UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

4.3.2020

FILA "F"

Esercizio 1

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge z) \vee \neg(z \to a) \vee \neg(b \to c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Soluzione – La formula φ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big((a \wedge z) \vee \neg(z \to a) \vee \neg(b \to c) \vee (b \wedge c \wedge x) \vee (y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \neg z)\big) \equiv$$

$$\equiv \neg(a \wedge z) \wedge (z \to a) \wedge (b \to c) \wedge \neg(b \wedge c \wedge x) \wedge \neg(y \wedge \neg z) \wedge \neg(\neg y \wedge \neg z) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee a) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg x) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (y \vee z)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{\neg a, \neg z\}, \{a, \neg z\}, \{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg y, z\}, \{y, z\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$, $\{\neg y, z\}$, $\{y, z\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{\neg a, \neg z\}, \{a, \neg z\}) = \{\neg z\}$;

$$\{\{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg y, z\}, \{y, z\}, \{\neg z\}\}.$$

Pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$;

$\mathrm{Ris}_z(\{\neg y, z\}, \{\neg z\}) = \{\neg y\}$;
$\mathrm{Ris}_z(\{y, z\}, \{\neg z\}) = \{y\}$;

$$\{\{\neg b, c\}, \{\neg b, \neg c, \neg x\}, \{\neg y\}, \{y\}\}.$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{\neg b, c\}$, $\{\neg b, \neg c, \neg x\}$;

$\text{Ris}_y(\{\neg y\}, \{y\}) = [\,]$;

$$\{\{\neg b,\, c\},\, \{\neg b,\, \neg c,\, \neg x\},\, [\,]\}.$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, è inutile proseguire con l'algoritmo e possiamo già concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi φ è una tautologia.

Esercizio 2

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a,\, b\},\, \{\neg a,\, \neg b,\, x\},\, \{a,\, \neg b,\, y\},\, \{a,\, \neg b,\, \neg x\},\, \{\neg a,\, y\},\, \{b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg b,\, x,\, y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Soluzione — Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliendo i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{b, \neg x, \neg y\}$, $\{\neg b, x, y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$;

$\text{Ris}_a(\{a, b\}, \{\neg a, \neg b, x\}) = \{b, \neg b, x\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_a(\{a, b\}, \{\neg a, y\}) = \{b, y\}$;
$\text{Ris}_a(\{a, \neg b, y\}, \{\neg a, \neg b, x\}) = \{\neg b, x, y\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\text{Ris}_a(\{a, \neg b, y\}, \{\neg a, y\}) = \{\neg b, y\}$;
$\text{Ris}_x(\{a, \neg b, \neg x\}, \{\neg a, \neg b, x\}) = \{\neg b, \neg x, x\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_x(\{a, \neg b, \neg x\}, \{\neg a, y\}) = \{\neg b, \neg x, y\}$;

$$\{\{b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg b,\, x,\, y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{b,\, y\},\, \{\neg b,\, y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, y\}\}\,.$$

Poiché la clausola $\{\neg b, y\}$ è contenuta nelle due clausole $\{\neg b, x, y\}$ e $\{\neg b, \neg x, y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{\neg b,\, \neg x,\, \neg y\},\, \{b,\, y\},\, \{\neg b,\, y\}\}\,.$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: non ce ne sono ;

$\text{Ris}_b(\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}) = \{\neg x, \neg y\}$;
$\text{Ris}_b(\{b, \neg x, \neg y\}, \{\neg b, y\}) = \{\neg x, \neg y, y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_b(\{b, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}) = \{y, \neg x, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_b(\{b, y\}, \{\neg b, y\}) = \{y\}$;

$$\{\{\neg x, \neg y\},\, \{y\}\}$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{y\}$;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{y\}\}$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\ \}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità v_0 che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su y, x, b, a come segue:

$$v_0(y) := 1 ; \qquad v_0(x) := 0 ; \qquad v_0(b) := 0 ; \qquad v_0(a) := 1 .$$

<u>Esercizio 3</u>

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $15\,106$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $1\,651$ (cioè: $a := 15\,106_{\mathit{sette}}$, $b := 1\,651_{\mathit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *diciassette*.

