u> se

$$S = \underset{\text{aperto}}{U} \underset{\substack{\text{unione} \\ \text{disgiunta}}}{\sqcup} \underset{\text{aperto}}{V}$$

S è connesso se non è ~~di~~sconnesso

- la connessione è una proprietà topologica

  una ~~funzione~~ applicazione continua

  manda connessi in connessi

- S sp. top $\quad p \in S$

  la <u>componente connessa</u> di S

  contenente p è il più grande

  sottoinsieme connesso di S contenente p.

<u>Esempio</u>:
$$\det : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^{n^2}}}{GL(n, \mathbb{R})} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Chiusura di un insieme

<u>Def</u> $A \subseteq S$, $\bar{A} \doteq$ intersezione dei chiusi di S che contengono A

<u>Def</u> $p \in S$ è un <u>punto di accumulazione</u> di A se ~~[illegible]~~ per ogni intorno ~~aperto~~ U di p si ha che $U \cap A$ contiene almeno un punto $\neq p$

$\boxed{p = \text{punto limite di } A}$

esempio: $S = \mathbb{R}$ $A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ $p = 0$

<u>Prop</u> $A \subseteq S$, allora

$$\underbrace{\bar{A} = A \cup \underbrace{ac(A)}}$$

<u>Dim</u> ...

$\bar{A} \subseteq A \cup ac(A)$.

$\supseteq$

$\bar{A} \subseteq A \cup ac(A)$

per assurdo

$p \in \bar{A}$ t.c. $p \notin A$ $\underline{p \notin ac(A)}$

$\exists\ U$ t.c. $p \in U$

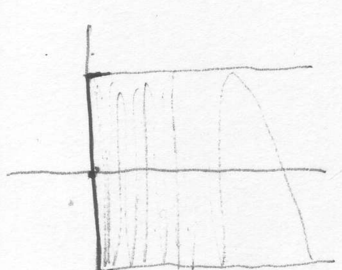
$U \cap A = \begin{cases} \emptyset \\ \{p\} \end{cases}$ $\quad A \subset \underset{\text{chiuso}}{U^c}$

$\bar{A} \subseteq U^c$

$p \in U^c$

<u>Esempio</u> $S = \mathbb{R}^2$ $A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$\bar{A} = ?$



$\mathbb{R}^2$

$p \in A \cup ac(A)$ e $p \notin \bar{A}$ $\Rightarrow$

$p \in ac(A)$ $\quad p \in \underset{\text{aperto}}{\bar{A}^c}$

$\bar{A}^c \cap A = \emptyset$

- A è chiuso se e solo se $A = \bar{A}$
- se $A \subset B$ allora $\bar{A} \subset \bar{B}$

<u>Successioni</u>

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione di punti in X sp. top.

$x_n \longrightarrow x$ se

$\Uparrow$

converge a x

$\forall$ intorno ~~aperto~~ U di x $\exists$ N t.c.

$$x_n \in U \quad \forall \; n \geq N$$

- se X è Hausdorff il limite è unico
- in uno spazio topologico a base numerabile

$$p \in \bar{A} \iff \exists \; \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ t.c.}$$

$$a_n \to p$$

$\Rightarrow$

<u>Dim</u> $\Rightarrow$ $p \in U_i$

$U_1 \supset U_1 \cap U_2 \supset U_1 \cap U_2 \cap U_3$

$V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset$

$\Leftarrow$ per def.

$W \ni p$

$U_N \subset W$

$V_N = U_1 \cap U_2 \ldots \cap U_N \subset W$

$V_{N+i} \subset V_N$