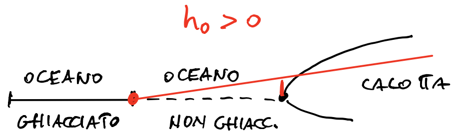
OSSERVAZIONE: L'albedo oceanico e quello continentale hanno effetti profondamente differenti: $\alpha_{ocean}$ è dominante per due motivi. La parte continentale pesa solo un terzo ($\gamma \simeq 1/3$). Inoltre il tempo caratteristico di variazione nei due casi è molto diverso (stagionale per $\alpha_{ocean}$, secolare per $\alpha_{land}$). Ciò comporta che la variazione media annuale dell'oceano ghiacciato ha un'influenza immediata sul valore della temperatura globale $T$. Questo suggerisce di usare per $\alpha_{ocean}(T)$ una funzione come quella di Sellers, come appunto abbiamo fatto.

Torniamo al problema di determinare $\beta$ in funzione degli altri parametri del modello.

$h_s$ dipende da tre parametri: $\beta$, $T_{oo}$, $L$ ed $L$ è in realtà funzione di $T$. Fissiamo $T_{oo}$ (che ha il significato che sappiamo) coincidente con $T_{\alpha,le}$, valore di $T$ a cui $\alpha_{ocean} = \alpha_{min}$. Ciò corrisponde ad una situazione in cui l'oceano libero da ghiacci è alla sua minima estensione: nel nostro schema questo corrisponde alla figura seguente

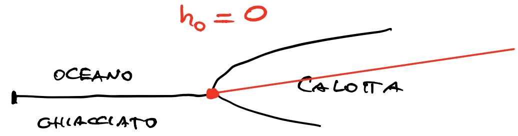
$T < T_{\alpha,u}$ $\alpha_{oc} > \alpha_{min}$

$h_0 > 0$




$T \geq T_{\alpha,u}$ $\alpha_{oc} = \alpha_{min}$

$h_0 = 0$




Fissato $T_\infty$, $h_s$ dipende solo da $\beta$ ed $L$ (e da $T$ tramite $h_0$ ed $L$). Supponiamo che alla temperatura $T_{\alpha,l}$ (quando $\alpha_{oc} = \alpha_{max}$), $L$ si trovi al suo massimo valore $L_{max}$. In tal caso $\alpha_{land} = \alpha_{land,max} = \alpha_0 + \alpha_1 L_{max}$. Allora possiamo scrivere

$$h_s(x, L_{max}) = \beta\left(T_{\alpha,l} - T_{\alpha,u}\right) + s\left(x + L_{max}\right)$$

e imponiamo infine che $h_s(L_{max}, L_{max}) = 0$

$T \leq T_{\alpha,l}$ $\alpha_{oc} = \alpha_{max}$


Infine per semplicità assumiamo che $\alpha_{land,max} = \alpha_{oc,max}$

Allora

$$L_{max} = \frac{\alpha_{oc,max} - \alpha_0}{\alpha_1} \quad \text{e} \quad 0 = \beta\left(T_{\alpha,l} - T_{\alpha,u}\right) + s\left(L_{max} + L_{max}\right)$$

forniscono $\beta$ esplicitamente in funzione degli altri parametri:

$$\beta = \frac{2s\left(\alpha_{land,max} - \alpha_0\right)}{\alpha_1\left(T_{oo} - T_{\alpha,e}\right)}$$

$$= \frac{2s\left(\alpha_{oc,max} - \alpha_0\right)}{\alpha_1\left(T_{\alpha,u} - T_{\alpha,e}\right)}$$

Possiamo finalmente scrivere esplicitamente $L_T = L_T(L)$ :
$L_T(L)$ è la massima estensione in direzione meridionale della zona di accumulo. Quindi, per definizione, $L_T$ è determinato come quel valore di $x > 0$ per il quale $h(x)$ uguaglia $h_s(x, T)$ : dunque

$$\lambda^{1/2}(L - x)^{1/2} = h_s(x, T) = h_0(T) + s(x + L)$$

dove $L = L(T)$. Dobbiamo allora risolvere l'eq.

