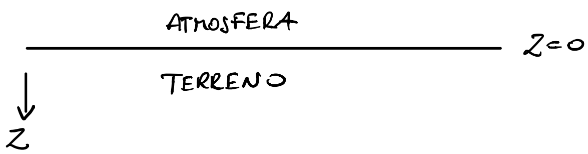
<u>Non approfondiremo</u> la riflessione/rifrazione di onde sismiche P ed S, quando l'onda incontra una superficie di discontinuità fra rocce di costituzione chimico-fisica diversa.
Studiamo una tipologia di onde sismiche che hanno la particolarità di rimanere confinate negli strati superiori della crosta terrestre. Queste onde sono dette <u>superficiali</u>.

(A) <u>Onde di Rayleigh</u>



Cerchiamo soluzioni i cui potenziali siano della forma

$$\phi(z,x,t) = F(z)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right], \quad \psi(z,x,t) = G(z)\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right]$$

dove F e G sono incognite e $V \neq 0$ una costante reale incognita.
Si noti che

(i) l'asse x è, per ipotesi, la direzione di propagazione cioè $\underline{N} = (1,0,0)$.

(ii) l'onda giace, per ipotesi, interamente nel piano $y =$ costante.

Condizioni asintotiche e al contorno:

(a) $\mathbb{S}\,\underline{e}_z\big|_{z=0} = 0 \iff S_{xz} = S_{yz} = S_{zz} = 0$ su $z=0$

(b) $F(z) \to 0$, $G(z) \to 0$ per $z \to \infty$ (l'onda è <u>superficiale</u>)

Supponiamo che ϕ e ψ risolvano l'eq. delle onde :

$$(R)\begin{cases} F'' = \dfrac{\omega^2}{V^2}\left(1-\dfrac{V^2}{c_p^2}\right)F \\[2ex] G'' = \dfrac{\omega^2}{V^2}\left(1-\dfrac{V^2}{c_s^2}\right)G \end{cases}$$

Notiamo che se $V > c_p > c_s$ le due equazioni hanno soluzioni periodiche che quindi non verificano l'ipotesi (b). Per avere soluzioni esponenziali occorre che $V \leq c_s < c_p$

Dimostriamo che per avere soluzioni non banali del sistema (R) occorre che sia $V < c_s$.

Supponiamo $V = c_s$. Allora $1-\frac{V}{c_p^2} > 0$ perché $c_p > c_s$. Allora la condizione $G \to 0$ per $z \to \infty$ si può soddisfare solo se $G \equiv 0$.
Dimostrare che anche $F \equiv 0$ è più complicato.

Ricordiamo che

$$S_{xz} = \rho c_s^2 \left(2\, \partial^2_{xz}\phi + \cancel{\partial^2_{xx}\psi} - \cancel{\partial^2_{zz}\psi}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} G \equiv 0 \iff \\ \psi \equiv 0 \end{array}\right)$$

$$S_{yz} = \mu\, \partial_z v$$

$$S_{zz} = \rho\left[(c_p^2 - 2c_s^2)\,\partial^2_{xx}\phi + c_p^2\,\partial^2_{zz}\phi + \cancel{2c_s^2\,\partial^2_{xz}\psi}\right]$$

Ma $\partial_x\phi = -\frac{i\omega}{V}\phi$ $\quad \partial^2_{xz}\phi = \left(-\frac{i\omega}{V}\right)\frac{F'}{F}\phi$, $\partial_z\phi = \frac{F'}{F}\phi$,

$\partial_{zz}\phi = \frac{F''}{F}\phi + \frac{(F')^2}{F}\phi$, $\quad \partial^2_{xx}\phi = \left(-\frac{i\omega}{V}\right)^2\phi$

