UNIVERSITA' DI FIRENZE – CDL IN INFORMATICA – A. A. 2019-2020

Prova "*in itinere*" per "Matematica Discreta e Logica" – secondo appello

4.3.2020

FILA "D"

Esercizio 1

Siano a, b, c, x, y, z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := (a \wedge c \wedge y) \vee (b \wedge \neg x) \vee (\neg b \wedge \neg x) \vee (x \wedge z) \vee \neg(x \to z) \vee \neg(y \to c)$$

Si dica, motivando la risposta, se φ è una tautologia..

Soluzione – La formula φ è una tautologia se e soltanto se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Scriviamo $\neg\varphi$ in forma normale congiuntiva (FNC) e poi applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam all'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$.

$$\neg\varphi = \neg\big((a \wedge c \wedge y) \vee (b \wedge \neg x) \vee (\neg b \wedge \neg x) \vee (x \wedge z) \vee \neg(x \to z) \vee \neg(y \to c)\big) \equiv$$

$$\equiv \neg(a \wedge c \wedge y) \wedge \neg(b \wedge \neg x) \wedge \neg(\neg b \wedge \neg x) \wedge \neg(x \wedge z) \wedge (x \to z) \wedge (y \to c) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee \neg c \vee \neg y) \wedge (\neg b \vee x) \wedge (b \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee c)$$

L'insieme di clausole associato a $\neg\varphi$ è

$$\mathcal{K} := \{\{\neg a, \neg c, \neg y\}, \{\neg b, x\}, \{b, x\}, \{\neg x, \neg z\}, \{\neg x, z\}, \{c, \neg y\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$.

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg a, \neg c, \neg y\}$, $\{\neg x, \neg z\}$, $\{\neg x, z\}$, $\{c, \neg y\}$;

$\text{Ris}_b(\{\neg b, x\}, \{b, x\}) = \{x\}$;

$$\{\{\neg a, \neg c, \neg y\}, \{\neg x, \neg z\}, \{\neg x, z\}, \{c, \neg y\}, \{x\}\}.$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{\neg a, \neg c, \neg y\}$, $\{c, \neg y\}$;

$\text{Ris}_x(\{\neg x, \neg z\}, \{x\}) = \{\neg z\}$;
$\text{Ris}_x(\{\neg x, z\}, \{x\}) = \{z\}$;

$$\{\{\neg a, \neg c, \neg y\}, \{c, \neg y\}, \{\neg z\}, \{z\}\}.$$

Pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: $\{\neg a, \neg c, \neg y\}$, $\{c, \neg y\}$;

$\mathrm{Ris}_z(\{z\}, \{\neg z\}) = [\,]$;

$$\{\{\neg a, \neg c, \neg y\}, \{c, \neg y\}, [\,]\}.$$

Avendo ottenuto la clausola vuota, è inutile proseguire con l'algoritmo e possiamo già concludere che $\mathcal{K}$ non è soddisfacibile e quindi φ è una tautologia.

Esercizio 2

Siano a, b, x, y variabili proposizionali, e sia

$$\mathcal{K} := \{\{a, y\}, \{\neg a, x, \neg y\}, \{a, b, \neg y\}, \{a, \neg x, \neg y\}, \{\neg a, b\}, \{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}\}.$$

Si applichi l'algoritmo di Martin Davis e Hilary Putnam, scegliendo come *pivot* le variabili proposizionali a, b, x, y ***in quest'ordine*** per stabilire se $\mathcal{K}$ è soddisfacibile; e, nel caso che la risposta sia affermativa, si determini una valutazione di verità che soddisfa $\mathcal{K}$.

Soluzione – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme $\mathcal{K}$ scegliendo i pivot nell'ordine imposto dall'esercizio.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg b, \neg x, y\}$, $\{b, x, \neg y\}$, $\{\neg b, \neg x, \neg y\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, x, \neg y\}) = \{x, y, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, y\}, \{\neg a, b\}) = \{b, y\}$;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, b, \neg y\}, \{\neg a, x, \neg y\}) = \{b, x, \neg y\}$ (si sopprime perché già esistente) ;
$\mathrm{Ris}_a(\{a, b, \neg y\}, \{\neg a, b\}) = \{b, \neg y\}$;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg x, \neg y\}, \{\neg a, x, \neg y\}) = \{x, \neg x, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_x(\{a, \neg x, \neg y\}, \{\neg a, b\}) = \{b, \neg x, \neg y\}$;

$$\{\{\neg b, \neg x, y\}, \{b, x, \neg y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, y\}, \{b, \neg y\}, \{b, \neg x, \neg y\}\}$$

Poiché la clausola $\{b, \neg y\}$ è contenuta nelle due clausole $\{b, x, \neg y\}$ e $\{b, \neg x, \neg y\}$, queste ultime possono essere soppresse. Siamo così ricondotti a considerare il seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg b, \neg x, y\}, \{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, y\}, \{b, \neg y\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: non ce ne sono ;