$$\lambda^{1/2}(L - L_T)^{1/2} = h_0(T) + s(L_T + L)$$

nella forma $L_T = L_T(L)$. Quadrando si ha 

$$\lambda(L - L_T) = s^2(L_T + L)^2 + 2s\,h_0(L_T + L) + h_0^2$$

dove $h_0$ è funzione nota di $T$. È significativa solo $L_T^+$:

$$L_T(L;T) = \frac{1}{2s^2}\left\{\left(8Ls^2\lambda + \lambda^2 + 4s\,h_0(T)\lambda\right)^{1/2} - \left(2Ls^2 + \lambda + 2s\,h_0(T)\right)\right\}$$

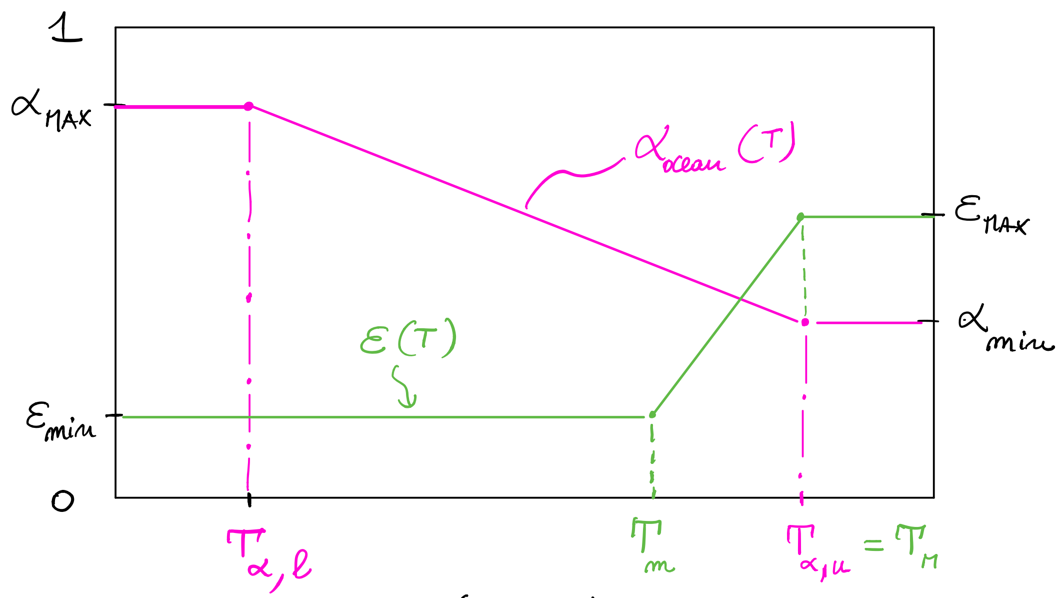
Prima di "accoppiare" l'eq. differenziale di $L(t)$ con quella per $T(t)$ del modello originario è analizzare la relazione fra $a$ e $a'$, velocità di accumulo-ablazione, in funzione di $T$.

Si suppone che le precipitazioni atmosferiche aumentino con la temperatura (perché aumenta l'evaporazione oceanica e quindi l'accumulo di umidità in Atmosfera). Quindi dovrebbe essere $\varepsilon(T) = \dfrac{a(T)}{a'(T)}$ crescente con $T$. Tuttavia questo è un punto delicato del modello. Si ha un feedback positivo di $T$ su $\varepsilon$: se da un lato l'aumento di $T$ produce un ciclo idrogeologico più attivo (maggiori precipitazioni), dall'altro favorisce lo scioglimento del ghiaccio, cioè l'aumento di $a'(T)$.

