Il modo più semplice di introdurre un meccanismo oscillatorio nel modello 1-dimensionale è di introdurre un'eq. dinamica per l'albedo in grado di "guidare" il clima avanti e indietro fra stati caldi e freddi intesi a rappresentare, rispettivamente, periodi interglaciali e periodi glaciali.

Osserviamo innanzitutto che le tre principali componenti del sistema climatico variano su scale di tempo molto diverse. Queste componenti sono

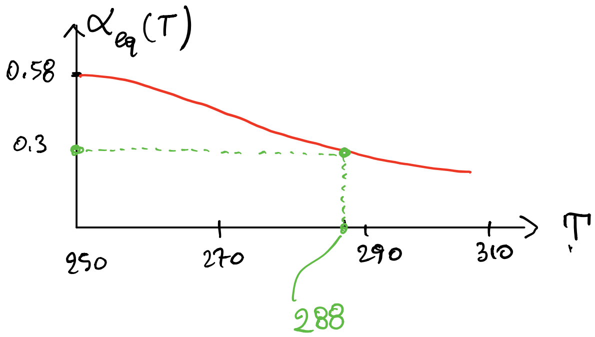
ATMOSFERA — OCEANO — COPERTURA GLACIALE

La scala temporale della copertura glaciale è la più lunga in assoluto: se L è la scala di lunghezza orizzontale e U la velocità di variazione orizzontale, $t_i = \frac{L}{U}$ è la scala di tempo caratteristica con cui si osservano variazioni significative. Per $L \cong 1000$ Km e $U \cong 100$ m/y si trova $t_i \cong 10^4$ y che è dell'ordine di grandezza della durata di una glaciazione. Poiché l'estensione della copertura glaciale è direttamente associata con l'albedo, una modificazione realistica del modello è di permettere alla copertura glaciale, e quindi all'albedo, di rispondere ai cambiamenti di temperatura sulla scala di tempo t_i

Fissiamo una funzione $\alpha_{eq}(T)$ ("albedo di equilibrio") che può essere una versione più regolare di quella vista prima (suggerita da Sellers nel suo articolo del 1968)

$$\alpha_{eq}(T) = a_1 - \frac{1}{2} a_2 \left[1 + \tanh \frac{T - T^*}{\Delta T} \right]$$

(valori plausibili $a_1 \cong 0.58$, $a_2 \cong 0.47$, $T^* \cong 283\ K$, $\Delta T = 24\ K$)



Il modello ~~dinamico~~ dinamico più semplice è il seguente

$$\begin{cases} c\dot{T} = Q(t)(1-\alpha) - \sigma\gamma T^4 \\ t_i \dot{\alpha} = \alpha_{eq}(T) - \alpha \end{cases}$$

dove ora $\alpha(t)$ è incognita! Si è inoltre fissato per semplicità l'effetto serra $g(T)$ ad un valore costante $\gamma \cong 0.61$ (valore ragionevole per la Terra).

Supponiamo anche che $Q(t)$ sia una funzione periodica con periodo noto τ e

$$\overline{Q} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} Q(t)\, dt$$

la sua media. Sia ora t_{ref} la scala di tempo su cui si osservano variazioni significative della temperatura atmosferica. Introduciamo grandezze adimensionali per T, t, e Q:

$$T = T_{ref}\, T^* \;, \qquad Q = Q_{ref}\, Q^* \;, \qquad t = t_{ref}\, t^*$$

dove t_{ref}, T_{ref} e Q_{ref} sono opportune scale di grandezza (da scegliersi) e t^*, T^*, Q^* adimensionali. Allora l'eq. per T si riscrive

$$c\left(\frac{T_{ref}}{t_{ref}}\right)\dot{T}^* = Q_{ref}\left[Q^*(t)(1-\alpha)\right] - \sigma\gamma\, T_{ref}^4 (T^*)^4$$

dove ora "$\cdot$" indica la derivata rispetto al tempo adimensionale t^*. Per ipotesi i termini adimensionali sono di ordine 1. La relativa importanza dei termini che appaiono nell'eq. dipende allora dai fattori dimensionali. Indicando con $\bar{\alpha}$ un valor medio di α, i termini a secondo membro sono "bilanciati" se

$$Q_{ref} = O\left(\sigma\gamma\, T_{ref}^4 (1-\bar{\alpha})^{-1}\right) \iff T_{ref} \simeq \left(\frac{Q_{ref}(1-\bar{\alpha})}{\sigma\gamma}\right)^{1/4}$$

