Lezione n. 7: Serie di Taylor e di Mac Laurin –parte 1–

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 11/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 11/03/2020

Serie di Taylor

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ supponiamo che abbia raggio di convergenza $R>0$.

Serie di Taylor

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ supponiamo che abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora, nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) è ben definita la somma della serie considerata, ovvero

$\exists\, f$ definita in (x_0-R, x_0+R) tale che:

$$\boxed{f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)}$$

Serie di Taylor

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ supponiamo che abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora, nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) è ben definita la somma della serie considerata, ovvero

$\exists\, f$ definita in (x_0-R, x_0+R) tale che :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Teorema 1

La funzione f definita dalla serie di potenze definita dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo (x_0-R, x_0+R)

Serie di Taylor

Dato una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ supponiamo che abbia raggio di convergente $R>0$.

Allora, nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) è ben definita la somma della serie considerata, ovvero $\exists\, f$ definita in (x_0-R, x_0+R) tale che:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Teorema 1

La funzione f definita dalle serie di potenze definita dalle serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo (x_0-R, x_0+R)

Dimostrazione

Sia $\bar{x} \in (x_0-R, x_0+R) \Rightarrow r>0$, con $0<r<R$, tale che $\bar{x} \in (x_0-r, x_0+r)$. Di conseguenza, poiché la serie è totalmente convergente in $[x_0-r, x_0+r]$

Serie di Taylor

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ supponiamo che abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora, nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) è ben definita la somma della serie considerata, ovvero $\exists\, f$ definita in (x_0-R, x_0+R) tale che:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

Teorema:

La funzione f definita dalla serie di potenze definita dalla serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ è continua in ogni punto dell'intervallo (x_0-R, x_0+R)

Dimostrazione

Sia $\bar{x} \in (x_0-R, x_0+R) \Rightarrow \exists\, r>0$, con $0<r<R$, tale che $\bar{x} \in (x_0-r, x_0+r)$. Di conseguenza, poiché la serie è totalmente convergente in $[x_0-r, x_0+r] \Rightarrow$ f è ivi continua e in particolare f è continua in $\bar{x} \in (x_0-r, x_0+r)$.

<u>Lemma</u> (di invarianza del dominio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora le due serie: $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}}$ e $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}}$

hanno entrambe raggio di convergenza R.

<u>Lemma</u> (di invarianza del dominio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

hanno entrambe raggio di convergenza R.

<u>Osservazione</u> 1

Il lemma precedente serve a provare che le serie di potenze sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine" in (x_0-R, x_0+R)

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenza $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

hanno entrambe raggio di convergenza R.

Osservazione 1

Il lemma precedente serve a provare che le serie di potenza sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine" in (x_0-R, x_0+R)

Teorema 2 (di derivazione e di integrazione termine a termine)

Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x \in (x_0-R, x_0+R)$, definita da una serie di potenza.

Lemma (di invarianza del dominio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$

hanno entrambe raggio di convergenza R.

Osservazione 1

Il lemma precedente serve a provare che le serie di potenze sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine" in $(x_0-R,\, x_0+R)$

Teorema 2 (di derivazione e di integrazione termine a termine)

Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x \in (x_0-R,\, x_0+R)$, definita da una serie di potenze.

Allora f è derivabile in $(x_0-R,\, x_0+R)$ e vale che: $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$.

Lemma (di invarianza del raggio di convergenza)

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ abbia raggio di convergenza $R>0$.

Allora le due serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$$
hanno entrambe raggio di convergenza R.

Osservazione 1

Il lemma precedente serve a provare che le serie di potenze sono "derivabili termine a termine" e "integrabili termine a termine" in $(x_0-R,\ x_0+R)$

Teorema 2 (di derivazione e di integrazione termine a termine)

Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x \in (x_0-R,\ x_0+R)$, definita da una serie di potenza.

Allora f è derivabile in $(x_0-R,\ x_0+R)$ e vale che: $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$.

Inoltre, $\forall x \in (x_0-R,\ x_0+R)$ vale che: $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}$.