La reale dipendenza di $\varepsilon$ da $T$ appare molto complessa da modellare. D'altra parte per alti valori di $T$ sembra essere funzione decrescente di $T$.
Una scelta plausibile e semplice può essere $\varepsilon(T) \sim T$ intesa come approssimazione locale di $\varepsilon(T)$ nel piccolo range di valori di $T$ per i quali si applica il modello.
Chiameremo questo meccanismo

"temperature - precipitation feedback"

Mettendo in uno stesso grafico sia $\alpha_{ocean}(T)$ che $\varepsilon(T)$ otteniamo




La legge $\varepsilon(T) \sim T$ nel range $(T_m, T_M)$ riflette la semplice constatazione che le precipitazioni nevose più intense si registrano negli inverni più miti, a causa dell'incremento di evaporazione degli oceani alle medie latitudini: l'aria carica di umidità si sposta da sopra gli oceani verso le Terre continentali e precipita in forma nevosa nelle zone glaciali determinando un accumulo maggiore della perdita !

Analizziamo ora le soluzioni stazionarie dell'equazione

$$\dot{L} = \frac{a'}{2\lambda^{1/2} L^{1/2}} \left[(1+\varepsilon) L_T - L\right]$$

che sono date da $L(T) = (1+\varepsilon(T)) L_T(L,T)$.

Sviluppando i conti, dopo un po' di algebra, si trova

$$L^{\pm}(T) = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{h_0(T)}{2h^*(T)} \pm \sqrt{1 - \frac{h_0(T)}{h^*(T)}}\right\} L^*(T)$$

dove

$$L^*(T) = \frac{\lambda \varepsilon(T)[1+\varepsilon(T)]}{s^2[2+\varepsilon(T)]^2}, \qquad h^*(T) = \frac{\lambda\, \varepsilon(T)}{4s[2+\varepsilon(T)]}$$

e $h_0(T) = \beta(T - T_{\alpha,u})$. Per avere soluzioni reali deve essere

$$\beta(T - T_{00}) \le h^*(T) \iff T \le T_{\infty} + \frac{h^*(T)}{\beta} \le T_{\infty} + \frac{h^*(T_M)}{\beta}$$

Posto $\varepsilon_{MAX} = 0.5$ e $\varepsilon_{MIN} = 0.1$, $s \cong 10^{-3}$, $\alpha_{land,max} \simeq 0.8$

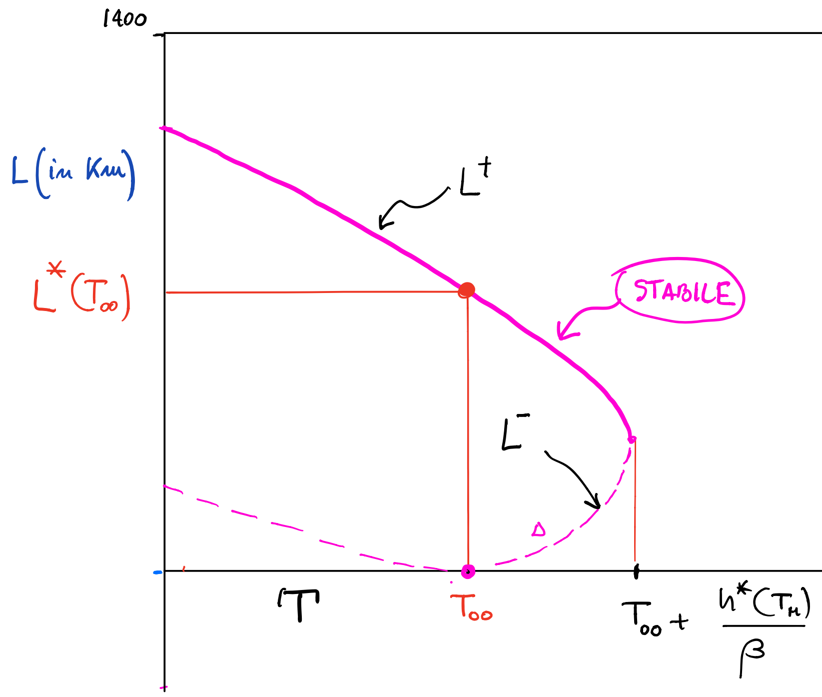
$\alpha_{max} = 0.85$, $\alpha_{min} = 0.25$, $T_m = 273$, $T_M = 283 = T_{\alpha,u} (= T_{00})$,