Allora la condizione (a) si scrive

$$S_{xz}\Big|_{z=0} = 0 \iff 2\rho c_s^2 \left(-\frac{i\omega}{V}\right) F'(0) \exp[\dots] = 0$$

$$S_{zz}\Big|_{z=0} = 0 \iff \rho\left(c_p^2 - 2c_s^2\right)\left(-\frac{i\omega}{V}\right)^2 F(0) \exp[\dots]$$
$$+\rho c_p^2 F''(0) \exp[\dots] + \rho c_p^2 \left(F'(0)\right)^2 F(0) \exp[\dots] = 0$$

ovvero

$$F'(0) = 0 \quad , \quad \boxed{-F(0)\frac{\omega^2}{V^2}\left(1-2q^2\right) + F''(0) = 0}$$

a cui va aggiunta la condizione

$$F(\infty) = 0 .$$

Riprendiamo la $(R)_1$ e calcoliamola su $z=0$:

$$\boxed{-\frac{\omega^2}{V^2}\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)F(0) + F''(0) = 0}$$

Notiamo che

$$\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right) \neq 1-2q^2$$

dato che $V = c_s < c_p$ mentre $q = \frac{c_s}{c_p}$

Le due eq. algebriche per $F(0)$ e $F''(0)$ hanno quindi solo la soluzione $F''(0) = F(0) = 0$. Ricordando anche che $F'(0) = 0$ e che la $(R)_1$ ha come soluzione una combinazione lineare di funzioni esponenziali <u>reali</u> , le condizioni $F(0) = F'(0) = F(\infty) = 0$ implicano che l'unica soluzione possibile è $F \equiv 0$.

<u>Quindi esistono soluzioni non banali solo se</u> $V < c_s$.

In tal caso le due equazioni (R) ammettono coppie di soluzioni linearmente indipendenti di tipo esponenziale $e^{\pm rz}$, $e^{\pm sz}$

dove

$$r = \frac{\omega}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} > 0 \,, \qquad s = \frac{\omega}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2} > 0$$

Per soddisfare la condizione asintotica (b) scegliamo esponenti negativi: pertanto le soluzioni sono

$$\begin{cases} \phi(x,z,t) = A\, e^{-rz} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] \\ \psi(x,z,t) = B\, e^{-sz} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] \end{cases}$$

dove A, B e V vanno determinati usando le c.c. su $z=0$.

Riscriviamo le c.c. $\underline{\underline{S}}\,\underline{e}_z\big|_{z=0} = 0$ in termini di ψ e ϕ:

$$S_{xz} = \rho c_s^2 \left(2\, \partial^2_{xz}\phi + \partial^2_{xx}\psi - \partial^2_{zz}\psi\right)$$

$$S_{yz} = \mu\, \partial_z v$$

$$S_{zz} = \rho\left[(c_p^2 - 2c_s^2)\,\partial^2_{xx}\phi + c_p^2\,\partial^2_{zz}\phi + 2c_s^2\,\partial^2_{xz}\psi\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_{xz}\phi &= \left(-\frac{i\omega}{V}\right)\partial_z\phi = \left(-\frac{i\omega}{V}\right)(-r)\,\phi \\ \partial_{xx}\psi &= \left(-\frac{i\omega}{V}\right)^2\psi \,, \quad \partial_{zz}\psi = s^2\psi \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad 2\,\frac{i\omega r}{V}\,\phi(0) - \left(\frac{\omega}{V}\right)^2\psi(0) - s^2\,\psi(0) = 0$$

Quindi

$$S_{xz}\big|_{z=0} = 0 \iff \boxed{2i\,\frac{\omega r}{V}\,A - \left(\frac{\omega}{V}\right)^2 B - s^2 B = 0}$$

$$\partial_{xx}\phi = \left(-\frac{i\omega}{V}\right)^2\phi \quad , \quad \partial_{zz}\phi = r^2\phi \quad , \quad \partial^2_{xz}\psi = +s\left(\frac{i\omega}{V}\right)\psi$$

Quindi

$$S_{zz}\Big|_{z=0} = 0 \iff \boxed{(c_p^2 - 2c_s^2)\left(-\frac{\omega}{V}\right)^2 A + c_p^2 r^2 A + 2c_s^2 s\left(\frac{i\omega}{V}\right)B = 0}$$