Osservazione 2

Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Osservazione 2

Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

(I) $$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$

Osservazione 2

Poiché le derivate di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

$$(\mathrm{I}) \qquad f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo $(x_0 - R,\ x_0 + R)$

• Ponendo $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ uguale a $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_0 = f(x_0) =: f^{(0)}(x_0)$

Osservazione 2

Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

(I) $$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$

- Ponendo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ uguale a $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_0 = f(x_0) =: f^{(0)}(x_0)$
- Derivando la f e ponendo ancora $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_1 = f'(x_0) =: f^{(1)}(x_0)$

osservazione 2

Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

(I) $$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo $(x_0 - R,\ x_0 + R)$

$2a_2 = f''(x_0) =: f^{(2)}(x_0)$

- Ponendo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ uguale a $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_0 = f(x_0) =: f^{(0)}(x_0)$
- Derivando la f e ponendo ancora $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_1 = f'(x_0) =: f^{(1)}(x_0)$

a_2

Osservazione 2

Poiché la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

(I) $$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo (x_0-R, x_0+R)

$2\cdot 3\, a_3 = f'''(x_0) =: f^{(3)}(x_0)$

- Ponendo $x \in (x_0-R, x_0+R)$ uguale a $x = x_0$ $\Rightarrow$ dalla (I) segue $a_0 = f(x_0) =: f^{(0)}(x_0)$
- Derivando la f e ponendo ancora $x = x_0$ $\Rightarrow$ dalla (I) segue $a_1 = f'(x_0) =: f^{(1)}(x_0)$

a_3

Osservazione 2

Poiché le derivate di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, allora dal teorema 2 segue che le funzioni che sono definite tramite serie di potenze sono C^∞.

Sia dunque f definita da una serie di potenze, ovvero:

(I) $$f(x) := a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$

$2a_2 = f''(x_0) =: f^{(2)}(x_0)$

$2 \cdot 3\, a_3 = f'''(x_0) =: f^{(3)}(x_0)$

- Ponendo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ uguale a $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_0 = f(x_0) =: f^{(0)}(x_0)$
- Derivando la f e ponendo ancora $x = x_0 \Rightarrow$ dalla (I) segue $a_1 = f'(x_0) =: f^{(1)}(x_0)$
- Analogamente, mediante derivate successive (si possono fare grazie all'osservazione 2) della f, arrivati alla derivata n-esima, dalla formula (I) segue che, per $x = x_0$, $\Rightarrow \boxed{n!\, a_n = f^{(n)}(x_0)}$

$\Longleftrightarrow \boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

dopo n-derivate troviamo il coefficiente $n!$ a moltiplicare a_n

• Pertanto, risulta che la serie di potenze $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n}$ può essere riscritta come:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e in generale $f^{(n)}(x_0)$ è la derivata n-esima di f valutata in x_0.

- Pertanto, risulta che la serie di potenze $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ può essere riscritta come:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dove $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$ e in generale $f^{(n)}(x_0)$ è la derivata n-esima di f valutata in x_0.

- Quindi, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ coincide in $(x_0-R,\, x_0+R)$ con la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

- Pertanto, risulta che la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ può essere riscritta come:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e in generale $f^{(n)}(x_0)$ è la derivata n-esima di f valutata in x_0.

- Quindi, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ coincide in (x_0-R, x_0+R) con la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

che è detta serie di Taylor di f di centro x_0

(o di MacLaurin, quando $x_0 = 0$)

- Pertanto, risulta che la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ può essere riscritta come:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e in generale $f^{(n)}(x_0)$ è la derivata n-esima di f valutata in x_0.

- Quindi, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ coincide in (x_0-R, x_0+R) con la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ che è detta serie di Taylor di f di centro x_0 (o di MacLaurin, quando $x_0=0$)

- <u>Osservazione 3</u>

Come conseguenza degli argomenti precedenti, si ha che se una funzione è definita mediante una serie di potenze $\left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$, <u>essa risulta C^∞ in x_0</u>

- Pertanto, risulta che la serie di potenze $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ può essere riscritta come:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$ dove $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$ e in generale $f^{(n)}(x_0)$ è la derivata n-esima di f valutata in x_0.

- Quindi, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ coincide in (x_0-R, x_0+R) con la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ che è detta serie di Taylor di f di centro x_0 (o di MacLaurin, quando $x_0=0$)

- <u>Osservazione 3</u>

Come conseguenza degli argomenti precedenti, si ha che se una funzione è definita mediante una serie di potenze ($f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$), essa risulta C^∞ in x_0 <u>e la sua serie di Taylor ha per somma la funzione stessa</u> (ovvero $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$)