$\alpha_0 = 0.25$, $\alpha_1 = 4.1 * 10^{-7}$, $\lambda \simeq 1$ (vedi dopo)

$$T_{\alpha,M} + \frac{h^*(T_M)}{\beta} \simeq 289$$

Quindi esistono soluzioni reali solo se $T \leq \bar{T} = 289$ (K)

Il grafico di $L^{\pm}(T)$ (luogo degli equilibri della dinamica della calotta glaciale) è della forma seguente




Notiamo subito che se $T = T_{oo}$ allora $h_o(T) \equiv 0$ e $L^{\pm}(T_{oo}) = \frac{1}{2}\left(1 \pm 1\right) L^*(T_{oo})$ che dà luogo all'equilibrio $L^-(T_{oo}) = 0$ e $L^+(T_{oo}) = L^*(T_{oo})$. Se $T < T_{oo}$, $h_o(T)$ è negativo. Per $T < T_{oo}$, $h_o(T) < 0$, $L^{\pm}(T)$ sono entrambe positive. Per $T \in \left(T_{oo}, T_{oo} + \frac{h^*(T_H)}{\beta}\right]$ ci sono ancora due soluzioni positive mentre non ci sono soluzioni per $T > T_0 + \dfrac{h^*(T_M)}{\beta}$,

L'analisi di stabilità si può fare linearizzando l'eq.

$$\dot{L} = \frac{a'}{2\lambda^{1/2} L^{1/2}} \left[ (1+\varepsilon) L_T - L \right] = \mathcal{F}(L, L_T(L))$$

attorno ad un valore di equilibrio. Detto $L_e(T)$ il generico equilibrio, posto

$$L(t) = L_e(T) + \omega(t)$$

(con $\omega(t)$ perturbazione e $T$ parametro di biforcazione) si ha

$$\dot{\omega} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right|_{L = L_e(T)} \omega$$

per cui occorre studiare il segno di $\left. \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right|_{L = L_e(T)}$

come funzione di $T$. Dopo (molta) algebra si vede che il ramo $L^-$ è sempre instabile mentre il ramo $L^+$ è sempre stabile.

Conviene ora riscrivere l'eq. differenziale per $L$ in forma adimensionale scegliendo una scala conveniente per $L$ ed $L_T$. Una scelta plausibile è data da $L^*(T_{MAX})$. Per $s$ = costante, $L^*(T)$ è funzione monotona crescente di $\varepsilon > 0$ (a sua volta crescente rispetto a $T$). 

Poniamo allora

$$L^*_M = L^*(T_{max}) = \frac{\lambda\, \varepsilon_{max}(1+\varepsilon_{max})}{s^2(2+\varepsilon_{max})^2}$$

e definiamo le lunghezze adimensionali

$$\ell = \frac{L}{L^*_M} \quad , \quad \ell_T = \frac{L_T}{L^*_M}$$

Allora l'eq di evoluzione della calotta glaciale si scrive

$$c_L\, \dot{\ell} = \ell^{-1/2}\left[(1+\varepsilon(T))\ell_T(\ell) - \ell\right] \equiv f(\ell; T)$$

dove $c_L = \frac{3}{a'}\sqrt{\lambda L^*_M}$ è proporzionale al "tempo di rilassamento" di $\ell$ al valore di equilibrio. Infatti se $f(\ell;T) = f(\ell_{eq};T) + \left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{\ell=\ell_{eq}}(\ell-\ell_{eq})$, l'eq. per $\ell$ si linearizza in

$$c_L\, \dot{\overbrace{(\ell-\ell_{eq})}} \cong \left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{\ell=\ell_{eq}}(\ell-\ell_{eq})$$

con soluzione

$$\ell(t) - \ell_{eq} \cong \exp\left[-\left.\frac{\partial f}{\partial \ell}\right|_{\ell=\ell_{eq}} t/c_L\right]$$

Utilizzando i valori caratteristici dei parametri

$$a' = O(3\,m/anno), \quad L^*_M = O(10^7 m)$$

$$\tau_0 \cong 10^4\, Pa \,, \quad \lambda = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\tau_0}{C_i g}} \cong \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2*10^5}{9*10^2*10}} \cong 1$$

si ha

$$C_L = \frac{3}{a'}\left( L_M^* \right)^{1/2} \cong 5.6 * 10^3 \text{ anni}$$

un valore più che significativo!