$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, y\}, \{b, y\}) = \{\neg x, y\}$;
$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, y\}, \{b, \neg y\}) = \{\neg x, y, \neg y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, y\}) = \{\neg x, \neg y, y\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, \neg x, \neg y\}, \{b, \neg x\}) = \{\neg x, \neg y\}$;

$$\{\{\neg x, y\}, \{\neg x, \neg y\}\}$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: non ce ne sono ;

non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\}$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che $\mathcal{K}$ è soddisfacibile. Una valutazione di verità v_0 che soddisfa $\mathcal{K}$ si può ricavare definendola "a ritroso" su y, x, b, a come segue:

$$v_0(y) := 0\,; \qquad v_0(x) := 0\,; \qquad v_0(b) := 1\,; \qquad v_0(a) := 1\,.$$

<u>Esercizio 3</u>

Sia a il numero naturale che in base *sette* si scrive $36\,620$ e sia b il numero naturale che in base *nove* si scrive $3\,667$ (cioè: $a := 36\,620_{\textit{sette}}$, $b := 3\,667_{\textit{nove}}$) . Si trovi il minimo comune multiplo m fra a e b e lo si scriva in base *dodici*.

Soluzione — Si ha

$$a = 3 \cdot 7^4 + 6 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 0 = 3 \cdot 2\,401 + 6 \cdot 343 + 6 \cdot 49 + 2 \cdot 7 =$$
$$= 7\,203 + 2\,058 + 294 + 14 = 9\,569$$

e

$$b = 3 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + 7 = 3 \cdot 729 + 6 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 7 =$$
$$= 2\,187 + 486 + 54 + 7 = 2\,734\,.$$

Calcoliamo il massimo comun divisore fra $9\,569$ e $2\,734$ utilizzando l'algoritmo di Euclide:

$9\,569 = 2\,734 \cdot 3 + 1\,367\,;$
$2\,734 = 1\,367 \cdot 2 + 0\,.$

Dunque

$$\mathrm{MCD}(9\,569, 2\,734) = 1\,367$$

e

$$m = \mathrm{mcm}(9\,569, 2\,734) = \tfrac{9\,569 \cdot 2\,734}{1\,367} = 7 \cdot 2\,734 = 19\,138\,.$$

Scriviamo infine m in base *dodici* eseguendo successive divisioni per 12 :

$19\,138 = 12 \cdot 1\,594 + 10\,;$
$1\,594 = 12 \cdot 132 + 10\,;$
$132 = 12 \cdot 11 + 0\,;$
$11 = 12 \cdot 0 + 11\,.$

Pertanto

$$m = \mathrm{B0AA}_{\textit{dodici}}\,.$$

Esercizio 4

Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, sia $\leq$ l'usuale relazione di ordine totale, e si ponga

$x\mathrm{R}y$ se e soltanto se si verifica una delle seguenti condizioni:

- x, y sono entrambi pari e $x \leq y$, oppure
- x, y sono entrambi dispari e $x \leq y$, oppure
- x è dispari e y è pari.

Non è richiesta la verifica che R è una relazione di ordine, ma:

(i) si dica, motivando la risposta, se R è una relazione di ordine totale;

(ii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme $\mathbf{A} := \{8, 14, 28, 37, 49\}$ ha minimo (precisando in tal caso qual è il minimo) e/o ha estremo inferiore (precisando in tal caso qual è l'estremo inferiore);

(iii) si dica, motivando la risposta, se con riferimento alla relazione R l'insieme dei numeri dispari ha massimo (precisando in tal caso qual è il massimo) e/o ha estremo superiore (precisando in tal caso qual è l'estremo superiore).

Soluzione $-$ (i) Siano $x, y \in \mathbb{N}$. Se x, y sono entrambi pari, sono confrontabili perché $\leq$ è una relazione di ordine totale (come già precisato nel testo dell'esercizio). Lo stesso accade se x, y sono entrambi dispari. Se uno di essi è pari e l'altro è dispari, quello dispari precede l'altro per definizione di R. Dunque R è una relazione di ordine totale.

(ii) per la (i), gli elementi di **A** si possono confrontare a due a due, e si ha che

$$37 \mathrm{~R~} 49, \qquad 49 \mathrm{~R~} 8, \qquad 8 \mathrm{~R~} 14, \qquad 14 \mathrm{~R~} 28$$

cosicché 37 è il minimo di **A** (e quindi anche l'estremo inferiore di **A**).

(iii) l'insieme dei numeri dispari non ha massimo (se x è un numero dispari, anche $x+2$ è dispari; si ha che $x \leq x+2$ e quindi $x \mathrm{~R~} x+2$ per come è definita R) ma è superiormente limitato da ogni numero pari. Il suo estremo superiore è dunque il minimo dell'insieme dei numeri pari, cioè 0.