Ricordando le espressioni di r ed s segue:

$$2i\cancel{\frac{\omega}{V}}\left[\cancel{\frac{\omega}{V}}\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2}\right]A - \cancel{\frac{\omega^2}{V^2}}B - \cancel{\left(\frac{\omega}{V}\right)^2}\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)B = 0 \iff$$

$$2iA\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} - \left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)B = 0$$

$$-\frac{\omega^2}{V^2}(c_p^2 - 2c_s^2)A + c_p^2\left(\frac{\omega}{V}\right)^2\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)A + 2c_s^2\frac{\omega}{V}\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}\left(\frac{i\omega}{V}\right)B = 0$$

$$\iff -(c_p^2 - 2c_s^2)A + c_p^2\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)A + 2c_s^2 i\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}B = 0$$

$$\iff (2c_s^2 - V^2)A + 2c_s^2 i\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}B = 0$$

$$\iff \left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)A + 2i\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}B = 0$$

Il sistema

$$\begin{cases} 2iA\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} - \left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)B = 0 \\ \left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)A + 2i\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}B = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni non banali se e solo se

$$(2i)^2\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}+\left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^2=0$$

Poniamo $p=\left(\frac{V}{c_s}\right)^2$, $q=\frac{c_s}{c_p}$ (<1) e quadriamo :

$$\boxed{(-4)^2(1-q^2p)(1-p)=(2-p)^4} \iff$$

$$16\left(\cancel{1}-q^2p-p-q^2p^2\right)=\cancel{16}-4\cdot 8p+6\cdot 4\cdot p^2-4\cdot 2p^3+p^4$$

$$\iff p^4-8p^3+\left(24-16q^2\right)p^2+\left[16\left(1+q^2\right)-32\right]p=0$$

$$\iff p\left(p^3-8p^2+8\left(3-2q^2\right)p+16\left(q^2-1\right)\right)=0$$

$p=0 \iff V=0$ (soluzione banale). Esistono però soluzioni non banali: per un materiale di Poisson ($\nu=1/4$)

$$c_s/c_p=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

cosicché $q^2=1/3$ e l'eq. algebrica si scrive

$$\boxed{p^3-8p^2+8\cdot\frac{7}{3}p-\frac{32}{3}=0}$$

che ha 3 radici reali <u>esatte</u>

$$p=4\ ,\quad p=2\pm 2\sqrt{3}/3$$

Poiché $p = \left(\frac{V}{C_s}\right)^2$ e dovendo essere $V < C_s$, l'unica radice accettabile è $2 - 2\sqrt{3}/3$, cioè

$$\boxed{V \cong 0.9194\, c_s}$$ (velocità dell'onda di Rayleigh)

Determinata V possiamo calcolare A e B ed esprimere anche gli spostamenti. Le soluzioni non banali del sistema algebrico per A e B sono a priori complesse: scriviamo $A = a e^{i\alpha}$ e $B = b e^{i\beta}$ con a, b, α e β reali

$$\begin{cases} 2i\, a e^{i\alpha}\left(1 - \frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) b e^{i\beta} = 0 \\ \left(2 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) a e^{i\alpha} + 2i\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2} b e^{i\beta} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2i\left(1 - \frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} - \left(2 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)\frac{b}{a} e^{i(\beta-\alpha)} = 0 \\ \left(2 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) + 2i\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}\frac{b}{a} e^{i(\beta-\alpha)} = 0 \end{cases}$$

La prima equazione può essere soddisfatta se e solo se $e^{i(\beta-\alpha)} = i$ cioè se $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ (diversamente il primo membro avrebbe una parte reale non nulla). Usando la seconda equazione si ottiene

$$\left(2 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) - 2\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}\frac{b}{a} = 0$$

ovvero
$$\frac{b}{a} = \frac{2 - V^2/c_s^2}{2\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}}$$