Analogamente, variazioni di $\dot{T}^*$ sono osservabili sulla scala di tempo t_{ref} solo se $cT_{ref}/t_{ref} = O(1)$. Dividiamo l'eq. per cT_{ref}/t_{ref}: si ha

$$\dot{T}^* = K_1 \left[Q^*(t)(1-\alpha) \right] - K_2 \, (T^*)^4$$

dove

$$K_1 = \frac{Q_{ref}(1-\bar{\alpha})}{c\,T_{ref}} t_{ref} \quad , \quad K_2 = \frac{\sigma \gamma \, T_{ref}^4}{c\,T_{ref}} t_{ref}$$

sono adimensionali. Il loro rapporto non dipende da t_{ref} ma definisce solo T_{ref} come si è già visto imponendo che K_1 e K_2 abbiano lo stesso ordine di grandezza. Poiché $c = c_p \, d \, \rho_a = 10^7 \left(\frac{W}{m^2}\right)$, assumendo $Q_{ref} = 350\left(\frac{W}{m^2}\right)$ si trova (con $\bar{\alpha} = 0.5$)

$$T_{ref} \cong \left(\frac{350 * 0.5}{5.67 * 0.61} * 10^8 \right)^{1/4} \simeq 274 \; (K)$$

La scelta di t_{ref} dipende dalla scala su cui si osservano le variazioni della Temperatura del sistema. Se $\frac{1}{t_{ref}} \ll 1$ si può assumere

$$0 \simeq \frac{1}{t_{ref}} \dot{T}^* = \frac{Q_{ref}(1-\bar{\alpha})}{c\,T_{ref}} Q^*(t)(1-\alpha) - \frac{\sigma\gamma}{c} T_{ref}^3 (T^*)^4$$

e $T^*(t)$ si trova in uno stato "quasi-stazionario"

$$T^* = T^*_{staz}(t) = \left[\left(\frac{Q_{ref}(1-\bar{\alpha})}{\sigma \, T_{ref}^4 \, \gamma} \right) Q^*(t)(1-\alpha) \right]^{1/4}$$

che, riscritta in forma dimensionale, è

$$T'_{staz}(t) = \left(\frac{Q(t)(1-\alpha)}{\sigma \gamma} \right)^{1/4}$$

dove la dipendenza da t è legata alla variazione di Q (supposta nota e periodica). Se t_{ref} è la scala di tempo, la derivata di α nella seconda eq. è moltiplicata per t_i / t_{ref}. Quindi, se $t_i \simeq t_{ref}$, durante le variazioni di α, T^* appare stazionaria.

Possiamo allora assumere in luogo del sistema originario

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{Q_{ref}(1-\bar{\alpha})}{c T_{ref}} Q^*(t)(1-\alpha) - \dfrac{\sigma \gamma}{c} T_{ref}^3 (T^*)^4 \\ \dfrac{t_i}{t_{ref}} \dot{\alpha} \cong \dot{\alpha} = \alpha_{eq}(T) - \alpha \end{cases}$$

Risolvendo la prima eq. si ha la soluzione "stazionaria" (in forma dimensionale)

$$T = T(\alpha \,; Q(t)) = \left[\frac{Q(t)(1-\alpha)}{\sigma \gamma} \right]^{1/4}$$

Si può ora sostituire $T(\alpha \,; Q(t))$ nella seconda equazione :

$$\frac{t_i}{t_{ref}}\ \dot{\alpha} = \underbrace{\alpha_{eq}\left[T\left(\alpha; Q(t)\right)\right]}_{I(\alpha, Q)} - \alpha$$

Supponendo sempre $t_{ref} \gg 0$, possiamo anche ipotizzare che $t_i / t_{ref} = O(10^{\alpha})$ con $\alpha \geqslant 1$: ciò corrisponde, fisicamente ad un "ritardo" di ordine 10^{α} fra il tempo di "risposta" dinamica fra T ed α (ad esempio 10^3 anni per T e 10^4 anni per α). In tal caso scriviamo

$$\dot{\alpha} = \varepsilon\left[I(\alpha, Q) - \alpha\right], \quad \varepsilon = \frac{t_{ref}}{t_i} = O(10^{-\alpha})$$

L'eq. non è autonoma perché Q è funzione di t.

Questa equazione si presta all'utilizzo del seguente

Teorema (metodo delle medie)

Sia $\dot{x} = \varepsilon f(t, x)$, $x(0) = x_0$ con $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

e

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y), \quad y(0) = x_0$$

dove

$$f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t, x)\, dt$$

e T è il periodo di f.