Siamo ora finalmente in grado di scrivere l'intero modello. Riprendiamo l'eq. per $T$ che ora scriviamo

$$c_T \dot{T} = Q\left\{1 - \left[\gamma(\alpha_0 + \alpha_1 L_M^* \ell\,\right] + (1-\gamma)\alpha_{ocean}(T)\right\} -$$
$$- \sigma g(T)\, T^4$$

ora l'eq. contiene, attraverso il termine $\ell(T)$, la dipendenza di $\alpha$ dall'estensione della calotta glaciale. Adimensionalizziamo l'eq. ponendo

$$\theta = T/T_s$$

dove $T_s$ è un valore prossimo al clima attuale. Usiamo poi una scala di tempo identica $t_{ref}$ nelle due eq. e definiamo $t_{ref} = c_T T_s$ e

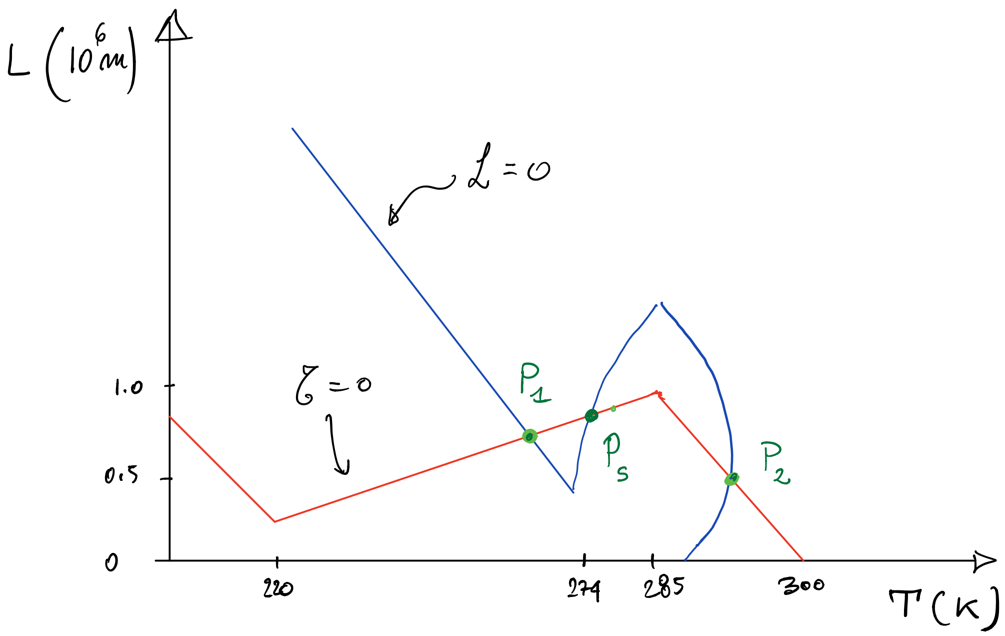
$$\mu = \frac{t_{ref}}{C_L} = \frac{c_T T_s}{C_L}$$

Le due eq. del modello si possono allora scrivere in forma adimensionale come segue

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \mathcal{T}(\theta, \ell) \\ \dot{\ell} = \mu \mathcal{L}(\theta, \ell) \end{cases}$$

Se Q è assunto costante, il sistema è autonomo, e possiamo visualizzarne le orbite in $\mathbb{R}^2$. Gli equilibri isolati sono determinati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\theta, \ell) = 0 \\ \mathcal{L}(\theta, \ell) = 0 \end{cases}$$