Esercizio 5

Si trovino ***tutte*** le soluzioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dell'equazione

$$13\,231\, x = 13\,493\, y\,.$$

Soluzione $-$ L'equazione proposta si può scrivere

$$13\,231\, x - 13\,493\, y = 0$$

e dunque ha certamente soluzione (basta prendere $x = y = 0$). La generica soluzione si ottiene dalla generica soluzione dell'equazione

(*) $$13\,231\, x + 13\,493\, y = 0$$

cambiando segno al valore della y; a sua volta, la generica soluzione della (*) è della forma

$$x := \tfrac{13\,493}{\delta} h, \qquad y := -\tfrac{13\,231}{\delta} h \qquad \text{(al variare di } h \text{ in } \mathbb{Z})$$

dove δ è il massimo comun divisore fra $13\,231$ e $13\,493$.

Resta dunque soltanto da calcolare tale massimo comun divisore. Si ha

$$13\,493 = 13\,231 \cdot 1 + 262\,;$$
$$13\,231 = 262 \cdot 50 + 131\,;$$
$$262 = 131 \cdot 2 + 0\,.$$

Pertanto $\delta = 131$ e la generica soluzione dell'equazione proposta è

$$x \coloneqq 103h, \qquad y \coloneqq 101h\,.$$

Esercizio 6

Sia $\mathbb{Z}_{8\,036}$ l'anello delle classi di resto modulo $8\,036$. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$, indichiamo con $[z]$ l'elemento di $\mathbb{Z}_{8\,036}$ a cui z appartiene.
Per ciascuna delle seguenti due equazioni esponenziali in $\mathbb{Z}_{8\,036}$ nella incognita x si trovi, qualora esista, una soluzione x_0 in $\mathbb{N}$ con $x_0 > 100\,000$:

$$[14]^x = [1]\,; \qquad [15]^x = [1]\,.$$

Soluzione — Ciascuna delle equazioni proposte se ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ ne ha infinite (data una soluzione x_0 in $\mathbb{Z}^+$, ogni multiplo di x_0 è soluzione).

Per il teorema di Euler-Fermat, l'equazione $[14]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 14 e $8\,036$ è uguale a 1; ma ciò non è possibile, perché 14 e $8\,036$ sono entrambi pari. Pertanto l'equazione $[14]^x = [1]$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$

Analogamente, l'equazione $[15]^x = [1]$ ha soluzione in $\mathbb{Z}^+$ se e soltanto se il massimo comun divisore fra 15 e $8\,036$ è uguale a 1.

Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il MCD fra 15 e $8\,036$:

$$8\,036 = 15 \cdot 535 + 11\,; \qquad 15 = 11 \cdot 1 + 4\,;$$
$$11 = 4 \cdot 2 + 3\,; \qquad 4 = 3 \cdot 1 + 1\,;$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0\,.$$

Il massimo comun divisore fra 15 e $8\,036$ è dunque 1; pertanto l'equazione $[15]^x = [1]$ ha (infinite) soluzioni in $\mathbb{Z}^+$, una delle quali è $\varphi(8\,036)$.

Per calcolare $\varphi(8\,036)$ ci serve la fattorizzazione di $8\,036$.

È facile vedere che $6\,413 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 41$ con 41 numero primo (infatti si verifica subito che non è divisibile né per 2 né per 3 né per 5). Dunque

$$\varphi(8\,036) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(7^2) \cdot \varphi(41) = 2 \cdot 42 \cdot 40 = 3\,360$$

è una soluzione dell'equazione $[15]^x = [1]$.

Poiché, come si è già osservato, anche ogni multiplo di $3\,360$ è soluzione, moltiplicando $3\,360$ per $1\,000$ si ottiene la soluzione $3\,360\,000$ che è maggiore di $100\,000$, come si voleva.

Esercizio 7

Si stabilisca, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali multipli di *tre* che in base *nove* si scrivono con *nove* cifre, non necessariamente distinte ma disposte (da sinistra a destra) in ordine crescente.

Soluzione – Poiché le nove cifre devono essere disposte, da sinistra a destra, in ordine crescente, fra esse non può comparire lo zero.

Vediamo in quanti modi si può costruire un numero naturale n che rispetti le condizioni del problema. Poiché n deve essere multiplo di *tre*, l'ultima cifra a destra nella scrittura in base *nove* può essere soltanto 3 o 6 (abbiamo escluso lo zero). Sono due casi che si escludono a vicenda ed esauriscono tutte le possibilità: quindi possiamo considerarli separatamente ed applicare poi il principio di addizione.

Se l'ultima cifra è 3, le prime otto possono essere scelte soltanto fra $1, 2$ e 3; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{3+8-1}{8} = \binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ possibilità.

Se l'ultima cifra è 6, le prime otto possono essere scelte soltanto fra $1, 2, 3, 4, 5$ e 6; poiché possono essere anche ripetute ma devono essere disposte in ordine crescente, ci sono in tutto $\binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1\,287$ possibilità.

Applicando il principio di addizione, si trova che i numeri che soddisfano le condizioni poste dal problema sono in tutto

$$45 + 1\,287 = 1\,332\,.$$