Possiamo ora calcolare gli spostamenti su $z=0$:

$$u = \partial_x \phi - \partial_z \psi \quad , \quad w = \partial_z \phi + \partial_x \psi \quad \Longrightarrow$$

$$u(x,0,t) = -\frac{i\omega}{V}\, a \underbrace{e^{i\alpha} \exp\left[i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right]}_{\exp\left\{i\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]\right\}} - s\, b \underbrace{e^{i\beta} \exp\left[i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right]}_{\exp\left\{i\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\beta\right]\right\}}$$

di cui consideriamo la sola parte reale

$$u(x,0,t) = +\frac{\omega}{V}\, a \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right] - s\, b \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\beta\right] =$$

$$= \frac{\omega}{V}\, a \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right] - \frac{\omega}{V}\cancel{\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}}\, a\, \frac{2-V^2/c_s^2}{2\cancel{\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}}} \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\beta\right]$$

D'altra parte $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ e quindi in definitiva

$$u(x,0,t) = \frac{\omega}{V} \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]\left(a + \frac{a}{2}\left(2-\frac{V^2}{c_s^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\omega}{V}\, a \left(2 - \frac{V^2}{2c_s^2}\right) \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]$$

dove $\frac{V^2}{c_s^2} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Quindi

$$u(x,0,t) = \frac{\omega}{V}\, a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]$$

Analogamente

$$w(x,0,t) = -r\, a e^{i\alpha} \exp[\cdots] - \frac{i\omega}{V}\, b e^{i\beta} \exp[\cdots]$$

la cui parte reale è

$$w(x,0,t) = -\frac{\omega}{V}\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} a \cos\left[(\dots)+\alpha\right] + \frac{\omega}{V} b \sin\left[(\dots)+\beta\right] =$$

$$= -\frac{\omega}{V}\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} a \cos\left[(\dots)+\alpha\right] + \frac{\omega}{V} a \frac{2-V^2/c_s^2}{2\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}} \cos\left[(\dots)+\alpha\right]$$

$$= \frac{\omega}{V} a \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]\left\{-\left(1-\frac{V^2}{c_p^2}\right)^{1/2} + \frac{2-V^2/c_s^2}{2\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}}\right\} =$$

$$= \frac{\omega}{V} a \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)+\alpha\right]\left\{-\left(1-q^2\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2} + \frac{2-V^2/c_s^2}{2\left(1-\frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2}}\right\}$$

Si noti che per un materiale qualsiasi $\nu \in (0,\frac{1}{2})$, l'equazione di Rayleigh ha radici che dipendono unicamente dal rapporto di Poisson ν. Le radici che determinano l'onda di Rayleigh sono quelle per cui $0 < V < c_s$ o equivalentemente $0 < p < 1$. Qualunque sia $\nu \in (0, 1/2]$, l'eq. di Rayleigh ha un'unica radice in $(0,1)$. Infatti, posto

$$f(p) = p^3 - 8p^2 + 8(3-2q^2)p + 16(q^2-1)$$

abbiamo $q = \frac{c_s}{c_p} < 1$ per cui

$$f(0) = 16(q^2-1) < 0 \quad \text{e} \quad f(1) = 1 - 8 + 24 - 16q^2 + 16q^2 - 16 = 1 > 0$$

per cui f ha una oppure tre radici reali. D'altra parte

$$f''(p) = \left[3p^2 - 16p + 8(3-2q^2)\right]' = 6p - 16 < 0 \quad \text{per } p \in (0,1)$$

Poiché f'' non si annulla la radice reale in $(0,1)$ è unica

In particolare si ha

$$q(\nu) = \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)^{1/2}$$

ν	p^*	$V/c_s = \sqrt{p^*}$
0.1	0.79	0.89
0.2	0.82	0.91
0.3	0.86	0.93
0.4	0.88	0.94