$P_1 \cong (267, 0.8)$ , $P_s \cong (277, 0.9)$ , $P_2 \cong (293, 0.6)$

L'analisi lineare si fa utilizzando la matrice

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\theta \mathcal{T} & \partial_\ell \mathcal{T} \\ \partial_\theta \mathcal{L} & \partial_\ell \mathcal{L} \end{pmatrix}$$

L'analisi mostra che $P_1$ e $P_2$ sono punti di sella (instabili) indipendentemente dal valore di $\mu > 0$. Infatti se $(x, y)$ rappresenta una perturbazione dell'equilibrio $P_j$ ($j = 1, 2$ opp s), posto

$$a_j = \partial_\theta \mathcal{T}(\theta_j, \ell_j) \ , \quad b_j = \partial_\ell \mathcal{T}(\theta_j, \ell_j)$$

$$c_j = \partial_\theta \mathcal{L}(\theta_j, \ell_j) \ , \quad d_j = \partial_\ell \mathcal{L}(\theta_j, \ell_j)$$

il sistema differenziale per la perturbazione è

$$\begin{cases} \dot{x} = a_j x + b_j y \\ \frac{1}{\mu} \dot{y} = c_j x + d_j y \end{cases} \qquad (\mu \neq 1)$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_\pm^{(j)} = \frac{1}{2}\left( a_j + \mu d_j \pm \left[ (a_j + \mu d_j)^2 - 4\mu J_j \right]^{1/2} \right)$$

dove $J_j = J(P_j) = a_j d_j - b_j c_j$. Si verifica che $J_1$ è negativo e quindi $\lambda_\pm^{(1)}$ sono entrambi reali e di segno opposto. Lo stesso si verifica per $j = 2$

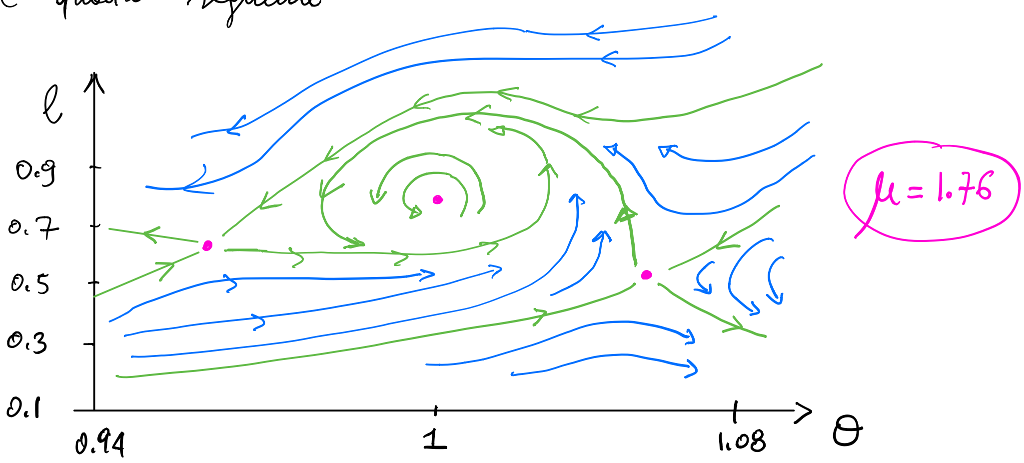
Per quanto riguarda $P_S$ la discussione è più complicata. Si verifica che