Valgano inoltre le usuali ip. del T. di Cauchy per f

Allora

$$x(t) - y(t) = O(\varepsilon) \quad \text{per } \varepsilon \to 0 \quad \text{sulla scala di tempo } \frac{1}{\varepsilon}$$

Applicato al caso in esame il Teorema dice che le soluzioni dell'eq. non autonoma per $\alpha(t)$ si comportano su tempi molto lunghi (scala di tempo $\frac{1}{\varepsilon}$) come quelle dell'eq. autonoma in cui si sostituisce

$$I(\alpha, Q) - \alpha \longrightarrow \overline{I(\alpha, Q)}$$

media temporale di $I(\alpha, Q) - \alpha$ definita come nell'enunciato del Teorema. Il teorema dice anche che $\alpha(t)$ varia molto lentamente e che la soluzione si può scrivere come sviluppo asintotico in α del tipo

$$\alpha \simeq A_0(\varepsilon t) + \varepsilon A_1(t, \varepsilon t) + \dots$$

dove

$$\dot{A} = \overline{I(A_0, Q)} - A_0$$

dove la media è fatta nel periodo T di Q. L'ultima equazione permette, una volta risolta, di scrivere il termine principale dello sviluppo di α.
Sviluppando completamente l'analisi tuttavia non si ottiene ancora un modello in grado di descrivere le ultime ere glaciali.

Evitando, per brevità, di approfondire i limiti di questo modello, proviamo a costruire un modello, più sofisticato, in grado di prevedere i "cicli" glaciali.

Per raggiungere questo obiettivo occorre sviluppare un modello dinamico di una calotta glaciale visto che è proprio la copertura glaciale una delle cause principali (se non la principale) della variazione dell'albedo.

E' ben noto che i ghiacciai non sono "statici". Il ghiaccio può essere visto come un mezzo continuo in grado di deformarsi sotto l'azione del proprio peso e in grado di accrescere - diminuire la propria massa attraverso il processo di accumulo - ablazione dovuti a precipitazioni e scioglimento.

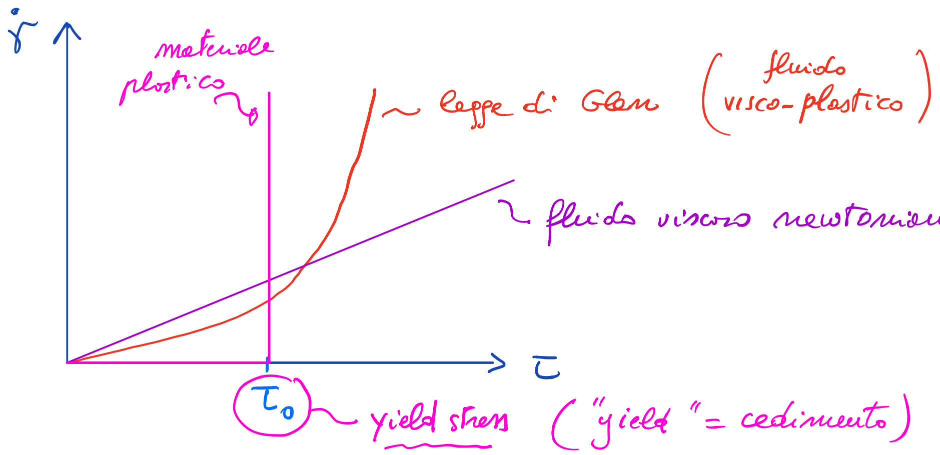
I vari mezzi continui [vedere mie dispense di Istituzioni di Fisica Matematica, CAP I (cinematica) e CAP II (dinamica)] si distinguono fra loro in base alla relazione che caratterizza il legame SFORZO - DEFORMAZIONE

Il ghiaccio ha caratteristiche che lo rendono un fluido non-newtoniano in cui tale legame non è lineare.