Movimento del suolo. I calcoli precedenti mostrano che

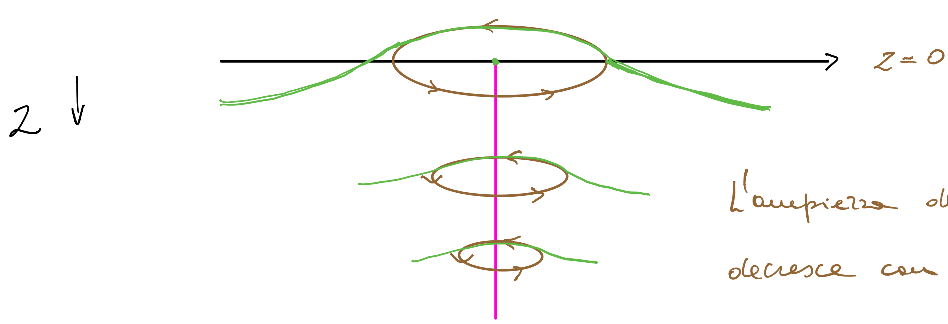
$$u(x,0,t) = \frac{\omega a}{\tilde{V}_1(\nu)} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \alpha\right]$$

$$w(x,0,t) = \frac{\omega b}{\tilde{V}_2(\nu)} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \alpha\right]$$

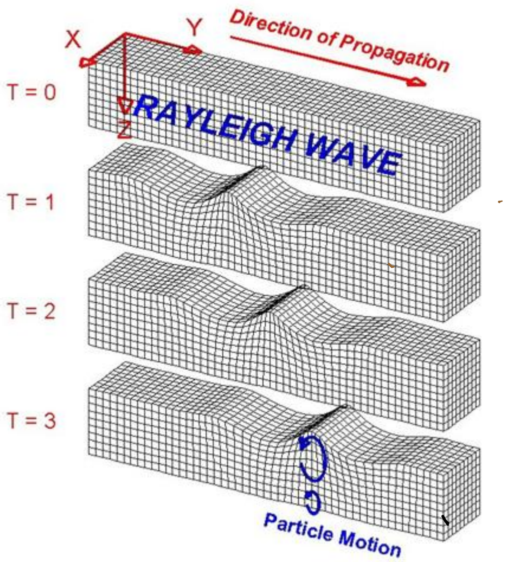
dove i fattori $\tilde{V}_i$ hanno le dimensioni di una velocità e dipendono unicamente da ν.

Le traiettorie delle particelle nel piano xz sono ellissi retrograde:

$$\frac{\tilde{V}_1^2(\nu)}{\omega^2 a^2} u^2 + \frac{\tilde{V}_2^2(\nu)}{\omega^2 b^2} w^2 = 1$$



L'ampiezza dell'onda decresce con $z \to +\infty$



EVOLUZIONE TEMPORALE NELLA GENERICA POSIZIONE AL VARIARE DI t (tempo) E DELLA PROFONDITA' (z)

ONDA DI LOVE.

L'onda di Rayleigh si svolge senza componenti in direzione y.
L'onda di Love è invece del tipo

$$(L)\begin{cases} u = 0 \\ v = K(z)\exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] \\ w = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso la direzione di propagazione è l'asse x cioè $\underline{N} = (1,0,0)$.

Per ipotesi l'onda è superficiale, cioè

$$K(z) \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad z \to +\infty$$

L'eq. del moto si riduce alla singola equazione

$$\partial^2_{tt} v = c_s^2 \, \partial^2_{xx} v \iff K'' = \frac{\omega^2}{V^2}\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) K$$

Poiché $V < c_s$ l'eq. ha soluzioni di tipo esponenziale; per la condizione asintotica deve essere

$$K(z) = C_1 e^{-sz} \quad \text{con} \quad s = \frac{\omega}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right)^{1/2} > 0$$