$$a_s > 0 \ , \quad T_s > 0 \ , \quad d_s < 0$$

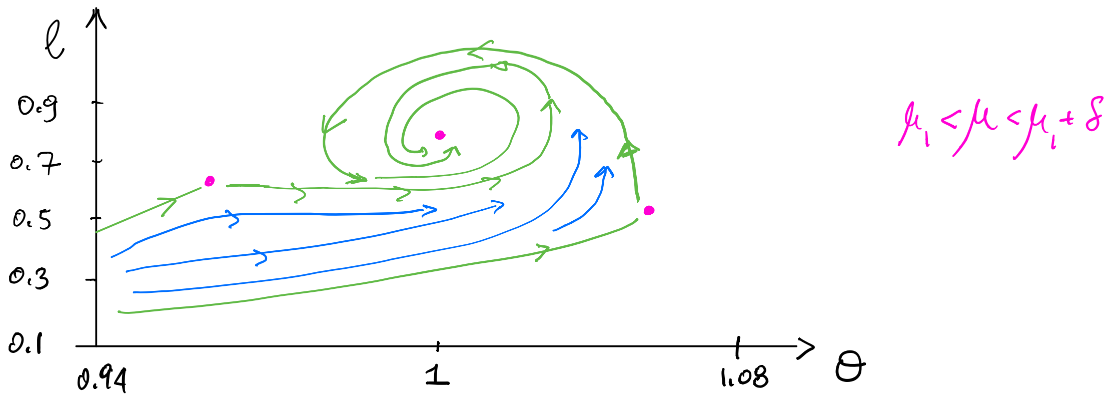
Il parametro $\mu$ è positivo per definizione; se $\mu$ cresce $\lambda_+^{(s)}$ e $\lambda_-^{(s)}$ rimangono reali, positivi e distinti fino a che $\mu \to \mu_0 \cong 0.902$ valore per il quale coalescono e per $\mu > \mu_0$ diventano complessi coniugati con parte reale positiva. Per $\mu = \mu_1 = -\frac{a_s}{d_s} \cong 1.758$ gli autovalori attraversano l'asse immaginario da destra verso sinistra. Allora $P_s$ si comporta come un fuoco in un intorno di $\mu_1$ (stabile se $\mu > \mu_1$ e instabile per $\mu < \mu_1$). Continuando ad aumentare $\mu$, $\lambda_+$ e $\lambda_-$ sono nel semipiano sinistro e coalescono nell'asse negativo per $\mu \cong 34.6 = \mu_2$.

Per $\mu > \mu_2$ gli autovalori sono reali distinti e negativi.

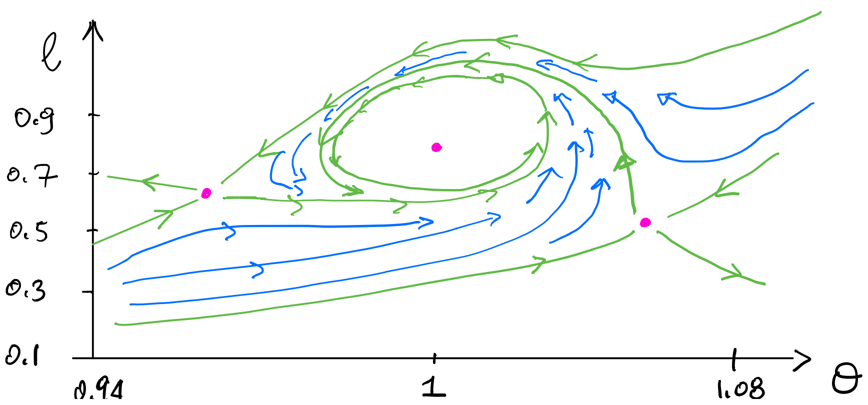
Tracciando le orbite in un intorno dei tre punti si ha il "quadro" seguente



Nel grafico le curve in verde sono le separatrici dei punti di sella $P_1$ e $P_2$. Il grafico corrisponde a $\mu$ in un intorno di $\mu_1 \cong 1{,}76$. Che succede per $\mu \in (\mu_1 - \delta, \mu_1 + \delta)$ ? Per $\mu \in (\mu_1, \mu_1 + \delta)$, $P_s$ è un fuoco stabile




le orbite (in blu) che si trovano fra le tre separatrici (in verde) devono tendere in un tempo infinito a $P_s$ girando in senso antiorario. Se invece $\mu \in (\mu_1 - \delta, \mu_1)$ $P_s$ è un fuoco instabile, le orbite fra le separatrici si allontanano da $P_s$ mantenendo il verso antiorario



In questo caso le orbite fra le separatrici non possono tendere a $P_5$ ma nemmeno a $P_1$ o $P_2$; non potendo intersecarsi e dovendo svilupparsi in un tempo infinito si deve necessariamente venire a formare un CICLO LIMITE STABILE intorno a $P_5$.

