Omotopie

$I = [0,1]$

X, Y sp. top

$f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ continue

sono omotope se esiste

$F : X \times I \longrightarrow Y$ continue t.c.

$$F(x,0) = f_0(x)$$
$$F(x,1) = f_1(x)$$

omotopia

esempi: • $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto x$ $\quad id \sim 0$

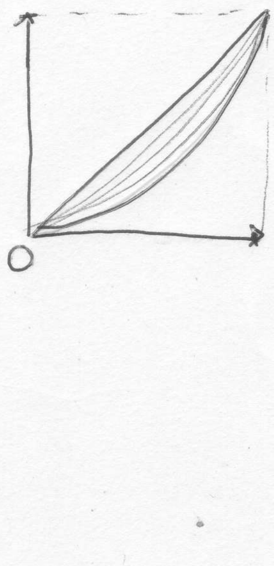
appl. nulla

$F(x,t) = t\,x$

• $X = [0,1]$ $\quad Y = [0,1]$

$f_0(x) = x$

$f_1(x) = x^2$



$F(x,t) = t\,x^2 + (1-t)\,x$

- l'omotopia in $C^0(X,Y)$ è una relazione di equivalenza

- la composizione di mappe omotope dà mappe omotope

<u>Def</u> due spazi top. X e Y hanno lo <u>stesso tipo di omotopia</u> se esistono

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{continua}$$

$$g: Y \longrightarrow X \quad \text{continua}$$

t.c.

$$f \circ g \sim id_Y$$

$$g \circ f \sim id_X$$

- è una rel di equivalenza

  i due spazi si dicono

  <u>OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI</u>

<u>N.B.</u> <u>più debole di omeomorfismo</u>

Def Uno spazio ~~di~~ topologico X si dice contrattile se

$$\begin{aligned} i_X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

è omotopa alla applicazione costante

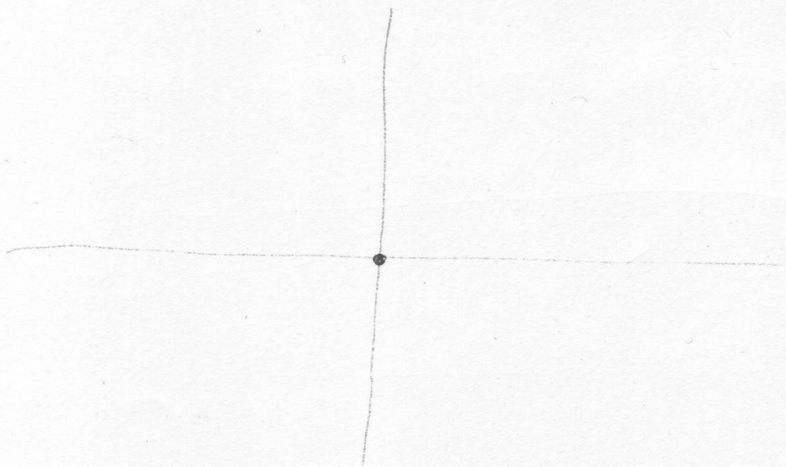
$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x_0 \end{aligned}$$

per qualche $x_0 \in X$

Teorema Uno sp. top. è contrattile se e solo se è omotopicamente equivalente a un punto.

esempio: $\mathbb{R}^n$ contrattile

$\mathbb{R}^2$



$id : x \longrightarrow x$

$0 : x \longmapsto 0$