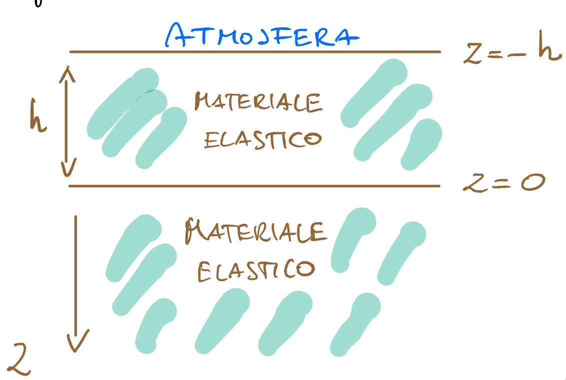
e C_1 costante. La condizione di stress nullo su $z=0$ è

$$S_{zy}\big|_{z=0} = 0 \iff \partial_z v\big|_{z=0} = 0 \iff K'(0) = 0$$

$$\iff C_1 = 0$$

Quindi questo tipo di onda non può generarsi nell'ipotesi di stress nullo su $z=0$.

D'altra parte onde del tipo (L) sono state effettivamente osservate. L'unico modo di spiegare la loro esistenza è il seguente:



STRATO SOTTILE con parametri μ e c_s

STRATO PROFONDO con parametri $\tilde{\mu}$ e $\tilde{c}_s$

Consideriamo la possibilità di soluzioni con $u = w = 0$ in entrambi gli strati mentre

$$v = \begin{cases} U(z) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] & \text{in} \quad -h \le z \le 0 \\ W(z) \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] & \text{per} \quad z \ge 0 \end{cases}$$

La condizione asintotica implica $W(\infty) = 0$ mentre la condizione di stress nullo su $z = -h$ (per $z < -h$ c'è atmosfera) si scrive $U'(-h) = 0$. Sull'interfaccia $z = 0$ va imposta la continuità dello stress e dello spostamento:

$$U(0) = W(0) \quad , \quad \mu U'(0) = \tilde{\mu} W'(0)$$

($z = 0$ e $z = -h$ sono superfici materiali e quindi le condizioni precedenti non sono altro che le condizioni di Rankine - Hugoniot).

Ricordiamo che $c_s = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$, $\tilde{c}_s = \left(\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}}\right)^{1/2}$.

(I) Supponiamo che $\quad c_s < V < \tilde{c}_s$;

$$z \in (-h, 0) \quad , \quad U'' = \frac{\omega^2}{V^2}\left(1 - \frac{V^2}{c_s^2}\right) U \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad U(z) = A \sin \sigma z + B \cos \sigma z$$

con $\displaystyle \sigma = \frac{\omega}{V}\left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1\right)^{1/2} > 0$

$z \in (0, +\infty)$, $W'' = \dfrac{\omega^2}{V^2}\left(1 - \dfrac{V^2}{\tilde{c}_s^2}\right)^{1/2} W \implies$

$\implies W = C_1 e^{-\tilde{\sigma} z}$ (si è usata la condizione asintotica)

con $\tilde{\sigma} = \dfrac{\omega}{V}\left(1 - \dfrac{V^2}{\tilde{c}_s^2}\right)^{1/2}$

A, B e C_1 vanno determinati usando le condizioni su $z = 0$ e $z = -h$

$z = -h$, $U'(-h) = 0 = A\sigma\cos(-h\sigma) - B\sigma\sin(-h\sigma)$

$$z = 0 \;, \; \begin{cases} U(0) = W(0) \iff B = C_1 \\ \mu U'(0) = \tilde{\mu} W'(0) \iff \mu\sigma A = \tilde{\mu}(-\tilde{\sigma}) C_1 \end{cases}$$

In definitiva dobbiamo cercare soluzioni non banali del sistema algebrico

$$\begin{cases} A\sigma\cos(h\sigma) + B\sigma\sin(h\sigma) = 0 \\ \mu\sigma A + \tilde{\mu}\tilde{\sigma} B = 0 \end{cases}$$