Soluzione — Si ha

$$a = 1 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 6 = 1 \cdot 2\,401 + 5 \cdot 343 + 1 \cdot 49 + 6 =$$
$$= 2\,401 + 1\,715 + 49 + 6 = 4\,171$$

e

$$b = 1 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9 + 1 = 1 \cdot 729 + 6 \cdot 81 + 5 \cdot 9 + 1 =$$
$$= 729 + 486 + 45 + 1 = 1\,261 .$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra $4\,171$ e $1\,261$ utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$4\,171 = 1\,261 \cdot 3 + 388$;
$1\,261 = 388 \cdot 3 + 97$;
$388 = 97 \cdot 4 + 0$.

Dunque

$$\mathrm{MCD}(4\,171, 1\,261) = 97$$

e

$$m = \mathrm{mcm}(4\,171, 1\,261) = \tfrac{4\,171 \cdot 1\,261}{97} = 43 \cdot 1\,261 = 54\,223 .$$

Scriviamo infine m in base *diciassette* eseguendo successive divisioni per 17 :

$54\,223 = 17 \cdot 3\,189 + 10$;
$3\,189 = 17 \cdot 187 + 10$;
$187 = 12 \cdot 11 + 0$;
$11 = 12 \cdot 0 + 11$.

Pertanto

$$m = \mathrm{B0AA}_{\mathit{diciassette}} .$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x\mathrm{R}y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme **A** $:= \{8,\ 14,\ 43,\ 44,\ 59\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Soluzione $-$ (i) Siano $x, y \in \mathbb{N}$. Se x, y sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se x, y sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello dispari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

(ii) per la (i), gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che

$$43 \mathrm{\ R\ } 59, \qquad 59 \mathrm{\ R\ } 8, \qquad 8 \mathrm{\ R\ } 14, \qquad 14 \mathrm{\ R\ } 44$$

cosicché 43 è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**).

(iii) l'insieme dei numeri dispari non ha massimo (se x è un numero dispari, anche $x+2$ è dispari; si ha che $x \leq x+2$ e quindi $x \mathrm{\ R\ } x+2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero pari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri pari, cioè 0.

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$12\,091\, x = 12\,317\, y\,.$$

Soluzione $-$ L'equazione proposta si può scrivere

$$12\,091\, x - 12\,317\, y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

$$(*) \qquad 12\,091\, x + 12\,317\, y = 0$$

cambiando segno al valore della y; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$$x := \tfrac{12\,317}{\delta} h, \qquad y := -\tfrac{12\,091}{\delta} h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

dove δ è il massimo comun divisore fra $12\,091$ e $12\,317$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$$12\,317 = 12\,091 \cdot 1 + 226\,;$$
$$12\,091 = 226 \cdot 53 + 113\,;$$
$$226 = 113 \cdot 2 + 0\,.$$

Pertanto $\delta = 113$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x \coloneqq 109h, \qquad y \coloneqq 107h\,.$$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{7\,936}$ l'anello delle classi di resto modulo $7\,936$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{7\,936}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{7\,936}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad [15]^x = [1]\,.$$

Soluzione $-$ Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione x_0 in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di x_0 è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[14]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 14 e $7\,936$ è uguale a 1; ma questo è impossibile, perché 14 e $7\,936$ sono entrambi pari. Pertanto l'equazione $[22]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$.

Analogamente, l'equazione $[15]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 15 e $7\,936$ è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 15 e $7\,936$:

$$7\,936 = 15 \cdot 529 + 1\,;$$
$$15 = 1 \cdot 15 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra 15 e $7\,936$ è dunque 1; pertanto l'equazione $[15]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(7\,936)$.

Per calcolare $\varphi(7\,936)$ ci serve la fattorizzazione di $7\,936$.

È facile vedere che $7\,936 = 2^8 \cdot 31$ con 31 numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per 2 né per 3 né per 5). Dunque

$$\varphi(7\,936) = \varphi(2^8) \cdot \varphi(31) = 2^7 \cdot 30 = 128 \cdot 30 = 3\,840$$

è una soluzione dell'equazione $[15]^x = [1]$.

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $3\,840$ è soluzione, moltiplicando $3\,840$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $3\,840\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *otto* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

Soluzione $-$ Poiché le otto cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale n che rispetti le condizioni del problema. Poiché n deve essere multiplo di *tre*, l'ultima cifra a destra nella scrittura in base *nove* può essere soltanto 3 o 6 (abbiamo escluso lo zero). Sono due casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è 3, le prime sette possono essere scelte soltanto fra $1, 2$ e 3; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 6, le prime sette possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e 6; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$ possibilità.

Applicando il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$36 + 792 = 828\,.$$