Una volta scoperta l'esistenza del ciclo limite stabile si possono intraprendere i seguenti ulteriori passi.

(1) Studiare le proprietà di tale soluzione periodica, in particolare il suo periodo

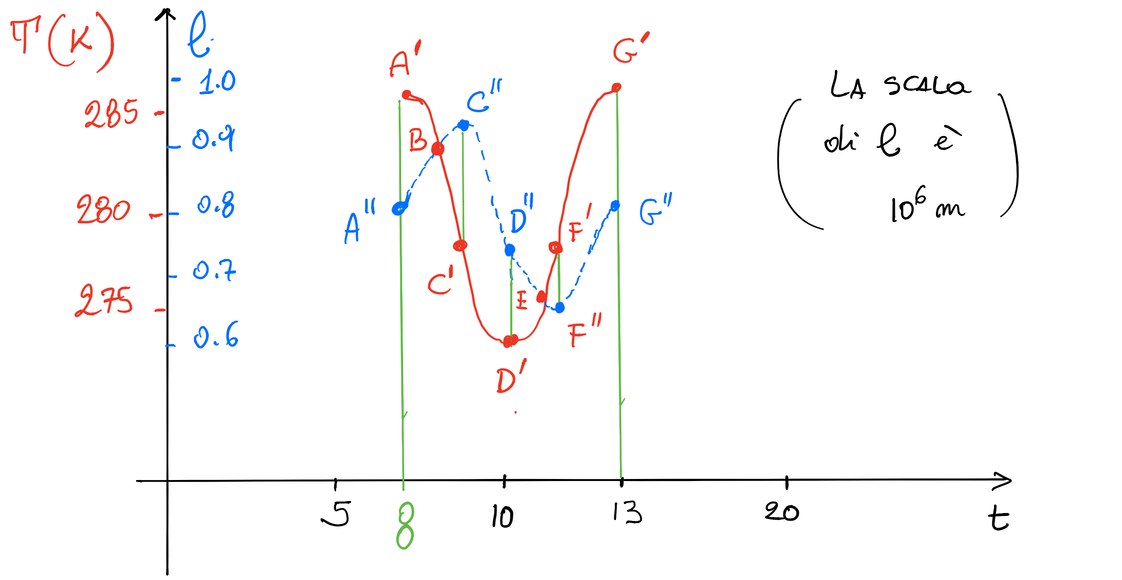
(2) Far variare $Q$ considerando la sua dipendenza dai parametri orbitali

(3) Stabilire se il ciclo limite è il risultato di una biforcazione di Hopf supercritica.

(4) Confrontare le scale di oscillazione per la temperatura, come previste dal modello, con quelle reali valutate col metodo del contenuto di $CO_2$ nei campioni di ghiaccio Antartico

Sono tutti sviluppi che possono essere fatti solo con procedure numeriche e non ce ne occuperemo.

Vale però almeno la pena di riportare i grafici di $T(t)$ ed $\ell(t)$ in un unico diagramma con $t$ espresso in ka (kiloanni) su un periodo di oscillazione




(a) Quando $T$ è al suo massimo (A') il ciclo idrologico è attivo, la neve si accumula facendo aumentare $\ell$ (A''). Poiché $\ell$ cresce l'albedo aumenta e $T$ comincia a decrescere

(b) Quando $\ell$ raggiunge il suo massimo (C''), la Temperatura continua a diminuire (C') mentre la calotta inizia gradualmente a ridursi. La temperatura raggiunge il suo minimo (D') mentre la calotta continua la sua contrazione fino al minimo F'' mentre $T$ è ora in fase di crescita. Il ciclo idrologico si intensifica (più precipitazioni) e la calotta ricomincia a crescere.