Tali soluzioni esistono se

$$\tilde{\mu}\tilde{\sigma}\sigma\cos(h\sigma) = \mu\sigma^2\sin(h\sigma) \iff$$

$$\tilde{\mu}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2\left(1 - \frac{V^2}{\tilde{c}_s^2}\right)^{1/2}\left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1\right)^{1/2} = \mu\left(\frac{\omega}{V}\right)^2\left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1\right)\tan\left\{h\frac{\omega}{V}\left(\frac{V^2}{c_s^2} - 1\right)^{1/2}\right\}$$

ovvero

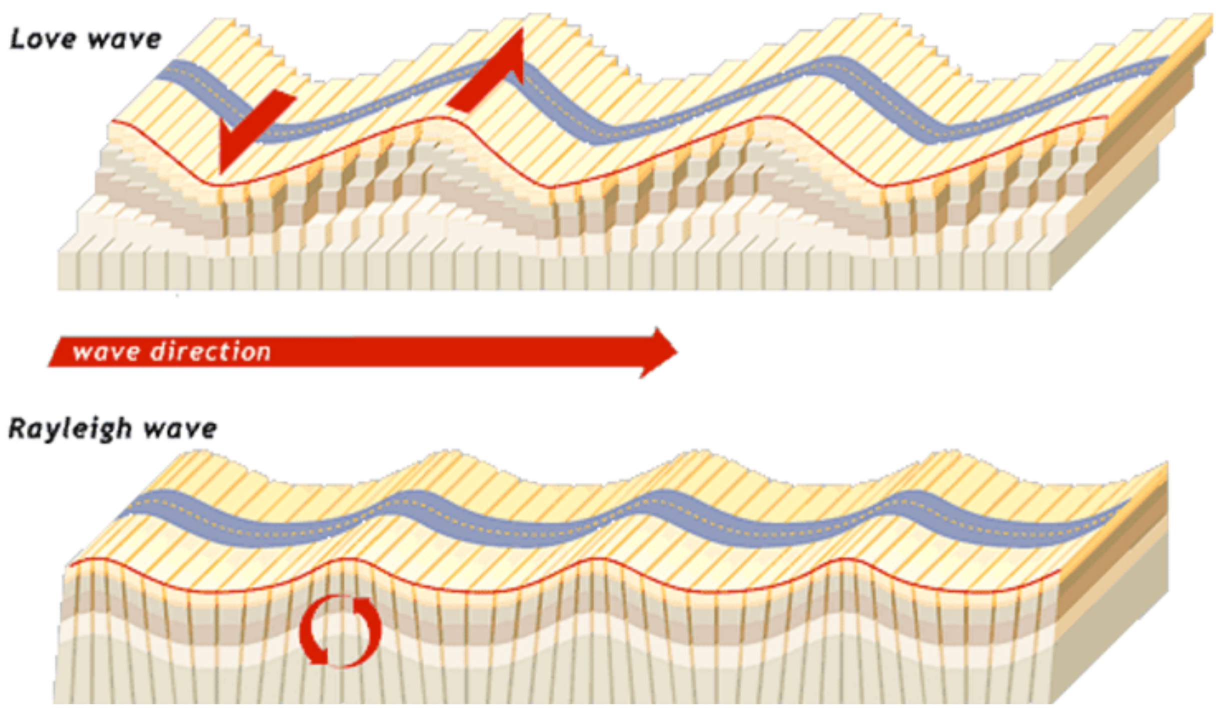
$$\tilde{\mu}\left(1-\frac{V^2}{\tilde{c}_s^2}\right)^{1/2} = \mu\left(\frac{V^2}{c_s^2}-1\right)^{1/2}\tan\left\{h\frac{\omega}{V}\left(\frac{V^2}{c_s^2}-1\right)^{1/2}\right\}$$

Questa equazione determina la velocità V dell'onda di Love. Si noti che a differenza degli altri tipi di onde viste in precedenza

$$V = V(\omega)$$

cioè l'onda di Love è dispersiva (cambia con la frequenza)

E' facile dimostrare che se $\tilde{c}_s < V$ oppure $V < \tilde{c}_s < c_s$ esistono solo soluzioni banali. Per brevità non lo faremo.



I QUATTRO TIPI DI ONDE STUDIATE