Semplificando molto (di questo argomento si occuperà più in dettaglio il prof. L. Fusi nel seguito del corso) in un esperimento ideale in cui sforzo τ e velocità di deformazione $\dot{\gamma}$ (che in generale sono tensori doppi simmetrici) hanno un'unica componente significativa (τ e $\dot{\gamma}$ diventano semplici funzioni scalari), gli esperimenti mostrano che per il ghiaccio vale la legge di Glen

$$\dot{\gamma} = A\tau^n$$

dove $n \cong 3$ e A è molto piccolo e dipende esponenzialmente dalla Temperatura ($A = O(10^{-25})\ s^{-1}\,Pa^{-3}$)

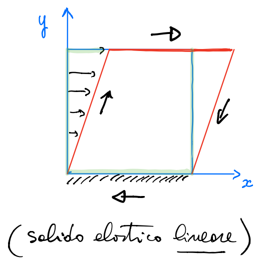


Posto $A = \tilde{A}\tau_0^{-n}$, $\dot{\gamma} = \tilde{A}(\tau/\tau_0)^n$; allora

$$\lim_{n\to\infty} \dot{\gamma} = 0 \quad \text{per } \tau < \tau_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \dot{\gamma} = +\infty \quad \text{per } \tau > \tau_0$$

Quindi $\dot{\gamma}$ è indeterminato per $\tau = \tau_0$.

SIGNIFICATO MECCANICO della legge $\dot{\gamma} = F(\tau)$



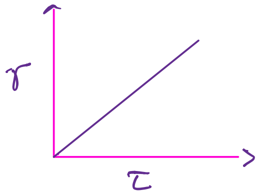
$\underline{u}(y) = (u(y), 0)$ spostamento

$\gamma = \frac{du}{dy}$ grad. di spostamento

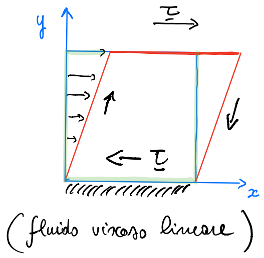
$\gamma = G\tau$

G = costante

$\underline{\tau}$ sforzo di taglio $\underline{\tau} = (\tau, 0)$



(ACCIAIO)

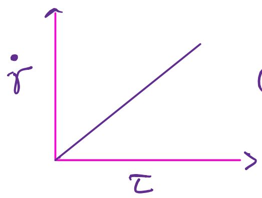


$v = \frac{du}{dt}$ $\quad \underline{v} = (v, 0)$

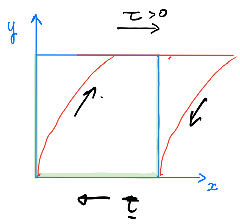
$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dy}$ gradiente di velocità

$\dot{\gamma} = \mu\tau$

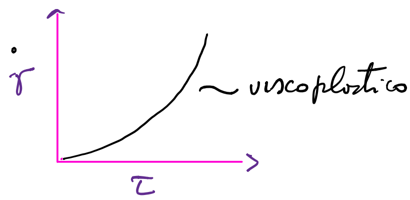
μ = costante

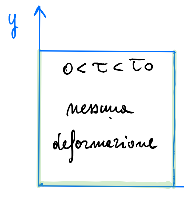


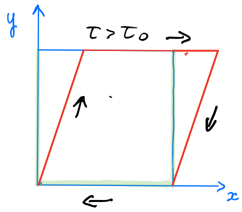
(ACQUA)

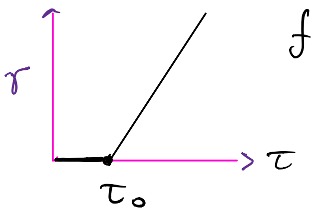


$\dot{\gamma} = F(\tau)$ rel. di velocità non lineare (materiale visco-elastico)



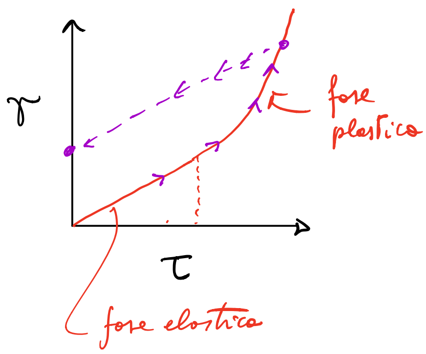


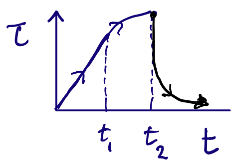


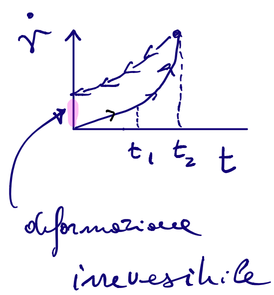


f. di BINGHAM

MATERIALE ELASTO-PLASTICO : ANDAMENTO CARICO – SCARICO NON REVERSIBILE



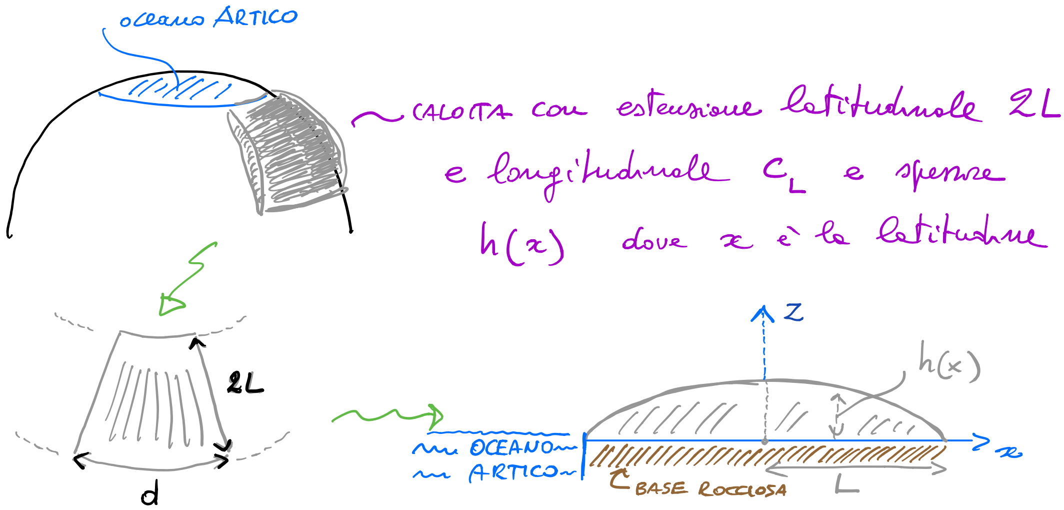




La legge di Glen tende alla legge della perfetta plasticità per $n \to \infty$. Quella della plasticità è una situazione "limite": non c'è alcuna deformazione $\dot{\varepsilon}$ finché lo sforzo τ non ha raggiunto un valore "di soglia" τ_0. Superato tale valore la deformazione può raggiungere valori arbitrariamente grandi (teoricamente) senza che il suo stato di stress si modifichi apprezzabilmente. Inoltre la deformazione è irreversibile: anche diminuendo lo sforzo, il materiale non ritorna nello stato precedente la deformazione.

Benché il ghiaccio non sia perfettamente plastico per i nostri scopi l'approssimazione "plastica" è sufficiente per sviluppare una dinamica della calotta. Il vantaggio è infatti che la trattazione matematica non è particolarmente complicata.

Consideriamo una calotta glaciale come in figura

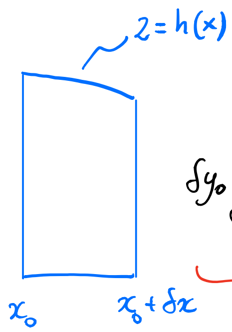


La calotta è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso e della reazione vincolare offerta dalla base rocciosa che supporremo indeformabile. Si suppone inoltre che il profilo rispetto al suolo della calotta sia indipendente dalla longitudine, cioè $z = h(x)$. Si suppone quindi che tale profilo sia simmetrico in ogni piano meridiano.

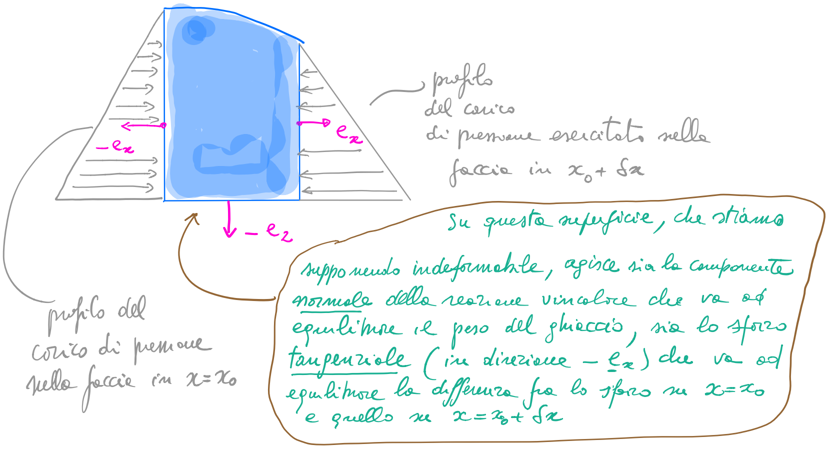
Infine la calotta può estendersi (per deformazione) solo in direzione meridionale (x crescente) ma non in direzione Nord (l'oceano Artico fa da blocco).
Per la simmetria possiamo limitarci a metà del profilo. Sia

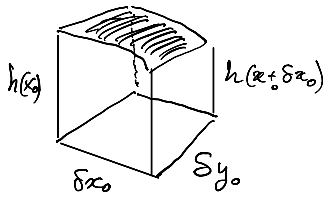
$$\Omega = \{(\xi,\eta,z) \mid \xi \in (x_0, x_0+\delta x),\ z \in (0, h(x)),\ \eta \in (y_0, y_0+\delta y)\}$$

una porzione di calotta di estensione δx in direzione latitudinale e δy in direzione longitudinale. In condizioni di equilibrio "quasi-statico" tutte le forze agenti su Ω devono sommarsi a zero. Tali forze sono il peso proprio di Ω, la pressione dell'aria su $z=h(x)$ (trascurabile) e la reazione vincolare del basamento roccioso su $z=0$:



$$\underbrace{\delta y_0 \int_{z=0}^{z=h(x_0)} (-\rho_i g z)\, dz}_{\substack{\text{sforzo sulla}\\ \text{faccia } x=x_0\\ \text{in direzione } \underline{e}_x}} + \underbrace{\delta y_0 \int_{z=0}^{z=h(x_0+\delta x)} \rho_i g z\, dz}_{\substack{\text{sforzo nella faccia}\\ \text{in } x=x_0+\delta x \text{ in}\\ \text{direzione } -\underline{e}_x}} + \underbrace{\delta y_0 \int_{x_0+\delta x}^{x_0} (-\tau_0)\, d\xi}_{\substack{\text{sforzo su } z=0\\ \text{in direzione}\\ \underline{e}_x}} = 0$$





Abbiamo assunto (com'è ragionevole) che la deformazione abbia luogo quando lo sforzo τ è sostanzialmente $\simeq$ valore di soglia τ_0

Integrando e semplificando l'eq. del bilancio isostatico si ha

$$\int_{z=h(x_0)}^{z=h(x_0+\delta x)} \rho_i\, g\, z\, dz \cong -\tau_0\, \delta x$$

cioè

$$\frac{1}{2}\rho_i\, g\left[h(x_0+\delta x)+h(x_0)\right]\left[h(x_0+\delta x)-h(x_0)\right] \cong -\tau_0\, \delta x$$

Dividendo per δx e passando al limite per $\delta x \to 0$ si ha

$$\rho_i\, g\, h(x_0)\, h'(x_0) \cong -\tau_0$$

che possiamo integrare con la c.i. $h(0)=H_0$ (massima altezza della calotta. Si ottiene così il profilo

$$\left(\frac{h(x)}{H_0}\right)^2 = 1 - \frac{2\tau_0}{\rho_i g H_0^2}\, x$$

Poiché per ipotesi L è la massima estensione latitudinale, $h(L)=0$ e quindi si trova

$$L = \frac{\rho_i g}{2\tau_0} H_0^2$$

Misure di laboratorio indicano $\tau_0 \simeq 10^5$ Pa e quindi, poiché $\rho_i = 9 * 10^2$ Kg/m^3 e $g \cong 9.8$ m/s^2, si trova

$$H_0 \cong 3.36 \sqrt{L}$$

Ghiacciai in Antartide, Groenlandia e Islanda sembrano confermare questa correlazione nonostante le forti semplificazioni adottate: ad esempio per $L = 10^6$ m (10^3 Km) si ottiene $H_0 \simeq 3360$ m. Possiamo allora semplificare l'espressione di $h(x)$:

$$\left(\frac{h}{H_0}\right)^2 = 1 - \frac{|x|}{L} \iff h(x) = H_0\left(1 - \frac{|x|}{L}\right)^{1/2} = \frac{H_0}{\sqrt{L}}(L-x)^{1/2}$$

ovvero

$$h(x) = \lambda^{1/2}(L - |x|)^{1/2}, \quad \lambda = \frac{2\tau_0}{\rho_i g}$$

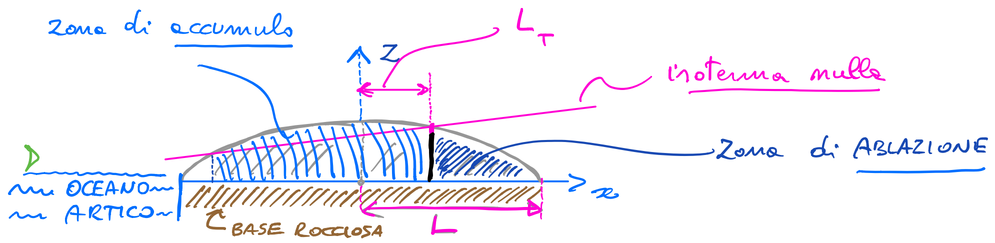
(Si noti che $[\lambda] = m$)

Va notato che se si fosse usata la legge di Glen invece dell'ipotesi di perfetta plasticità la dipendenza di h da L assume una forma più complicata

$$\left(\frac{h(x)}{H_0}\right)^{2+2/n} + \left(\frac{x}{L}\right)^{1+\frac{1}{n}} = 1$$

che per $n \to \infty$ si riduce al profilo precedente (parabolico) ma restano le singolarità in $x=0$ e $x=L$.

Analizziamo ora l'evoluzione del volume della calotta nel tempo

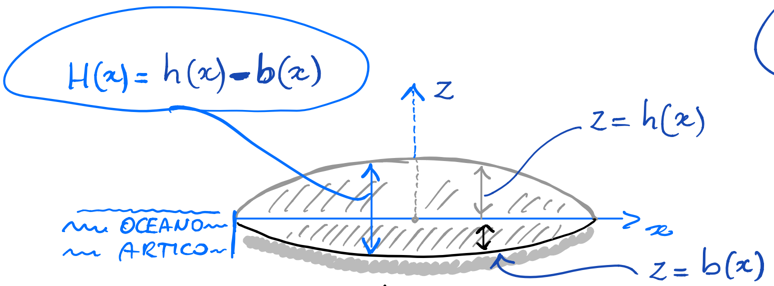


Il volume della calotta si ottiene integrando il profilo

$$V = 2\, d\, \tilde{\lambda}^{1/2} L^{1/2} \int_0^L \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)^{1/2} dx = \frac{4}{3}\, d\, \tilde{\lambda}^{1/2} L^{3/2}$$

dove $\tilde{\lambda} = \sqrt{\dfrac{2\tau_0}{\rho_i g}}$ (si noti che $[\lambda] = m^{1/2}$, coerentemente con $[V] = m^3$)

OSSERVAZIONE: L'ipotesi che la base glaciale sia orizzontale è semplificativa e può essere corretta. Per effetto del peso, la base glaciale subisce una depressione; se $H(x)$ indica lo spessore della calotta e $h(x)$ l'altitudine della sua superficie rispetto al piano $z=0$, $-b(x) = H(x) - h(x)$ rappresenta la misura della depressione isostatica



$(b(x) < 0)$

ρ_i dens. ghiaccio
ρ_m " strato roccioso

ISOSTASIA (equilibrio fra litosfera e astenosfera)

L'equilibrio richiede $\underbrace{\rho_i H(x)\, g}_{\text{peso ghiaccio}} = -\underbrace{\rho_m\, b(x)\, g}_{\text{spinta litostatica}}$ (legge di Archimede). Pertanto

$$b(x) = -\frac{\rho_i}{\rho_m} H(x) = -\frac{\rho_i}{\rho_m}\big(h(x) - b(x)\big)$$

ovvero

$$b(x) = \frac{\rho_i\, h(x)}{\rho_i - \rho_m} = \delta\, h(x)$$

dove $\delta = \dfrac{\rho_i}{\rho_i - \rho_m}$; poiché si ritiene $\rho_i / \rho_m \cong 1/3$ abbiamo $\delta \cong \frac{1}{2}$ ovvero lo strato di ghiaccio è per $1/3$ sotto il livello $z=0$ e per $\frac{2}{3}$ sopra.

In ogni caso il profilo $h(x)$ non cambia, salvo la modifica del fattore $\tilde{\lambda}$ che va cambiato in $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho_i g}}$ e quindi

$$h(x) = \lambda^{1/2}(L - x)^{1/2} \quad \text{dove} \quad \lambda = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\tau_0}{\rho_i g}}\,.$$

Il volume V varia col tempo per accumulo – ablazione: possiamo scrivere $\dot{V} = a A - a' A'$ dove $A = d\, L_T$ è l'area con velocità di accumulo (variazione dello spessore verticale nell'unità di tempo) $a(T)$ e $A' = d\,(L - L_T)$ è l'area di ablazione con velocità $a'(T)$. Pertanto

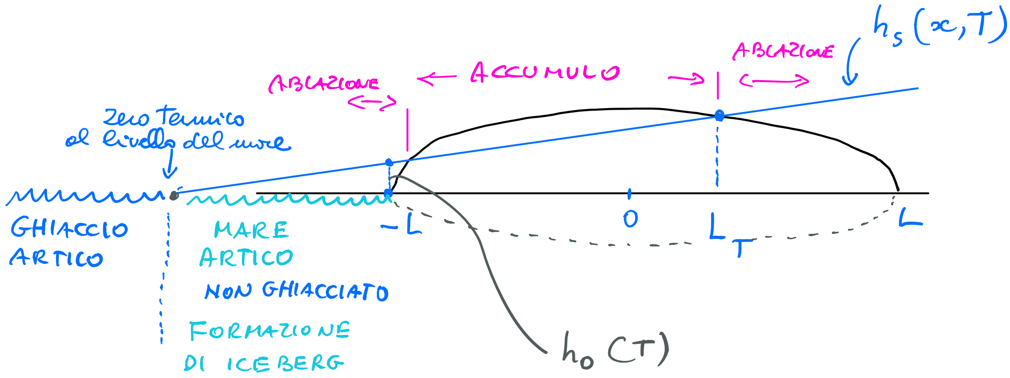
$$\dot{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3} d\, \lambda^{1/2} L^{3/2}\right) = d\, a' \left[\varepsilon L_T - (L - L_T)\right]$$

dove $\varepsilon = a/a'$ è funzione di T, e d (estensione longitudinale della calotta) è assunto costante. Se L_T è una funzione nota di L e della pendenza dell'isoterma nulla (che per semplicità supponiamo costante) otteniamo un'eq. diff. ordinaria per $L(t)$:

$$\dot{L} = \frac{a'}{2 \lambda^{1/2} L^{1/2}} \left[(1+\varepsilon) L_T - L\right]$$

Per poter scrivere l'eq. $L_T = L_T(L)$ occorre chiarire il ruolo dell'isoterma nulla (che individua il punto $(L_T, h(L_T))$ sul profilo della calotta).

Sia $h_s(x;T) = h_0(T) + s\,(x + L)$ l'equazione della retta che descrive l'isoterma: s è la pendenza rispetto a $z=0$ (che supponiamo costante), $h_0(T)$ è l'altitudine di $h_s(x,T)$ al limite $x=-L$ settentrionale del profilo della calotta. Poiché $h_s(x;T)$ cresce con la latitudine, $s>0$. Per effetto di variazioni di T la linea si può spostare ma parallelamente a sé stessa.



Se $h_0(T)=0$ l'oceano è completamente ghiacciato! Possiamo postulare una legge del tipo

$$h_0(T)=\beta\,(T-T_{00})$$

con β e T_{00} costanti positive. Ovviamente T_{00} ha il significato di temperatura alla quale $h_0(T)=0$ (la quota neve è al livello del mare). Su β non ci sono indicazioni dirette e va quindi messo in relazione con gli altri parametri del modello, in particolare con l'albedo.

Poiché ora sono presenti tre componenti riflettenti diverse, oceano, calotta e continente non coperto di ghiaccio dovremo riscrivere l'albedo in forma più "sofisticato":

$$\alpha(T) = \gamma\,\alpha_{land}(T) + (1-\gamma)\,\alpha_{ocean}(T)$$

dove γ è la frazione di superficie terrestre continentale ($\gamma \in (0,1)$) e dove $\alpha_{land}(T) = \alpha_0 + \alpha_1 L(T)$; per $L=0$ non c'è ghiaccio continentale, per $L = L_{max}$ α_{land} è al suo massimo valore possibile. Pertanto

$$\alpha_0 \le \alpha_{land}(T) \le \alpha_0 + \alpha_1 L_{max}$$

dove α_0 e α_1 sono parametri che possono essere stimati (e quindi da considerarsi noti) utilizzando valori misurati di α (Sellers 1969). Per quanto riguarda α_{ocean}

$$\alpha_{ocean}(T) = \begin{cases} \alpha_{max}, & T \le T_{\alpha,l} \\ \dfrac{\alpha_{min} - \alpha_{max}}{T_{\alpha,u} - T_{\alpha,l}}(T - T_{\alpha,l}) + \alpha_{max}, & T \in (T_{\alpha,l}, T_{\alpha,u}) \\ \alpha_{min}, & T > T_{\alpha,u} \end{cases}$$

chiaramente $T_{\alpha,l}$ e $T_{\alpha,u}$ sono valori opportuni.